随机微分方程引论

（第二版）

龚光鲁　编著

北京大学出版社

随机微分方程引论

（第二版）

龚光鲁　编著

北京大学出版社

书　　名：随机微分方程引论（第二版）
著作责任者：龚光鲁
责 任 编 辑：王明舟
标 准 书 号：ISBN 7-301-00475-3/O・90
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村
电　　话：出版部 2502015　发行部 2559712　编辑部 2502032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168 毫米　32 开本　18 印张　430 千字
1995 年 11 月第二版　1995 年 11 月第一次印刷
印　　数：0001—3,000 册
定　　价：25.00 元

内容提要

本书着重介绍随机微分方程的强解、弱解及其与扩散和带跳跃的马氏过程间的联系。

第一章讨论 Brown 运动的随机积分。第二章介绍了随机过程的一般理论的梗概，着重于随机过程的对偶投影理论。第三章与第四章讨论了连续半鞅的随机微分方程的强解，Ito 方程的弱解，马氏型 Ito 方程弱解的存在唯一性条件及其与扩散过程的联系。第五章讨论一维情形，着重论述边界点的分类、常返性与保守性。第六章介绍带边界的随机微分方程与扩散。Fichora 边界分类。第七章给出了一般半鞅的分解及 Ito 公式，拟左连续的 σ 有限点过程的积分。还讨论了带有平稳点过程积分的随机微分方程，这种方程是既有连续部分又有跳跃部分的强马氏过程的典型情形。本书最后还有一个关于连续鞅与 Brown 运动构造及凸函数的广义导数的简短附录。

再 版 序

这一版对原书各章内容除作了局部更动以外，主要的变动为：把Brown 运动的局部时的内容改写为连续半鞅的局部时；讨论了含有 δ 函数的Ito 过程；扩大了第五章，加进了可测系数的一维随机微分方程的Engelbest-Schmidt 理论与 Zvonkin 方法和轨道唯一性的Le Gall 方法，以及 Stratonich 方程的 Doss 方法；对Mckean-Vlasov 随机微分方程作了简短介绍；加进了 Brown 弋巡律及其推导。

此外，本版还改正了原书的许多疏忽与印刷错误。

特别值得一提的是本书对于记号与名词索引作了一个完备易用的表。

序　言

近年来，随机微分方程、扩散过程及随机分析有了迅速发展，并广泛应用于系统科学、工程控制、生态学等各个方面。在这个领域中，先后出现了 Gihman-Skorohod, Stroock-Varadhan, Ikeda-Watanabe 等著名概率学家的专著。它们分别各有侧重地总结了这个领域内的最重要的新成果，并且对基本理论作了全面的阐述。这些著作在我国受到了广泛的重视，但是由于它们篇幅过大，论题过多，而且个别地方还不自封，所以对初学者来说，并不容易掌握。编写本书的目的，是力图选择上述著作中的一部分基本知识、概念和典型的方法，作一个较为浅显的阐述，并辅以笔者学习上述名著的体会，加入某些一般理论在具体情况下的实现和应用，以期便于读者理解掌握，铺填初学者走向专门研究的道路上的坑隙沟壑，为有兴趣学习随机微分方程与扩散过程的初学者提供一个入门的教科书。

随机微积分与随机微分(积分)方程起源于马氏过程的构造，后者起始于 Kolmogorov 的分析方法与 Feller 的半群方法。但是对于扩散过程，更接近物理直观的 Langevin 方程

$$dX_t = \frac{v}{m} dB_t + a\,dt$$

是很有吸引力的。可惜的是 Brown 运动 B_t对几乎所有的轨道无处可微，因而从数学上说 dB_t不能按一般的想法定义积分。Ito首先给出了积分的定义，并以随机积分(微分)方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$$

的解来表达扩散过程。至今，从 Ito 开始的随机微积分不仅适用于扩散过程，而且适用于一大类非常广泛的随机过程——半鞅，成为随机分析的有力工具。

本书着重介绍随机微分方程的强解、弱解及它们与扩散过程和某些带跳跃的马氏过程之间的联系。本书只假定读者具有测度论、随机过程论基础与离散鞅论方面的基本知识。在这个基础上书中的内容是自封的。本书的主要内容曾在北京大学数学系及概率统计系研究生课中讲授。本书的对象是高年级大学生、研究生及对基本理论及其应用有兴趣的科技人员。

本书第一章讨论 Brown 运动的随机积分。这是经典随机微积分的主要内容。虽然它们是第二章的特例，这里还是用较多的篇幅叙述并证明。一则对于只需要经典情形的读者，例如不准备专门从事随机过程理论研究的读者，提供必要的知识；再则也可把它们当作现代随机积分理论的背景。此外，读者也可以根据具体情况，跳过第二章与第三章的某些节段，也可以跳过第一章直接进入第二章。第二章的前三节介绍了随机过程一般理论的梗概(对于希望更全面学习与了解现代鞅论的读者可参考[Y],[HWY],[RY]。这方面的结果也可以参考[J],[DM])。然后介绍半鞅的随机积分和连续半鞅的 Ito 公式(我们把不连续情况放到第七章讨论)。本书第三章讨论连续半鞅的随机微分方程的强解和 Ito 方程的弱解。第四章讨论马氏型 Ito 方程弱解的存在唯一性条件，介绍了著名的 Stroock-Varadhan 定理，并且在存在唯一条件的基础上构造了扩散过程。第五章讨论一维 Ito 方程与一维扩散，着重论述了边界点的分类，讨论了扩散的常返性与保守性。第六章是带边界的随机微分方程与扩散，介绍了 Fichera 边界分类。第七章给出了一般半鞅的分解与 Ito 公式，并讨论拟左连续的 σ 有限点

过程的随机积分及带有平稳点过程积分的随机微分方程。这种方程的解是既有连续部分又有跳跃部分的强马氏过程的典型情形。

在本书的最后，有一个关于连续时间鞅和Brown运动构造及凸函数的性质的简短的附录。

严加安同志对原稿提出了许多宝贵的意见，笔者在此对他致以深切的感谢。

目　　录

第一章　Brown 运动的随机积分

§1.1　有关 Brown 运动的某些性质

在本节中，$(\Omega,\mathscr{F},P)$恒指某个概率空间，其中Ω为样本点的全体，$\mathscr{F}$为Ω上的一个σ代数，而P是$\mathscr{F}$上的一个概率测度。我们用d维列向量x记d维欧氏空间R^d中的元，并用x^T表示它的转置，用$|x|$表示它的模。

记

$$R^{[0,\infty)}=\{u:\ u=(u_t)_{0\leqslant t<\infty}\},$$

$$\mathscr{B}(R^{[0,\infty)})=\sigma(u_t:\ 0\leqslant t<\infty)$$

（由一切u_t生成的最小σ代数，即使得一切u_t均为可测的最小σ代数）。

我们称$(\Omega,\mathscr{F})$到$(R^{[0,\infty)},\mathscr{B}(R^{[0,\infty)}))$的一个可测变换为随机过程。一般用$X,Y,Z,\cdots$或$(X_t)_{0\leqslant t<\infty},(Y_t)_{0\leqslant t<\infty},\cdots$等（有时也用希腊字母，例如$\xi(t)$）表示。

定义1.1　若U为完备可分距离空间，由U的全体开子集生成的σ代数记为$\mathscr{B}(U)$，则可测空间$(U,\mathscr{B}(U))$称为 Polish 空间。

例1　设

$$C[0,\infty)=\{w:\ w=(w_t)_{0\leqslant t<\infty},\ w_t\text{为}\ t\ \text{的连续函数}\}.$$

在$C[0,\infty)$中定义距离ρ_C：

$$\rho_C(w^{(1)},w^{(2)})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|w^{(1)}-w^{(2)}\|_n\wedge 1}{2^n}$$

$$(w^{(i)}=(w_t^{(i)})_{0\leqslant t<\infty},\ i=1,2),\tag{1.1}$$

其中

$$\|w\|_n = \sup_{0 \leq t \leq n} |w_t|. \tag{1.2}$$

那么 $C[0,\infty)$ 在 ρ_C 下成为完备可分距离空间，$(C[0,\infty),\ \mathscr{B}(C[0,\infty)))$ 就是一个 Polish空间。

显然，如果用 $[0,n]$ 代替 $[0,\infty)$，那么相应的 $C[0,n]$ 在模 $\|\ \|_n$ 下成为 Banach 空间。所以实际上 $C[0,\infty)$ 是Frechet 空间，也就是具有不变距离(即满足 $\rho_C(w^{(1)}+w,\ w^{(2)}+w)=\rho_C(w^{(1)},w^{(2)})$)的完备可分距离线性空间。在这空间中收敛性 $w_t^{(n)}\to w_t$ 等价于 $w_t^{(n)}$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 上局部一致收敛到 w_t，即在 $[0,\infty)$ 的任意紧子集上均为一致收敛。

为了使记号简洁，今后我们记 W^d 为 $C[0,\infty)$ 的 d 次笛卡儿乘积。

我们指出 $\mathscr{B}(W^d)$ 就是在 W^d 上下述坐标过程

$$X_t(w)\equiv w_t,\quad w(=(w_t)_{0\leq t<\infty})\in W^d$$

生成的 σ 代数。为此我们先记后面的 σ 代数为 $\mathscr{B}'$。

首先我们注意在 t 固定时 $X_t(w)$ 是 W^d 上的连续函数(确切地说，是连续泛函)。于是对这个 t 及任意实数 a，$\{w:\ w_t<a\}$ 是 W^d 的开集，因此 $\{w:\ w_t<a\}\in\mathscr{B}(W^d)$。由典型逼近就得到 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}(W^d)$；反之，对于任意 n,m 及 $w^0\in W^d(w^0=(w_t^0)_{0\leq t<\infty})$，我们有

$$\left\{w:\ \|w-w^0\|_n<\frac{1}{m}\right\}$$

$$=\bigcap_{\substack{t_i\text{有理}\\ 0\leq t_i\leq n}}\left\{w:\ |w_{t_i}-w_{t_i}^0|<\frac{1}{m}\right\}\in\mathscr{B}',$$

因此 $\mathscr{B}(W^d)\subset\mathscr{B}'$。这样我们就得到 $\mathscr{B}'=\mathscr{B}(W^d)$。

定义1.2 由可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(W^d,\mathscr{B}(W^d))$ 的可测变换 $X(\equiv(X_t(w))_{0\leq t<\infty})$ 称为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的连续随机过程(显然当 t 固定时 $X_t(w)$ 是取值于 R^d 的随机变量，即 d 维随机向量)。

定义1.3 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的连续随机过程

$$B=(B_t)_{0\leqslant t<\infty}$$

称为 d 维 Brown 运动，如果 $B_0=0$，B_t是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的独立增量过程：

$$E(B_t-B_s)(B_u-B_v)=0 \quad (\forall v<u\leqslant s<t),$$

而且 B_t-B_s遵从数学期望为0，方差矩阵为$(t-s)I$（I 为单位矩阵）的 Gauss（正态）分布（记成 $B_t-B_s\sim\mathscr{N}(0,(t-s)I)$）。

如果$(W^d,\mathscr{B}(W^d),P)$上的坐标过程 $X_t(w)\equiv w_t$是 Brown运动且 $P(w_0=0)=1$，则我们称 P 为 Wiener 测度，$(W^d,\mathscr{B}(W^d),P)$为Wiener 空间。今后我们专用记号 P^w表示 Wiener 测度。

定义1.4 $\mathscr{F}$的子σ代数族$(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t<\infty}$称为参考族，如果它对 t 是递增的右连续族，即

$$\mathscr{F}_{t_1}\subset\mathscr{F}_{t_2}\ (t_1<t_2);\ \ \mathscr{F}_t=\bigcap_n\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}(\equiv\mathscr{F}_{t+}).$$

对于$\mathscr{F}$的任意子σ代数族$(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t<\infty}$，其右连续化族$(\mathscr{F}_{t+})_{0\leqslant t<\infty}$总是参考族。记

$$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_t\mathscr{F}_t$$

（这里$\mathscr{F}\vee\mathscr{G}$表示含$\sigma$代数$\mathscr{F}$及$\mathscr{G}$的最小$\sigma$代数）。若在$(\Omega,\mathscr{F}_\infty)$上定义了概率测度 P，σ代数 $\mathscr{F}_t$可以在P下完备化（即加进一切$\mathscr{F}_\infty$零测集），我们把它记成$\overline{\mathscr{F}}_t^P$，或简记成$\overline{\mathscr{F}}_t$。易见

$$\overline{(\mathscr{F}_{t+})}=\overline{\mathscr{F}}_{t+},$$

我们把它简写成$\overline{\mathscr{F}}_{t+}$，并称$(\overline{\mathscr{F}}_{t+})$为$(\mathscr{F}_t)$的完备化参考族。

有时我们也把参考族$(\mathscr{F}_t)$与概率空间$(\Omega,\mathscr{F})$放在一起，记成$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t<\infty})$（或$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t))$）。随机过程 $X=(X_t)_{0\leqslant t<\infty}$称为$(\mathscr{F}_t)$适应过程，如果对任意 $t\geqslant0$固定，X_t均为$\mathscr{F}_t$可测（简记成$X_t\in\mathscr{F}_t$）。

定义1.5 设 $X=(X_t)_{0\leq t<\infty}$是$(\Omega,\mathscr{F})$上的随机过程。记

$$\mathscr{F}_t^0=\sigma(X_s:\ s\leqslant t)$$

（括号中的随机变量所生成的 σ代数），

$$\mathscr{F}_t^X=\mathscr{F}_{t+}^0.$$

我们称$(\mathscr{F}_t^X)$为X生成的参考族。

我们先指出 Brown 运动的一个等价条件。

命题1.7 对于$(\Omega,\mathscr{F},P)$上零初值的连续随机过程B而言，下列三个叙述彼此等价：

1° B是 Brown 运动；

2° 对任意 $\lambda\in R^d$及 $t>s\geqslant 0$恒有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\mathscr{F}_s^0)=e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}\quad(\text{a.e.d}P);\quad(1.3)$$

3° 对任意 $\lambda\in R^d$及 $t>s\geqslant 0$ 恒有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\mathscr{F}_s^B)=e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}\quad(\text{a.e.d}P).\quad(1.4)$$

证明 1°⇒2°。由于 B_t是独立增量过程，对于 $t>s\geqslant 0$及任意 $\eta\in\mathscr{F}_s^0$有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}\eta)=Ee^{i\lambda^T(B_t-B_s)}E\eta.$$

取 $\eta=I_A$（I_A为$\mathscr{F}_s^0$中任意一个集合 A 的示性函数），根据条件期望的定义，上面公式等价于

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\mathscr{F}_s^0)=Ee^{i\lambda^T(B_t-B_s)}\quad(\text{a.e.d}P).$$

这就是(1.3)。

2°⇒3°。取 n 使 $s+\frac{1}{n}<t$。由(1.3)及条件期望的性质

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\mathscr{F}_{s+\frac{1}{n}}^0)$$

$$=e^{i\lambda^T(B_{s+\frac{1}{n}}-B_s)}E(e^{i\lambda^T(B_t-B_{s+\frac{1}{n}})}|\mathscr{F}_{s+\frac{1}{n}}^0)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2\frac{1}{n}} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s-\frac{1}{n})} \quad (\text{a.e.d}P)$$

$$\to e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \quad (n\to\infty). \tag{1.5}$$

令 $n^* = -n$。记

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{n^*} = \mathscr{F}^0_{t-\frac{1}{n^*}} \quad (n^* = -1, -2, \cdots),$$

$$X_{n^*} = E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \widetilde{\mathscr{F}}_{n^*}) = E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}}).$$

于是 X_{n^*} 是一个复值的逆 时鞅列，而且 $E|X_{n^*}| = 1(<\infty)$。因此 X_{n^*}存在 L_1极限。(1.5)就变成

$$E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}}) \xrightarrow{L_1} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}.$$

同时，逆时鞅列 X_{n^*} 与其 L_1 极限 $X_{-\infty}(\equiv e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)})$一起组成 $(\widetilde{\mathscr{F}}_{n^*}, \widetilde{\mathscr{F}}_{-\infty})$逆时闭鞅列，其中

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{-\infty} \equiv \mathscr{F}^0_{s+}.$$

也就是说

$$E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathscr{F}^0_{s+}) = E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \widetilde{\mathscr{F}}_{-\infty})$$

$$= X_{-\infty} = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \quad (\text{a.e.d}P).$$

此即(1.4)。

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$。对于 $\mathscr{F}^B_s$ 可测的任意 d 维随机变量 η 及 $\lambda, \mu \in R^d$，$t > s \geqslant 0$，利用3°，我们有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} e^{i\mu^T\eta}) = E[E e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} e^{i\mu^T\eta} | \mathscr{F}^B_s)]$$

$$= E[e^{i\mu^T\eta} E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathscr{F}^B_s)]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} E e^{i\lambda^T\eta}.$$

这说明$B_t - B_s$与η是相互独立的，而且$B_t - B_s \sim \mathscr{N}(0, (t-s)I)$。

因此$(B_t)_{0\le t<\infty}$是 Brown 运动。

命题1.1说明(1.3)可以作为 Brown 运动的特性刻划。由此我们可以把 Brown 运动的定义稍作推广。

定义1.6 对于$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的完备参考族$(\mathscr{F}_t)$(有时简记为$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$)，我们称$(\Omega,\mathscr{F},P)$上连续的$(\mathscr{F}_t)$适应过程$B=(B_t)_{0\le t<\infty}$为($d$维)$(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，如果B满足：对$\forall\lambda\in R^d$，$t>s\geqslant 0$恒有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\mathscr{F}_s)=e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}\quad(\text{a.e.}dP).\qquad(1.6)$$

注意此时B_0未必为零。所以有时也称B为初值B_0的$(\mathscr{F}_t)$ Brown运动。B_0可以是$\mathscr{F}_0$中的任意随机变量。

仿命题1.1证明中3° ⇒1° 的部分的证明，我们也有：对$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动B，B_t-B_s与$\mathscr{F}_s$独立(因而也与B_0独立)。

注1 利用$\mathscr{F}_t^B\subset\mathscr{F}_t$及(1.4)可知：若$B$是$(\mathscr{F}_t)$Brown运动，则$B_t-B_0$是 Brown 运动。

注2 易见：B是$(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，当且仅当B是$(\overline{\mathscr{F}}_t)$ Brown 运动(记住，记号$\overline{\mathscr{F}}_t$是$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$的完备化)。

注3 (1.6)中只须假定对有理的λ成立就足够了。

注4 如果$(\mathscr{F}_t)$不是参考族，而只是$\mathscr{F}$的递增子σ代数族(不右连续)，那么(1.6)保证了B是$(\mathscr{F}_{t+})$Brown 运动。

在本章中，我们将定义随机过程对$(\mathscr{F}_t)$Brown运动的积分。

首先我们指出：沿$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动的轨道定义积分一般是行不通的(除非把“可积”函数——随机过程——类限制得很小，这样也就失去了意义)。为此需要回忆 Brown 运动的如下特性：

引理1.1(Levy 的振动性质) 设B为 Brown 运动，又

$$s_1=t_0<t_1<\cdots<t_n=s_2,$$

$$\Delta t_k=t_{k+1}-t_k,\ \Delta B_{t_k}=B_{t_{k+1}}-B_{t_k},\ h=\max_{0\le k\le n-1}\Delta t_k,$$

那么

$$E\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2-(s_2-s_1)\right|^2\leqslant 2h(s_2-s_1). \qquad (1.7)$$

证明 左 $=E\left|\sum_{k=0}^{n-1}[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k]\right|^2$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}E[\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k]^2$$

$$+\sum_{k\neq 1}E[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k][(\Delta B_{t_j})^2-\Delta t_j].$$

由于ΔB_{t_k}与$\Delta B_{t_j}(k\neq j)$相互独立，所以第二项为0，而第一项为

$$\sum_{k=0}^{n-1}E[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k]^2$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}[E(\Delta B_{t_k})^4+(\Delta t_k)^2-2E(\Delta B_{t_k})^2\Delta t_k]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}[3[E(\Delta B_{t_k})^2]^2-(\Delta t_k)^2]$$

$$=2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2\leqslant 2h(s_2-s_1).$$

引理1.2 令$[s_1,s_2]$的2^n等分点为

$$s_1=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{2^n}^{(n)}=s_2,$$

那么

$$S_n\equiv\sum_{k=0}^{2^n-1}(\Delta B_{t_k^{(n)}})^2\xrightarrow{n\to\infty}s_2-s_1 \quad (\text{a.e.d}P). \qquad (18)$$

证明 对 $\forall \varepsilon_n>0$，由 Chebyshev 不等式及(1.7)我们有

$$
\begin{aligned}
P(|S_n-(s_2-s_1)|\geqslant\varepsilon_n) &\geqslant \frac{1}{\varepsilon_n^2}E|S_n-(s_2-s_1)|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon_n^2}2h(s_2-s_1) \\
&= \frac{2}{2^n\varepsilon_n^2}(s_2-s_1).
\end{aligned}
$$

取 $\varepsilon_n=1/n$，则 $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{2^n\varepsilon_n^2}<\infty$。记

$$A_n=\{|S_n-(s_2-s_1)|\geqslant\varepsilon_n\}.$$

于是 $\sum\limits_1^\infty P(A_n)<\infty$。用 Borel-Cantelli 引理得到

$$P(\varliminf_{n\to\infty} A_n^c)=1$$

(A_n^c 为 A_n 的余集)。因此以概率为 1 地存在 $n_0(\omega)$($\omega\in\Omega$ 为Brown 运动 B 所在的概率空间)，当 $n\geqslant n_0(\omega)$ 时恒有 $|S_n-(s_2-s_1)|<1/n$。此即(1.8)。

Brown 运动的轨道(即 B_t 的一个样本函数)虽然是连续的，但却"极不规则"。它们以概率为 1 地在任何有限(时间 t)区间内都不可求长。这就是：

引理1.3 以概率为 1 地 Brown 运动的样本函数在 t 的任何有限区间都不是有界变差的。

证明 令 $\{t_k^{(n)}\}$ 为引理1.2中的分割。记

$$\lambda_n(\omega)=\max_k|\Delta B_{t_k^{(n)}}|.$$

由 $B_t(\omega)$ 在 $[s_1,s_2]$ 上的一致连续性，当 $\max\limits_k \Delta t_k^{(n)}\to0$ 时，

$$\lambda_n(\omega)\to0 \quad (\text{a.e.}\, dP).$$

于是对引理1.2中的 S_n，我们有

$$|S_n|\leqslant\lambda_n(\omega)\sum_i|\Delta B_{t_i^{(n)}}|.$$

因此由引理1.2得到

$$\sum_i|\Delta B_{t_i^{(n)}}|\geqslant\frac{|S_n|}{\lambda_n(\omega)}\to\infty\quad(\text{a.e.d}P).$$

Brown 运动的以上性质说明不宜对 Brown 运动定义按轨道的积分。

§1.2 Ito 积分的可积函数类

在给出 Ito 积分的经典定义之前，我们还需要讨论一下可供为"可积"函数的类。由于维数不起本质作用，下面我们不妨设

$$d=1.$$

定义1.7 $(\Omega,\mathscr{F})$上随机过程$X=(X_t)_{t\geq0}$称为可测过程，如果$X(t,\omega)\equiv X_t(\omega)$是$([0,\infty)\times\Omega,\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F})$可测函数。如果$(\Omega,\mathscr{F})$上有参考族$(\mathscr{F}_t)$，而且对$\forall T>0$，$X(t,\omega)|_{0\leq t\leq T,\omega\in\Omega}$（指把 t 限于$[0,T]$上）均为$([0,T]\times\Omega,\mathscr{B}([0,T])\times\mathscr{F}_T)$可测函数，则我们称$X$为$(\mathscr{F}_t)$循序过程。

法国 Strasbourg 学派在随机过程的一般理论中把随机过程看成(t,ω)的二元函数。由此区分出了一些特殊的二元可测类，它们在随机积分理论中起了重要作用。本书中我们假定了$(\mathscr{F}_t)$的右连续性，从而可以把定义叙述得稍为简单。

定义1.8 给定$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t))$。考虑$([0,\infty)\times\Omega,\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F})$的子集类：

$\mathscr{P}_g=\{A;\ A\in\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F},\ I_A$为$(\mathscr{F}_t)$循序过程$\}$；

$\mathscr{P}=\sigma$(右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程)；

$\mathscr{P}^*=\sigma$(右连$(\mathscr{F}_t)$适应过程)；

$\mathscr{P}=\sigma$(左连($\mathscr{F}_t$)适应过程)；

$\mathscr{P}^*=\sigma$(左连右极($\mathscr{F}_t$)适应过程)；

$\mathscr{P}^{**}=\sigma$(连续 ($\mathscr{F}_t$) 适应过程)，

$\mathscr{P}_g$称为($\mathscr{F}_t$)循序σ代数，$\mathscr{O}$称为($\mathscr{F}_t$)可选σ代数，$\mathscr{P}$称为($\mathscr{F}_t$)可料σ代数．随机过程X分别称为($\mathscr{F}_t$)可选过程和($\mathscr{F}_t$)可料过程(在不混淆的情形下还可把"($\mathscr{F}_t$)"略去)，如果$X(t,\omega)$分别为$\mathscr{O}$可测、$\mathscr{P}$可测．$\mathscr{O}$，$\mathscr{P}$集称可选、可料集．

当概率P给定时$(\Omega,\mathscr{F})$可完备化成$(\Omega,\overline{\mathscr{F}})$，这时常常考虑$P$完备化了的参考系$(\overline{\mathscr{F}}_t)$，此时$\overline{\mathscr{F}}_t$包含$\mathscr{F}$中一切$P$零测集．

命题1.2 对于$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t))$我们有

1° X为循序过程，当且仅当X为$\mathscr{P}_g$可测(记为$X\in\mathscr{P}_g$)；

2° $\mathscr{P}\subset\mathscr{O}\subset\mathscr{O}^*\subset\mathscr{P}_g$ (将来证明当($\mathscr{F}t$) 为完备参考系时，$\mathscr{O}=\mathscr{O}^*$)；

3°
$$\begin{aligned}\mathscr{P}&=([0,\infty)\times\mathscr{F}_0)\vee\sigma\{(s,u]\times\mathscr{F}_s,\ 0<s<u<\infty\}\\&=([0,\ \infty)\times\mathscr{F}_0)\vee\sigma\{[s,\ u)\times\mathscr{F}_{s-},\ 0<s<u<\infty\}\\&=\mathscr{P}^*=\mathscr{P}^{**}.\end{aligned}$$

因而可料过程必是可选过程，可选过程必是循序过程．

证明 1°的证明．若$X\in\mathscr{P}_g$，则其正部X^+是形如

$$\sum_1^N a_i I_{A_i}\quad(A_i\in\mathscr{P}_g)$$

的简单函数的极限．按$\mathscr{P}_g$的定义可知I_{A_i}是循序过程．于是X^+也是循序过程．因而$X=X^+-X^-$是循序过程．反之，若X为循序过程，则对任意$\lambda\in R$，$I_{\{X\leqslant\lambda\}}=I_{(-\infty,\lambda]}(X)$也是循序过程．按定义推得$\{X\leqslant\lambda\}\in\mathscr{P}_g$，即$X\in\mathscr{P}_g$．

2°的证明．设$X=(X_t)_{t\geqslant0}$是左连续($\mathscr{F}_t$)适应过程．令

$$X_t^{(n)}=\sum_{k=0}^{\infty}X_{\frac{k}{2^n}}I_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n})}(t).$$

显然$X_t^{(n)}\to X_t$．

由 $X^{(n)}\in\mathscr{O}$ 立知 $X\in\mathscr{O}$。但是 $\mathscr{P}$ 由一切如上类型的 X 所生成，因此 $\mathscr{P}\subset\mathscr{O}$。

再则，设 X 为右连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程。在 $[0,T]\times\Omega$ 上我们定义

$$X_t^{(n)}=X_T I_{(T)}(t)+\sum_{k=1}^{2^n} X_{\frac{k}{2^n}T} I_{[\frac{k-1}{2^n}T,\frac{k}{2^n}T)}(t).$$

显见 $X^{(n)}\in\mathscr{B}([0,T])\times\mathscr{F}_T$，而且在 $[0,T]\times\Omega$ 上有 $X^{(n)}\to X$。因此 $X(t,\omega)|_{t\le T}\in\mathscr{B}([0,T])\times\mathscr{F}_T$。即 X 为循序过程。从而 $X\in\mathscr{P}_r$。但是 $\mathscr{O}^*$ 由一切如上类型的 X 所生成，所以 $\mathscr{O}^*\subset\mathscr{P}_r$。

3°的证明。由于如下的过程

$$X=I_A(\omega)\quad(A\in\mathscr{F}_0),$$
$$Y=I_{(s,u]\times A}(t,\omega)\quad(A\in\mathscr{F}_s)$$

均为左连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程，我们得到

$$([0,\infty)\times\mathscr{F}_0)\vee\sigma((s,u]\times\mathscr{F}_s,\ 0<s<u<\infty)\subset\mathscr{P};$$

反之，设 X 为左连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程。令

$$X_t^{(n)}=X_0+\sum_{1}^{\infty} X_{\frac{k}{2^n}} I_{(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]}(t).$$

显然 $X^{(n)}\to X$。由 $X_{\frac{k}{2^n}}\in\mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}$ 推出 $X^{(n)}\in[0,\infty)\times\mathscr{F}_0\vee\sigma((s,u]\times\mathscr{F}_s,0<s<u)$，因而 $X\in[0,\infty)\times\mathscr{F}_0\vee\sigma((s,u]\times\mathscr{F}_s,0<s<u)$。但是 $\mathscr{P}$ 是由一切如上类型的 X 所生成，所以 $\mathscr{P}\subset[0,\infty)\times\mathscr{F}_0\vee\sigma((s,u]\times\mathscr{F}_s,0<s<u)$。第二个等式显然。

由第一个等式推得 $\mathscr{P}\subset\mathscr{P}^*$。我们证明 $\mathscr{P}^*\subset\mathscr{P}^{**}$。事实上，在 $[t-1/n,t]$ 上我们有 $(m\to\infty)$

$$X_{t-\frac{1}{n}} I_{\{t-\frac{1}{n}\}}(s)+\sum_{t-\frac{1}{n}<\frac{k}{2^m}<t} X_{\frac{k}{2^m}} I_{(\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}]}\to X,$$

所以 X 在 $[t-1/n,t]$ 上属于 $\mathscr{B}([t-1/n,t]\times)\mathscr{F}_t$，并可由连续过程

$$n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} X_s \mathrm{d}s$$

近似。由典型逼近立得 $\mathscr{P}^* \subset \mathscr{P}^{**}$。此外显然 $\mathscr{P}^{**} \subset \mathscr{P}$。

注　记

$$\mathscr{R} = \text{可分为}(\{0\} \times A_0) \cup \bigcup_{k=1}^{m} (s_k, u_k] \times A_k]$$

$$(A_0 \in \mathscr{F}_0, A_k \in \mathscr{F}_{s_k})\text{的集所组成的类,}$$

其中 $s_1 < u_1, s_2 < u_2, \cdots, s_m < u_m$ 及 $A_0, \cdots, A_m$ 任意，且 $(s_k, u_k] \times A_k$ 两两互不相交。那么 $\mathscr{R}$ 是一个代数(指测度论代数)，而且

$$\mathscr{P} = \sigma(\mathscr{R}).$$

对于一个可积的 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程 X（可积乃指 $E|X_t| < \infty$，$\forall t \geq 0$），我们可以在 $\mathscr{R}$ 上定义一个有限可加的集函数：

$$D(\{0\} \times A) = E[I_A X_0] \quad (A \in \mathscr{F}_0),$$

$$D((s,u] \times A) = E[I_A(X_u - X_s)] \quad (A \in \mathscr{F}_s),$$

称为 X 的Doleans函数。它度量了 X 与鞅的偏离程度。显见 X 是零初值 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅，当且仅当 $D \equiv 0$。

一般来说，不同的 X 可能有相同的Doleans函数。但是可以证明当 X 是可积增过程时，Doleans 函数 D 可以扩张为 $\mathscr{P}$ 上的测度（称为Doleans测度）。并且在对应于同一个Doleans测度的可积 $(\mathscr{F}_t)$ 适应增过程中唯一地存在一个 $(\mathscr{F}_t)$ 可料过程。它称为其他过程的可料对偶投影过程。由此发展出所谓对偶投影理论。我们将在§2.3中阐述它。

在讨论随机积分时，我们一般假定 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是完备化的概率空间，而 $(\mathscr{F}_t)$ 为完备参考族。

$(\mathscr{F}_t)$ 循序过程显然是 $(\mathscr{F}_t)$ 适应的可测过程。反之对于给定的概率 P 而言，$(\mathscr{F}_t)$ 适应的可测过程 P 等价（X 与 Y 称为 P 等价，如果对 $\forall t \geq 0$，均有 $P(X_t = Y_t) = 1$）于一个 $(\mathscr{F}_t)$ 可选过程，这个过程称为原过程在 P 下的可选修正（当然更是循序修正）。

命题1.3 给定$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$，则任意$(\mathscr{F}_t)$适应的可测过程$X$，在$P$下必存在一个$(\mathscr{F}_t)$可选修正$\tilde{X}$。

证明 令

$\mathscr{H}=\{X:X$可测，$Y=(E(X_t|\mathscr{F}_t))_{t\geq 0}$有可选修正$\tilde{X}\}$。

则$\mathscr{H}$对单调递增极限封闭。事实上，如果$X^{(n)}\uparrow X$且

$$Y^{(n)}=(E(X_t^{(n)}|\mathscr{F}_t))_{t\geq 0}$$

有可选修正$\tilde{X}^{(n)}$，定义

$$\tilde{X}=\begin{cases}\lim\limits_n \tilde{X}_t^{(n)}, & \text{如果极限存在,}\\ 0, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

易见$\tilde{X}$是$Y=(E(X_t|\mathscr{F}_t))_{t\geq 0}$的可选修正。记

$$\mathscr{S}=\{A\in\mathscr{B}([0,\ \infty))\times\mathscr{F}:\ I_A\in\mathscr{H}\},$$
$$\Pi=\{A=[s,\ u)\times\Lambda:\ 0\leqslant s<u<\infty,\Lambda\in\mathscr{F}\},$$

那么Π是π系。又对于$[s,u)\times\Lambda\in\Pi$，$(\mathscr{F}_t)$左极右连过程$I_{[s,u)}(t)E(I_\Lambda|\mathscr{F}_t)$显然是$E(I_{(s,u)\times\Lambda}|\mathscr{F}_t)$的可选修正，所以$\Pi\subset\mathscr{S}$。由于$\mathscr{H}$是单调系，我们可推出$\mathscr{S}$包含$\Pi$的$d$扩张，因此$\mathscr{S}=\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$。一般有界正可测过程可用$\mathscr{S}$特征函数的线性组合单调逼近，因而属于$\mathscr{H}$。

现在设X为$(\mathscr{F}_t)$适应的正可测过程，那么$X\wedge n$是$(\mathscr{F}_t)$适应的有界可测过程，所以$X\wedge n$以$(E(X_t\wedge n|\mathscr{F}_t))_{t\geq 0}$为修正。但是我们已证明了后者有可选修正，从而$X\wedge n$有可选修正，由此推出$X$有可选修正。这就证明了本命题。

引理1.4 记$(p\geqslant 1)$

$$\mathscr{L}_p=\Big\{\Phi:\ \Phi=(\Phi_t)_{t\geq 0},\Phi_t(\omega)\equiv\Phi(t,\omega)\text{是可测过程}$$
$$\text{又是}(\mathscr{F}_t)\text{适应过程,且对}\ \forall T,E\int_0^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}t<\infty\Big\}.$$

在 $\mathscr{L}_p$ 中定义准范数 $\|\Phi\|_p$（不满足 $\|\lambda\Phi\|_p=|\lambda|\|\Phi\|_p$）如下：

$$(\|\Phi\|_p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\|\Phi\|_{p,n})\wedge 1}{2^n},$$

其中

$$\|\Phi\|_{p,T}=\left(E\int_0^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

那么 $\mathscr{L}_p$ 成为可分 Frechet 空间。

注　如果只考虑 $[0,T]$ 上定义的 Φ，我们令 $\mathscr{L}_{p,T}=\{\Phi:\|\Phi\|_{p,T}<\infty\}$。那么 $\mathscr{L}_{p,T}$ 在 $\|\Phi\|_{p,T}$ 下成为可分 Banach 空间。$\mathscr{L}_p$ 中的收敛性等价于可列个 Banach 空间 $\mathscr{L}_{p,n}$ 的乘积的收敛性。

引理1.5　记 $(p\geqslant 1)$

$$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}=\Big\{\Phi:\ \Phi=(\Phi_t)_{t\geqslant 0},\Phi_t(\omega)\text{是可测}(\mathscr{F}_t)\text{适应过程，}$$
$$\text{且对}\forall T\text{固定}\int_0^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}t<\infty,\ \text{a.e.}\,\mathrm{d}P\Big\}.$$

在 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 中定义准范数

$$\|\Phi\|_p^{\mathrm{loc}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|\Phi\|_{p,n}^{\mathrm{loc}}}{2^n},$$

其中

$$\|\Phi\|_{p,T}^{\mathrm{loc}}=\left(E\left[\left(\int_0^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}t\right)\wedge 1\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

那么 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 在距离 $\|\Phi-\Psi\|_p^{\mathrm{loc}}$ 下成为具有"平移"不变距离的线性距离空间。$\|\Phi^{(m)}\|_p^{\mathrm{loc}}\to 0$，当且仅当 $\forall n,\int_0^n|\Phi_t^{(m)}|^p dt$ 依概率收敛于0（$m\to\infty$）。

这两个引理是泛函分析的简单习题，故略去其证明。

注　若 $\Phi\in\mathscr{L}_p$，则显然有 $\Phi\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$，而且

$$\|\Phi\|_p^{\mathrm{loc}} \leqslant \|\Phi\|_p.$$

命题1.4 对于 $\forall \Phi \in \mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$，存在可料过程$\tilde{\Phi} \in \mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$，使在$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$中有

$$\tilde{\Phi} = \Phi.$$

这个 $\tilde{\Phi}$ 称为 Φ 在$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$中的可料修正。

证明 由命题1.3，Φ 有可选修正（因而是循序修正），所以我们不妨假定 Φ 为循序过程。令

$$A_n = \left\{\omega: \int_0^n |\Phi(s,\omega)| \mathrm{d}s = \infty\right\}.$$

由 Hölder 不等式

$$\int_0^n |\Phi_s| \mathrm{d}s \leqslant \left(\int_0^n \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p'}} \times \left(\int_0^n |\Phi_s|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (\text{a.e.d}P)$$

（p' 是 p 的"共轭"数：$(1/p)+(1/p')=1$）我们推出 A_n 是零测集。

我们定义

$$\tilde{\Phi}^{(n)}(t,\omega) = \left(n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \Phi_s \mathrm{d}s\right) I_{\left(\bigcup\limits_1^\infty A_n\right)^c},$$

$$\tilde{\Phi}(t,\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\Phi}^{(n)}(t,\omega), & \text{当这极限存在时,} \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \tag{1.9}$$

由于假定了 $\mathscr{F}_t$ 之 P 完备性及 Φ 之循序性，我们推得$\tilde{\Phi}^{(n)}$是$(\mathscr{F}_t)$适应的。但是 $\tilde{\Phi}^{(n)}$又是左连续过程，因此其极限 $\tilde{\Phi}$ 是可料过程。

另一方面，当 $\omega \overline{\in} \bigcup\limits_1^\infty A_n$ 时有：对 $\forall T > 0$，

$$\int_0^T |\Phi_s| \mathrm{d}s < \infty.$$

所以对固定的$\omega \in \bigcup_{1}^{\infty} A_n$有

$$n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \Phi_s \mathrm{d}s \xrightarrow{n\to\infty} \Phi_t \quad (\text{a.e.}\,\mathrm{d}t). \tag{1.10}$$

记

$$A = \{(t,\omega):\ \tilde{\Phi}^{(n)} \not\to \Phi,\ n\to\infty\}.$$

显然$A \in \mathscr{B}([0,\infty)) \times \mathscr{F}$。

但是(1.10)决定了当ω固定后该集的ω-截口的$\mathrm{d}t$测度是零测集，因而这个集是$\mathscr{B}([0,\infty)) \times \mathscr{F}$中$\mathrm{d}t \times \mathrm{d}P$的零测集。所以$A$也是零测集。我们就得到：

$$\{(t,\omega):\ \Phi \neq \tilde{\Phi}\}$$

是零测集。即在$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$中$\tilde{\Phi} = \Phi$。

约定 今后$\mathscr{L}_p$，$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$中的元素$\Phi$恒指它的可料修正。

命题1.4的含义是

$$\mathscr{L}_{p,T} = L_p([0,T] \times \Omega, \mathscr{P}, \mathrm{d}t \times \mathrm{d}P), \tag{1.11}$$

$$\mathscr{L}_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_p([0,n] \times \Omega, \mathscr{P}, \mathrm{d}t \times \mathrm{d}P) \tag{1.12}$$

（在拓扑等价意义下相等），其中$L_p([0,T] \times \Omega, \mathscr{P}, \mathrm{d}t \times \mathrm{d}P)$是指乘积测度$\mathrm{d}t \times \mathrm{d}P$被限于可料$\sigma$代数$\mathscr{P}$上构成的$L_p$空间的如下子空间：$\{\Phi:\ \Phi(t,\omega) = 0(\ t \geqslant T\ )\}$。

引理1.6 $\Phi \in \mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$，当且仅当$\exists(\mathscr{F}_t)$停时列$\tau_n$(即$\{\tau_n \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t) < \infty(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P)$，$\tau_n \uparrow \infty$，使$\Phi I_{[0,\tau_n]}(t) \in \mathscr{L}_p$。

在条件成立下，我们有

$$\|\Phi I_{[0,\tau_n]}(t) - \Phi\|_p^{\mathrm{loc}} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

证明 设$\Phi \in \mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$。令

$$\tau_n = n \wedge \inf\left\{t:\ \int_0^t |\Phi_s|^p \mathrm{d}s \geq n\right\}.$$

那么 τ_n 是递增$(\mathscr{F}_t)$停时列，且 $\tau_n \uparrow \infty (\text{a.e.d}P)$。由于

$$\{t \leq \tau_n\} = \Omega \setminus \{\tau_n < t\} \in \mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t,$$

我们有 $I_{[0,\tau_n]}(t) \in \mathscr{F}_t$，即 $I_{[0,\tau_n]}(t)$是$(\mathscr{F}_t)$适应过程。但是它又是左连续，因而它是可料过程。于是 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)$也是可料过程。对 $\forall\, T > 0$，我们有

$$E\int_0^T |\Phi_t I_{[0,\tau_n]}(t)|^p \mathrm{d}t = E\left(\int_0^{\tau_n} |\Phi_t|^p \mathrm{d}t\right) \leq n.$$

因此 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t) \in \mathscr{L}_p$。

反之，若 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t) \in \mathscr{L}_p$，则 $E\int_0^{\tau_n} |\Phi_t|^p \mathrm{d}t < \infty$。从而

$$\Lambda_n \equiv \left\{\omega:\ \int_0^{\tau_n} |\Phi_t|^p \mathrm{d}t = \infty\right\}$$

是零测集。在零测集 $\bigcup_1^\infty \Lambda_n$ 外，我们显然有

$$\int_0^{\tau_n} |\Phi_t|^p \mathrm{d}t < \infty \quad (\forall n).$$

由 $\tau_n \uparrow \infty$立知 $\Phi \in \mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$。此外，对 $\forall\, T > 0$ 我们有

$$\int_0^T |\Phi_t - \Phi_t I_{[0,\tau_n]}(t)|^p \mathrm{d}t$$

$$= \int_{\tau_n \wedge T}^T |\Phi_t|^p \mathrm{d}t \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad (\text{a.e.d}P).$$

因而也依概率收敛于0。由此推出$\|\Phi - \Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\|_p^{\mathrm{loc}} \to 0$。

注 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 的元素 Φ 是$(\mathscr{F}_t)$可料过程(predictable 过程)。另

一方面它是($\mathscr{F}_t$)适应的可测过程，国外有些书与文献上称($\mathscr{F}_t$)适应的可测过程为 nonanticipating 过程，意即“不依赖将来”的过程。易使人混淆的是，依中文的字面也可把 nonanticipating 译成“不可料”(事实上有些书上已经这样译了)。这样，几乎是同一的概念(“predictable” 与 “nonanticipating”)在中文上却被译成完全相反的词(“可料”与“不可料”)。为了避免这种不必要的混淆，我们建议把 nonanticipating 改译成“非预期”的(而保留国内多数著作及文献中使用的 predictable 的译名“可料”)。

命题1.5 令

$$\mathscr{L}_0=\Big\{\Phi:\ \Phi=f_0(\omega)I_{\{0\}}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$
$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n\uparrow\infty, f_0, f_k \text{ 一致有界},$$
$$f_0\in\mathscr{F}_0, f_k\in\mathscr{F}_{t_k}\Big\}.$$

即 $\mathscr{L}_0$ 的元素都是在 t 的任意有限区间$[0,T]$上的左连续随机梯形(只取有限个随机值)过程。我们有

1° $\mathscr{L}_0$ 在$\mathscr{L}_p$中稠；

2° $\mathscr{L}_p^{loc}\subset\overline{\mathscr{L}}_0$(在$\|\cdot\|_p^{loc}$下的完备化)。又若$\Phi\in\mathscr{L}_p$，且$\Omega_0\subset\Omega$满足$\Phi I_{\Omega_0}\equiv0$，则可以取$\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使

$$\Phi^{(n)}I_{\Omega_0}\equiv0,\quad \|\Phi^{(n)}-\Phi\|_p\to0$$

(我们称满足$\Phi I_{\Omega_0}\equiv0$的Φ为“在Ω_0上致零”的Φ)。而且当$|\Phi|\leqslant C$时，还可要求$|\Phi^{(n)}|\leqslant C$。

证明 1° 的证明。设$\Phi\in\mathscr{L}_p$。因为$\Phi=\Phi^+-\Phi^-$且Φ^+，$\Phi^-\in\mathscr{L}_p$，故不妨假定$\Phi\geqslant0$。于是我们可取$\mathscr{P}$可测简单函数$\Phi^{(n)}\geqslant0$，使$\Phi^{(n)}\uparrow\Phi$。由(1.11)及控制收敛性推出在

$$L_p([0,T]\times\Omega,\mathscr{P},dP\times dt)$$

中$\Phi^{(n)}I_{[0,T]}(t)$收敛到$\Phi I_{[0,T]}(t)$。由(1.11)及(1.12)我们得到

$\Phi^{(n)} \xrightarrow{\mathscr{L}_p} \Phi$。此时 $\Phi^{(n)}$的形式为

$$\Phi^{(n)}=\sum_{i=1}^{N^{(n)}} a_i^{(n)} I_{A_i^{(n)}} \quad (A_i^{(n)} \in \mathscr{P}),$$

而且 $\Phi^{(n)}$保持"在 Ω_0 上致零"性。

于是1°的证明可简单地化为证明：对 $A \in \mathscr{P}$，$I_A \in \mathscr{L}_p$，且 $I_A I_{\Omega_0}=0$，可以用"在 Ω_0 上致零"的$\mathscr{L}_0$ 函数在$\mathscr{L}_p$意义下近似 I_A。下面我们分几步证明它。

首先，令

$$I^{(n)}=n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} I_A(s,\omega)\mathrm{d}s.$$

显然 $I^{(n)}$"在 Ω_0 上致零"。仿照命题1.4的证明我们有

$$\|I^{(n)}-I_A\|_p \to 0.$$

其次，由于$\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} EI_A \mathrm{d}s<\infty$ 及 Fubini 定理，积分

$$\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} I_A(s,\omega)\mathrm{d}s$$

按轨道意义存在，因此 $I^{(n)}$可以看成有界连续过程。

最后，我们只须指出：对在 Ω_0 上致零的有界连续过程 Ψ，只要令

$$\Psi^{(n)}=\Psi_0 I_{\{0\}}(t)+\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{\frac{k}{2^n}} I_{\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]}(t),$$

那么 $\Psi^{(n)}$"在 Ω_0 上致零"，$\Psi^{(n)} \in \mathscr{L}_0$，而且$\|\Psi^{(n)}-\Psi\|_p \to 0$。

2°的证明．设 $\Phi \in \mathscr{L}_p^{loc}$。由引理1.6，$\exists(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n \uparrow \infty$，使 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t) \in \mathscr{L}_p$，且$\|\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)-\Phi\|_p^{loc} \to 0$。由1°，$\exists\, \Phi^{(n)} \in \mathscr{L}_0$，使$\|\Phi^{(n)}-\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\|_p<1/n$，因此

$$\|\Phi^{(n)}-\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\|_p^{loc} \leqslant \|\Phi^{(n)}-\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\|_p<1/n.$$

于是$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_p^{loc} \to 0$。此外，在作近似 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)$ 及 $\Phi^{(n)}$ 时，

“在 Ω_0 上致零性”总是可以要求被保持的。

注 $\mathscr{L}_p$ 含有一个子类：

$$\mathscr{L}_{p,\infty}=\left\{\Phi\in\mathscr{L}_p:E\int_0^\infty|\Phi_t|^p dt<\infty\right\}.$$

在范数

$$\|\Phi\|_{p,\infty}=\left(E\int_0^\infty|\Phi_t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

下，$\mathscr{L}_{p,\infty}$ 成为 Banach 空间。特别，当 $p=2$时，还是 Hilbert 空间。对这类“函数”的随机积分将具有更好的性质，即在$[0,\infty]$上的闭 L^p 鞅性(参见 § 1.4)。

§1.3 平方可积鞅与局部平方可积鞅

定义1.9 给定$(\Omega,\mathscr{F},P)$及参考族$(\mathscr{F}_t)$。零初值的右连左极$(\mathscr{F}_t)$鞅 $X=(X_t)_{t\geq0}$，称为$(\mathscr{F}_t)$平方可积鞅，如果对$\forall t\geq0$均有 $EX_t^2<\infty$。称为$(\mathscr{F}_t)$一致平方可积鞅，如果

$$\sup_{t\geq0} EX_t^2<\infty$$

(由附录定理 4，它等价于$(X_t)_{0\leq t\leq\infty}$为$(\mathscr{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$平方可积鞅，且 $EX_\infty^2<\infty$)。

$(\mathscr{F}_t)$平方可积鞅的全体记成 $\mathscr{M}_2(\mathscr{F}_t)$，记其中连续过程全体为 $\mathscr{M}_2^c(\mathscr{F}_t)$。$(\mathscr{F}_t)$一致平方可积鞅的全体记成$\mathfrak{M}_2(\mathscr{F}_t)$。在不会引起混淆时，我们常常把$(\mathscr{F}_t)$省去，简记成$\mathscr{M}_2,\mathscr{M}_2^c,\mathfrak{M}_2$。此外本书中的鞅均指它是右连续有左极限的。

如果$X,Y\in\mathscr{M}_2$,且 $P(\forall t,X_t=Y_t)=1$，则我们记 $X\doteq Y$。并且在本书中不再对此X,Y加以区分。

注 很多书与文献中(例如 Strasbourg 学派)的平方可积鞅乃是这里的一致平方可积鞅。

引理1.7 对$X\in\mathscr{M}_2$定义

$$\|X\|_{\mathscr{M}_2,T}^2 = EX_T^2,$$

$$\|X\|_{\mathscr{M}_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X\|_{\mathscr{M}_2,n} \wedge 1}{2^n}.$$

那么$\mathscr{M}_2$在准范数$\|\cdot\|_{\mathscr{M}_2}$下成为Frechet空间，而且$\mathscr{M}_2^c$是它的一个闭子空间。又$\mathfrak{M}_2$在范数

$$\|X\|_{\mathfrak{M}_2}^2 = EX_\infty^2$$

下成为Hilbert空间，并且在$\mathfrak{M}_2$上$\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_2}$强于$\|\cdot\|_{\mathscr{M}_2}$。

证明 首先注意，由$\|X-Y\|_{\mathscr{M}_2}=0$可推出$X \equiv Y$。事实上前者蕴含：对$\forall n, X_n = Y_n$(a.e.d$P$)。再由鞅性得到$X_t = Y$($t \leqslant n$)(a.e.d$P$)。但是$X, Y$右连续，所以$X \equiv Y$。

我们只需验证$\mathscr{M}_2$的完备性，而引理的其他部分是显然的。设$\|X^{(n)} - X^{(m)}\|_{\mathscr{M}_2} \to 0(n, m \to \infty)$。由鞅$X^{(n)} - X^{(m)}$的Doob不等式

$$P(\sup_{[0,T]} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\|X^{(n)} - X^{(m)}\|_{\mathscr{M}_2,T}^2}{\lambda^2}$$

推出，对$\forall T$

$$\sup_{[0,T]} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \xrightarrow{P} 0.$$

这说明在一切随机变量所组成的空间S中，对$t \leqslant T$一致地距离$\rho(X_t^{(n)}, X_t^{(m)}) \to 0(n, m \to \infty)$。由$S$的完备性存在$X_t \in S$，使对$t \leqslant T$一致地有$\rho(X_t^{(n)}, X_t) \to 0(n \to \infty)$。即对$t \leqslant T$一致地$T_t^{(n)} \xrightarrow{P} X_t$。于是存在一个子列(不妨设就是它自己：$X^{(n)}$)a.e.d$P$地对$t$($t \leqslant T$)一致收敛到$X_t$。所以$X_t$是右连(续)左极(限)($\mathscr{F}_t$)适应过程。

另一方面，我们有$E|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|^2 \to 0(n, m \to \infty)$。由$L_2$完备性我们得到$E|X_t^{(n)} - X_t|^2 \to 0(n \to \infty)$。于是由$X^{(n)}$的($\mathscr{F}_t$)鞅性立刻推出$X$是($\mathscr{F}_t$)鞅且平方可积。因此$X \in \mathscr{M}_2$.

而且$\|X^{(n)}-X\|_{\mathcal{M}_2,T}\to 0(\forall T>0)$。从而有$\|X^{(n)}-X\|_{\mathcal{M}_2}\to 0$ $(n\to\infty)$。这就证明了$\mathcal{M}_2$的完备性。

易见，若$X^{(m)}\in\mathcal{M}_2^c$，则$X\in\mathcal{M}_2^c$。

定义1.10 给定$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$。右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程$X$称为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅，如果存在$(\mathscr{F}_t)$停时列$\sigma_n\uparrow\infty$，使$X^{\sigma_n}(=((X^{\sigma_n})_t)_{t\geqslant 0}=(X_{t\wedge\sigma_n})_{t\geqslant 0})$均是$(\mathscr{F}_t)$鞅。又如果对$\forall n$均有$X^{\sigma_n}\in\mathcal{M}_2$，则称$X$为$(\mathscr{F}_t)$局部平方可积鞅。

因为在研究随机微分方程时需要考虑不同的初值$X_0(\in\mathscr{F}_0)$，所以一般也可把一个局部鞅加上一个σ可积(参见定义2.12)$\mathscr{F}_0$随机变量称为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅。

记

$\mathcal{M}_2^{loc}(\mathscr{F}_t)$ = 全体零初值的$(\mathscr{F}_t)$局部平方可积鞅，

$\mathcal{M}_2^{c,loc}(\mathscr{F}_t)=\mathcal{M}_2^{loc}(\mathscr{F}_t)$中全体连续过程；

$\mathcal{M}^{loc}(\mathscr{F}_t)$ = 全体零初值的$(\mathscr{F}_t)$局部鞅；

$\mathcal{M}^{c,loc}(\mathscr{F}_t)=\mathcal{M}^{loc}(\mathscr{F}_t)$中全体连续过程。

一般也常简记为$\mathcal{M}_2^{loc},\mathcal{M}_2^{c,loc},\mathcal{M}^{loc},\mathcal{M}^{c,loc}$。

显见$\mathcal{M}^{c,loc}=\mathcal{M}_2^{c,loc}$。

与Brown运动类似地，我们有(当$(\mathscr{F}_t)$并不完备时)

X是$(\mathscr{F}_t)$鞅，当且仅当X是$(\overline{\mathscr{F}}_t$鞅)；

$X\in\mathcal{M}_2(\mathscr{F}_t)$，当且仅当$X\in\mathcal{M}_2(\overline{\mathscr{F}}_t)$；

$X\in\mathcal{M}_2^{loc}(\mathscr{F}_t)$，当且仅当$X\in\mathcal{M}_2^{loc}(\overline{\mathscr{F}}_t)$。

引理1.8 X是$(\mathscr{F}_t)$局部鞅，当且仅当存在有界$(\mathscr{F}_t)$停时列$\tau_n\uparrow\infty$，使$X^{\tau_n}((X^{\tau_n})_t=X_{t\wedge\tau_n})$为$(\mathscr{F}_t)$一致可积鞅。

$X\in\mathcal{M}_2^{loc}$，当且仅当$\exists$有界$(\mathscr{F}_t)$停时列$\tau_n\uparrow\infty$，使$X^{\tau_n}\in\mathfrak{M}^2(\forall n)$。

证明 只须证明必要性。设σ_n的含义如定义1.10。令$\tau_n=\sigma_n\wedge n$。它是有界$(\mathscr{F}_t)$停时列。对$(\mathscr{F}_t)$鞅$X_{t\wedge\sigma_n}$用Doob停止定理：对$s<t$，

$$E(X_{(t\wedge\sigma_n)\wedge n}|\mathscr{F}_s)=X_{[(t\wedge\sigma_n)\wedge n]\wedge s}.$$

也就是

$$E(X_{t\wedge\tau_n}|\mathscr{F}_s)=X_{s\wedge\tau_n}.$$

因此 $X_{t\wedge\tau_n}$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅。它是闭鞅，所以是一致可积鞅。第二个结论证法完全类似。

引理1.9 对 $X\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$ 定义：

$$\|X\|^2_{\mathscr{M}_{2,T}^{\mathrm{loc}}}=E[(\sup_{[0,T]}X_s^2)\wedge 1],$$

$$\|X\|_{\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|X\|_{\mathscr{M}_{2,n}^{\mathrm{loc}}}}{2^n}.$$

那么 $\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$ 在平移不变距离$\|X-Y\|_{\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}}$下成为线性距离空间。而且$\|x^{(n)}\|_{\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}}\to 0$，当且仅当对 $t\leqslant T$ 一致地有$X^{(n)}\xrightarrow{p}0\ (n\to\infty)$.

证明 易证

$$\|X-Y\|_{\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}}=0,\ 当且仅当\ X\cong Y,$$

并且$\|X-Y\|_{\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}}$是一个距离。而$\|X^{(m)}\|_{\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}}\to 0$，当且仅当对$\forall n, E[(\sup_{[0,n]}(X_s^{(m)})^2)\wedge 1]\xrightarrow{(m\to\infty)}0$。这等价于：对$\forall n$,

$$\sup_{s\in[0,n]}(X_s^{(m)})^2\xrightarrow{p}0.$$

此即 $X_t^{(m)}\xrightarrow{p}0(m\to\infty)$对 $t\leqslant n$ 一致成立。

从§1.4开始，如不特别声明，参考系$(\mathscr{F}_t)$均指完备的。

§1.4 对$(\mathscr{F}_t)$Brown运动的Ito积分

设$d=1$，$B=(B_t)_{t\geqslant 0}$是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上的$(\mathscr{F}_t)$Brown运动。

（一） $\mathscr{L}_0$函数的Ito积分

设$\Phi\in\mathscr{L}_0$，其具体形式为

$$\Phi_t \equiv \Phi(t,\omega) = f_0(\omega) I_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\omega) I_{(t_k, t_{k+1}]}(t)$$

$(0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \uparrow \infty)$。我们定义$\Phi$对$B$的Ito积分：

$$\int_0^t \Phi_u \mathrm{d}B_u \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\omega)(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k}). \qquad (1.13)$$

类似地定义$\int_s^t \Phi_u \mathrm{d}B_u \left(\int_0^t \Phi_u \mathrm{d}B_u - \int_0^s \Phi_u \mathrm{d}B_u\right)$（注意，因$t_n \uparrow \infty$，所以右边和式实际只有有限项）。

易见由这样定义的积分并不依赖于Φ的表达方式，有时我们简写$\int_0^t \Phi_u \mathrm{d}B_u$为$\int_0^t \Phi \mathrm{d}B$。

$\mathscr{L}_0$函数的Ito积分具有以下性质($s \leqslant t$)：

(I_1^0) 强线性

$$\int_s^t (\Phi + \Psi) \mathrm{d}B = \int_s^t \Phi \mathrm{d}B + \int_s^t \Psi \mathrm{d}B.$$

$$\int_s^t \eta \Phi_u \mathrm{d}B_u = \eta \int_s^t \Phi \mathrm{d}B \quad (\forall \eta \in \mathscr{F}_s). \qquad (1.14)$$

(I_2^0) $\int_0^t \Phi \mathrm{d}B \in \mathscr{M}_2^c$，而且$\left\|\int_0^t \Phi \mathrm{d}B\right\|_{\mathscr{M}_2} = \|\Phi\|_2$. (1.15)

(I_2^0) $\left(\int_0^t \Phi \mathrm{d}B\right)^2 - \int_0^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u$是连续鞅，或等价地

$$E\left[\left(\int_s^t \Phi \mathrm{d}B\right)^2 \middle| \mathscr{F}_s\right] = E\left(\int_s^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u \middle| \mathscr{F}_s\right). \qquad (1.16)$$

同时对于$(\mathscr{F}_t)$停时σ, τ，只要$\tau \leqslant \sigma$ (a.e. $\mathrm{d}P$)，就有

$$E\left(\int_{t\wedge\tau}^{t\wedge\sigma} \Phi \mathrm{d}B \middle| \mathscr{F}_\tau\right) = 0. \qquad (1.17)$$

$$E\left[\left(\int_{t\wedge\sigma}^{t\wedge\sigma} \Phi \mathrm{d}B\right)^2 \middle| \mathscr{F}_\tau\right] = E\left[\int_{t\wedge\tau}^{t\wedge\sigma} \Phi_u^2 \mathrm{d}u \middle| \mathscr{F}_\tau\right]. \qquad (1.18)$$

(I_4^0) 若$B^{(i)}, B^{(j)}$是多维$(\mathscr{F}_t)$Brown运动B的分量，那么

$$E\left(\int_s^t \Phi \mathrm{d}B^{(i)} \int_s^t \Psi \mathrm{d}B^{(j)} \mid \mathscr{F}_s\right) = E\left(\int_s^t \Phi_u \Psi_u \mathrm{du} \mid \mathscr{F}_s\right)\delta_{ij}, \tag{1.19}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$

(I_5^0) 若 $\Phi, \Psi \in \mathscr{L}_0$，且

$$\Omega_0 = \{\omega: \forall t, \Phi(t,\omega) = \Psi(t,\omega)\},$$

则在 Ω_0 上除概率为零的 ω 外恒有

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}B = \int_0^t \Psi \mathrm{d}B \quad (\forall t \geqslant 0). \tag{1.20}$$

以上诸性质的证明：

(I_1^0)显然。

(I_2^0)的证明。当 $s \leqslant t_k$ 时，由(1.13)及 Brown 运动的鞅性质得到

$$\begin{aligned} &E[f_k(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k}) \mid \mathscr{F}_s] \\ &= E[f_k E((B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k}) \mid \mathscr{F}_{t_k}) \mid \mathscr{F}_s] \\ &= f_k(B_{s\wedge t_{k+1}} - B_{s\wedge t_k}) \quad (\text{a.e.d}P); \end{aligned}$$

而当 $s > t_k$时

$$\begin{aligned} &E[f_k(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k}) \mid \mathscr{F}_s] \\ &= f_k(B_{t\wedge s\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge s\wedge t_k}) \\ &= f_k(B_{s\wedge t_{k+1}} - B_{s\wedge t_k}) \quad (\text{a.e.d}P). \end{aligned}$$

对 k 求和就可看出$\int_0^t \Phi \mathrm{d}B$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅。显然它是连续轨道的。另一方面，对 $k < j$

$$E[f_k f_j(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge t_j})]$$
$$= E(f_k f_j(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})$$
$$\times E[(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge t_j}) | \mathscr{F}_{t_j}]) = 0.$$

同时

$$Ef_k^2(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})^2$$
$$= E(f_k^2 E[(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})^2 | \mathscr{F}_{t_k}])$$
$$= Ef_k^2(t\wedge t_{k+1} - t\wedge t_k).$$

由此可算得$\left\|\int_0^t \Phi\,\mathrm{d}B\right\|_{\mathscr{M}_2,T} = \|\Phi\|_{2,T}$。从而得到$(\mathrm{I}_2^0)$。

(I_3^0)的证明．对$\forall \Lambda\in\mathscr{F}_s$，与$(\mathrm{I}_2^0)$类似地可证

$$E\left[I_\Lambda\left(\int_s^t \Phi\,\mathrm{d}B\right)^2\right] = E\left(I_\Lambda\int_s^t \Phi_u^2\mathrm{d}u\right).$$

此即(1.16)。再用 Doob 停止定理 的 加强形式(附录定理 9)便得(1.17)及(1.18)。

(I_4^0)的证明与(I_3^0)的证明类似。(I_5^0)显然。

（二） $\mathscr{L}_2$ 函数的 Ito 积分

给定 $\Phi\in\mathscr{L}_2$。由 命 题 1.5 $\exists\,\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使 $\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$，且保持在 Ω 的子集 Ω_0 上的致零 性．用 (1.20)，我们有

$$\left\|\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}B - \int_0^t \Phi^{(m)}\mathrm{d}B\right\|_{\mathscr{M}_2}$$
$$= \|\Phi^{(n)} - \Phi^{(m)}\|_2 \to 0 \quad (n, m\to\infty).$$

因为 μ_2^c 是 μ_2 的闭子空 间，所 以 存 在 $\mathscr{M}_2^c$ 的 元 素 作 为积分列 $\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}B$ 的极限。于是我们可以定义

$$\int_0^t \Phi\,\mathrm{d}B \equiv (\mathscr{M}_2)\lim_{n\to\infty}\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}B \qquad (1.21)$$

（指 $\mathscr{M}_2$ 中的极限）。显见上述积分的"值"与 Φ 的 $\mathscr{L}_0$ 近似列 $\Phi^{(n)}$ 的选取法无关。同时由(1.20)可知，对 $\Phi\in\mathscr{L}_0$ 而言，(1.21)与(1.13)给出相同的积分"值"。

$\mathscr{L}_2$ 函数的 Ito 积分具有下列性质：

对应于(I_1^0)—(I_5^0)，$\mathscr{L}_2$ 函数的 Ito 积分有(I_1)—(I_5)，其行文与相应的(I_1^0)—(I_5^0)的行文完全一样。

(I_6) 对于$(\mathscr{F}_t)$停时 σ，我们有

$$\int_0^{t\wedge\sigma}\Phi\mathrm{d}B=\int_0^t\Phi_u I_{[0,\sigma]}(u)\mathrm{d}B_u. \tag{1.22}$$

（注意：此性质对 $\Phi\in\mathscr{L}_0$ 当然成立，只是此时 $I_{[0,\sigma]}$ 未必属于 $\mathscr{L}_0$，因而此性质不能在给出 $\mathscr{L}_0$ 函数的 Ito 积分的性质时予以证明，只好合并于这里。）

推论 设 σ 为$(\mathscr{F}_t)$停时。又若 $\Phi\in\mathscr{L}_2$ 且在 Ω_0 上有

$$\Phi(t,\omega)=0\quad(t\leqslant\sigma(\omega)),$$

那么

$$\int_0^t\Phi\mathrm{d}B=0\quad(\omega\in\Omega_0,t\leqslant\sigma(\omega)).$$

注 由于(I_6)的启示，对有界$(\mathscr{F}_t)$停时 σ（设 $\sigma\leqslant T$）及 τ（假设 $\tau\leqslant\sigma$），即使Ψ不是$(\mathscr{F}_t)$适应过程，但是只要 $\Psi I_{[\tau,\sigma]}(t)$（是适应的）$\in\mathscr{L}_2$，我们仍可定义积分$\int_\tau^\sigma\Psi\mathrm{d}B$为

$$\int_\tau^\sigma\Psi\mathrm{d}B\equiv\int_0^T\Psi_u I_{[\tau,\sigma]}(u)\mathrm{d}B_u.$$

对此积分仍有

$$E\left(\int_\tau^\sigma\Psi\mathrm{d}B\,\middle|\,\mathscr{F}_\tau\right)=0,$$

$$E\left(\int_\tau^\sigma\Psi^{(1)}\mathrm{d}B\int_\tau^\sigma\Psi^{(2)}\mathrm{d}B\,\middle|\,\mathscr{F}_\tau\right)=E\left(\int_\tau^\sigma\Psi_u^{(1)}\Psi_u^{(2)}\mathrm{d}u\,\middle|\,\mathscr{F}_\tau\right).$$

(I_7)（加强的线性性质）对有界的$\zeta\in\mathscr{F}_\tau$，$\Phi\in\mathscr{L}_2$及有界($\mathscr{F}_t$)停时$\tau\leqslant\sigma(\leqslant T)$，有

$$\left(\int_\tau^\sigma \Phi \mathrm{d}B \equiv \int_0^T \Phi_u I_{(\tau,\sigma]}(u)\mathrm{d}B_u\right),$$

$$\int_\tau^\sigma \zeta\Phi_u \mathrm{d}B_u = \zeta\int_\tau^\sigma \Phi \mathrm{d}B. \tag{1.23}$$

(I_8) $\forall\,\varepsilon,\ \delta>0$，有

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi \mathrm{d}B\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant P\left(\int_0^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u\geqslant\delta\right)+\frac{\delta}{\varepsilon^2}. \tag{1.24}$$

因此，如果$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2^{\mathrm{loc}}\to0$，那么

$$\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi^{(n)}\mathrm{d}B-\int_0^s \Phi \mathrm{d}B\right|\xrightarrow{P}0.$$

这些性质的证明如下：

(I_1)的证明。对$\Phi\in\mathscr{L}_2$，取$\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2\to0$。于是

$$\|\zeta\Phi^{(n)}I_{(s,t]}-\zeta\Phi I_{(s,t]}\|\to0\quad(n\to\infty).$$

由(1.14)推出(I_1)。

(I_2)直接得自(1.21)。

(I_3)的证明。对$\forall\,\Lambda\in\mathscr{F}_s$，我们有

$$E\left(I_\Lambda\left\{E\left[\left(\int_s^t \Phi \mathrm{d}B\right)^2\Big|\mathscr{F}_s\right]-E\left[\int_s^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u\Big|\mathscr{F}_s\right]\right\}\right)$$

$$=E\left(I_\Lambda\left[\left(\int_s^u \Phi \mathrm{d}B\right)^2-\int_s^t \Phi_n^2 \mathrm{d}u\right]\right)\quad(用(\mathrm{I}_1))$$

$$=E\left[\left(\int_s^t I_\Lambda\Phi \mathrm{d}B\right)^2-\int_s^t (I_\Lambda\Phi_u)^2 \mathrm{d}u\right]=0\quad(用(\mathrm{I}_2)).$$

(I_4)的证明与(I_3)类似。(I_5)由命题1.5保证。

(I_6)的证明。先设$\Phi\in\mathscr{L}_0$。这时$\Phi I_{[0,\sigma]}(t)\in\mathscr{L}_2$。设梯形过程$\Phi$的分点集为$\{t_k\}$。令

$$\{s_j^{(n)}\}_{0\leqslant j<\infty}=\{t_k\}_{k\geqslant 0}\bigcup\left\{\frac{k}{2^n}\right\}_{k\geqslant 0}$$

并按大小排列。于是Φ可表为

$$\Phi=\sum_j f_j^{(n)}(\omega)I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(t)+f_0^{(n)}(\omega)I_{\{0\}}(t).$$

记

$$\sigma^{(n)}=\sum_j s_{j+1}^{(n)}I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(\sigma)\quad(\sigma\text{ 的“右”近似}).$$

我们有

$$\{\sigma^{(n)}\leqslant t\}=\bigcup_{s_{j+1}^{(n)}\leqslant t}\{\sigma\leqslant s_{j+1}^{(n)}\}\in\mathscr{F}_t.$$

所以$\sigma^{(n)}$是$(\mathscr{F}_t)$停时，而且$\sigma^{(n)}\downarrow\sigma$。

我们注意当$s_j^{(n)}<t\leqslant s_{j+1}^{(n)}$时，$\{t\leqslant\sigma^{(n)}\}=\{s_j^{(n)}<\sigma\}$。所以

$$\begin{aligned}\Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}(t)&=\Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}(t)\Big[I_{\{0\}}(t)+\sum_j I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(t)\Big]\\&=\Phi I_{\{0\}}(t)+\Phi\sum_j I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(t)\,I_{(s_j^{(n)},\infty)}(\sigma)\\&=f_0^{(n)}I_{\{0\}}(t)+\sum_j\big(f_j^{(n)}I_{(s_j^{(n)},\infty)}(\sigma)\big)\,I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(t)\\&\in\mathscr{L}_0.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_0^t\Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}\,\mathrm{d}B\\&\quad=\sum_j f_j^{(n)}I_{(s_j^{(n)},\infty)}(\sigma)\big(B_{t\wedge s_{j+1}^{(n)}}-B_{t\wedge s_j^{(n)}}\big).\end{aligned}$$

但是在$\{\sigma>s_j^{(n)}\}$上我们有$\{\sigma^{(n)}\geqslant s_{j+1}^{(n)}\}$，所以

$$\int_0^t \Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}\mathrm{d}B$$

$$= \sum_j f_j^{(n)} I_{\sigma > s_j^{(n)}}(B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge s_{j+1}^{(n)}} - B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge s_j^{(n)}}).$$

右边括号中的项当且仅当 $t\wedge\sigma^{(n)} > s_j^{(n)}$ 时可能非 0，此时$\sigma^{(n)} > s_j^{(n)}$。因而 $\sigma^{(n)} \geqslant s_{j+1}^{(n)}$。于是 $\sigma > s_j^{(n)}$。这样我们有

$$\int_0^t \Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}\mathrm{d}B$$

$$= \sum_j f_j^{(n)}(B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge s_{j+1}^{(n)}} - B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge s_j^{(n)}})$$

$$= \int_0^{t\wedge\sigma^{(n)}} \Phi \mathrm{d}B$$

$$= \sum_k \Phi_{t_k}(B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge t_k})$$

$$\to \sum_k \Phi_{t_k}(B_{t\wedge\sigma\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge\sigma\wedge t_k})$$

$$= \int_0^{t\wedge\sigma} \Phi \mathrm{d}B. \tag{1.25}$$

另一方面，对 $\forall T>0$，我们由控制收敛定理可得

$$\|\Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}(t) - \Phi I_{[0,\sigma]}(t)\|_{2,T}^2$$

$$= E\left(\int_0^T \Phi_t^2 I_{[\sigma,\sigma^{(n)}]}(t)\mathrm{d}t\right) \to 0 \quad (n\to\infty).$$

因此

$$\int_0^t \Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}\mathrm{d}B \xrightarrow{\mathscr{M}_2} \int_0^t \Phi I_{[0,\sigma]}\mathrm{d}B \quad (n\to\infty).$$

把它与(1.25)比较便得 $\mathscr{L}_0$ 过程的(I_6)。

现在考虑一般的 $\Phi\in\mathscr{L}_2$。取 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使 $\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2\to 0$。于是

$$\|\Phi^{(n)}I_{[0,\sigma]}-\Phi I_{[0,\sigma]}\|_2\to 0,$$

而且对 $s\leqslant t$ 一致地有

$$\int_0^s \Phi^{(n)}\mathrm{d}B \xrightarrow{p} \int_0^s \Phi \mathrm{d}B.$$

因此可取一个子列(不妨设就是它自己)对 $s\leqslant t$ 一致地 a.e.dP 收敛。因此除了某个零测集 $\Lambda_0\in\mathscr{F}$ 外，在 $0\leqslant s\leqslant t$ 恒有

$$\int_0^s \Phi^{(n)}\mathrm{d}B\to\int_0^s \Phi\mathrm{d}B \quad (\omega\overline{\in}\Lambda_0).$$

于是

$$\int_0^{t\wedge\sigma} \Phi^{(n)}\mathrm{d}B\to\int_0^{t\wedge\sigma} \Phi\mathrm{d}B \quad (\omega\overline{\in}\Lambda_0).$$

但是 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，因此对 $\Phi^{(n)}$ 而言(I_6)成立。这样上式

$$左=\int_0^t \Phi^{(n)}I_{[0,\sigma]}\mathrm{d}B\to\int_0^t \Phi I_{[0,\sigma]}\mathrm{d}B.$$

因此对 Φ，(I_6)也成立。

推论的证明 我们有 $\Phi_t I_{[0,\sigma]}(t)=0(\omega\in\Omega_0)$。利用($\mathrm{I}_6$)及($\mathrm{I}_5$)得：对 $\forall t$

$$\int_0^{t\wedge\sigma}\Phi\mathrm{d}B=\int_0^t \Phi I_{[0,\sigma]}\mathrm{d}B=0 \quad (\omega\in\Omega_0).$$

(I_7)的证明。由于($\mathscr{F}_t$)右连续，所以 $\zeta I_{\tau<t\leqslant\sigma}$ 是($\mathscr{F}_t$)适应过程。因此 $\zeta I_{(\tau,\sigma]}\Phi\in\mathscr{L}_2$。从而 $\int_\tau^\sigma \zeta\Phi\mathrm{d}B$ 存在。我们有

$$E\left(\int_\tau^\sigma\zeta\Phi\mathrm{d}B-\zeta\int_\tau^\sigma\Phi\mathrm{d}B\right)^2$$

$$=E\int_\tau^\sigma\zeta^2\Phi_u^2\mathrm{d}u+E\zeta^2\left(\int_\tau^\sigma\Phi\mathrm{d}B\right)^2$$

$$-2E\left(\zeta\int_\tau^\sigma\zeta\Phi\,\mathrm{d}B\int_\tau^\sigma\Phi\mathrm{d}B\right)$$

$$= E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2 du + E\left(\zeta^2 E\left[\left(\int_\tau^\sigma \Phi dB\right)^2 \middle| \mathscr{F}_\tau\right]\right)$$

$$-2E\left(\zeta E\left[\left(\int_\tau^\sigma \zeta\Phi dB\int_\tau^\sigma \Phi dB\right) \middle| \mathscr{F}_\tau\right]\right)$$

$$= E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2 du + E\left(\zeta^2 E\left[\int_\tau^\sigma \Phi_u^2\, du \middle| \mathscr{F}_\tau\right]\right)$$

$$-2E\left(\zeta E\left[\int_\tau^\sigma \zeta\Phi_u^2\, du \middle| \mathscr{F}_\tau\right]\right)$$

$$= E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2 du + E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2 du$$

$$-2E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2 du = 0.$$

最后我们证明(I_8)：取

$$\Phi_s^{(\delta)} = \Phi_s I_{\left\{s:\ \int_0^s \Phi_u^2 du < \delta\right\}} \in \mathscr{L}_2.$$

应用 Doob 不等式，我们得到

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi dB\right| \geqslant \varepsilon\right)$$

$$\leqslant P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s (\Phi - \Phi^{(\delta)})\, dB\right| > 0\right)$$

$$+ P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi^{(\delta)} dB\right| \geqslant \varepsilon\right)$$

$$\leqslant P\left(\int_0^t \Phi_u^2 du \geqslant \delta\right) + \frac{E\left(\int_0^t \Phi^{(\delta)} dB\right)^2}{\varepsilon^2}.$$

$$= P\left(\int_0^t \Phi_u^2 du \geqslant \delta\right) + \frac{E\int_0^t (\Phi_u^{(\delta)})^2 du}{\varepsilon^2}$$

$$\leqslant P\left(\int_0^t \Phi_u^2 du \geqslant \delta\right) + \frac{\delta}{\varepsilon^2}.$$

（三） $\mathscr{L}_2^{loc}$函数的 Ito 积分

若 $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}$，由引理 1.6 存在$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n \uparrow \infty$，使 $\Phi^{(n)} \equiv \Phi I_{[0,\tau_n]}(t) \in \mathscr{L}_2$，而且$\|\Phi^{(n)} - \Phi\|_2^{loc} \to 0 (n \to \infty)$。显然对 $m<n$ 有

$$\Phi^{(m)} = \Phi^{(n)} I_{[0,\tau_m]}(t).$$

按$\mathscr{L}_2$函数的 Ito 积分的定义及(I_8)我们有

$$\int_0^t \Phi^{(m)} dB = \int_0^t \Phi^{(n)} I_{[0,\tau_m]} dB = \int_0^{t\wedge\tau_m} \Phi^{(n)} dB.$$

因此我们可定义

$$\int_0^t \Phi dB = \sum_{k=1}^{\infty} I_{(\tau_{k-1},\tau_k]}(t) \int_0^t \Phi^{(k)} dB \quad (\tau_0 = 0)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\tau_{k-1}\wedge t}^{\tau_k \wedge t} \Phi^{(k)} dB. \tag{1.26}$$

由这定义直接推出

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} \Phi dB = \int_0^{t\wedge\tau_n} \Phi^{(n)} dB. \tag{1.27}$$

因而$\left(\int_0^t \Phi dB\right)_{t\geq 0} \in \mathscr{M}_2^{c,loc}$。特别地，当 $\Phi \in \mathscr{L}_2$时，按(1.21)与按(1.26)定义的两个积分是一致的。此外，定义(1.26)所规定的积分也不依赖$(\mathscr{F}_t)$停时列$\{\tau_n\}$的选取。

$\mathscr{L}_2^{loc}$函数的 Ito 积分是 $\mathscr{L}_0,\mathscr{L}_2$ 函数的 Ito 积分的推广。我们把这积分的性质归纳为下列定理：

定理1.1 对 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$，我们有

1° $\left(\int_0^t \Phi \mathrm{d}B\right)_{t\geqslant 0}\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$，且 $\left\|\int_0 \Phi \mathrm{d}B\right\|_{\mathscr{M}_2^{loc}}=\|\Phi\|_2^{loc}$；

2° 对 $\forall(\mathscr{F}_t)$ 停时 σ，有

$$\int_0^{t\wedge\sigma}\Phi \mathrm{d}B=\int_0^t \Phi_u I_{[0,\sigma]}(u)\mathrm{d}B_u;$$

3° 若 $\Phi=0(\omega\in\Omega_0,\ t\leqslant\sigma(\omega),\sigma$ 为$(\mathscr{F}_t)$停时)，则

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}B=0(\omega\in\Omega_0,t\leqslant\sigma(\omega));$$

4° 对 $\forall\varepsilon,\delta>0$，有

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi \mathrm{d}B\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant P\left(\int_0^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u\geqslant\delta\right)+\frac{\delta}{\varepsilon^2}.$$

因此，如果 $\Phi^{(n)},\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$，且$\int_0^t|\Phi_u^{(n)}-\Phi_u|^2\mathrm{d}u\xrightarrow{P}0$(即$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{2,t}^{loc}\to 0$)，那么

$$\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi^{(n)}\mathrm{d}B-\int_0^s \Phi \mathrm{d}B\right|\xrightarrow{P}0$$

(由 $\mathscr{L}_2^{loc}\subset\overline{\mathscr{L}_0}$。对于 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$，还可以选取 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使上面的极限式成立)。

对于 $\Phi,\Psi\in\mathscr{L}_2$，还进一步有

1°° $\left(\int_0^t \Phi \mathrm{d}B\right)_{t\geqslant 0}\in\mathscr{M}_2^c$，$\left\|\int_0 \Phi \mathrm{d}B\right\|_{\mathscr{M}_2}=\|\Phi\|_2$；

2°° 对 $\forall(\mathscr{F}_t)$停时 $\tau\leqslant\sigma$，有

$$E\left(\int_{\tau\wedge t}^{\sigma\wedge t}\Phi \mathrm{d}B\,|\,\mathscr{F}_\tau\right)=0,$$

$$E\left[\left(\int_{\tau\wedge t}^{\sigma\wedge t}\Phi \mathrm{d}B\int_{\tau\wedge t}^{\sigma\wedge t}\Psi \mathrm{d}B-\int_{\tau\wedge t}^{\sigma\wedge t}\Phi_u\Psi_u \mathrm{d}u\right)\Big|\mathscr{F}_\tau\right]=0;$$

3°° 如果 $\tau\leqslant\sigma$ 还都是有界$(\mathscr{F}_t)$停时，那么对任意

$$\Phi I_{(\tau,\sigma]}(t),\ \Psi I_{(\tau,\sigma]}(t)\in\mathscr{L}_2$$

$(\Phi,\Psi$ 可不必 $(\mathscr{F}_t)$ 适应，只要 $\Phi I_{[\tau,\sigma]},\Psi I_{(\tau,\sigma]}(\mathscr{F}_t)$ 适应) 积分 $\int_\tau^\sigma\Phi \mathrm{d}B$，$\int_\tau^\sigma\Psi \mathrm{d}B$ 存在，而且

$$E\left(\int_\tau^\sigma\Phi \mathrm{d}B\Big|\mathscr{F}_\tau\right)=0,$$

$$E\left[\left(\int_\tau^\sigma\Phi \mathrm{d}B\int_\tau^\sigma\Psi \mathrm{d}B-\int_\tau^\sigma\Phi_u\Psi_u \mathrm{d}u\right)\Big|\mathscr{F}_\tau\right]=0.$$

证明 关于 $\Phi\in\mathscr{L}_2$ 的部分在前面已证明了. 关于$\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$的部分,前面关于 $\mathscr{L}_2$ 函数积分的相应结论的证明仍适用.

定理1.2(加强线性关系) 若$\Phi,\Psi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$，$\zeta_1,\zeta_2$有界$\in\mathscr{F}_\tau$，$(\mathscr{F}_t)$停时 $\tau\leqslant\sigma$ 均为有界,则

$$\int_\tau^\sigma(\zeta_1\Phi+\zeta_2\Psi)\mathrm{d}B=\zeta_1\int_\tau^\sigma\Phi \mathrm{d}B+\zeta_2\int_\tau^\sigma\Psi \mathrm{d}B.$$

证明 取 $\Phi^{(n)},\Psi^{(n)}\in\mathscr{L}_2$，使

$$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2^{\mathrm{loc}},\ \|\Psi^{(n)}-\Psi\|_2^{\mathrm{loc}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

于是有$\|\zeta_1\Phi^{(n)}-\zeta_1\Phi\|_2^{\mathrm{loc}},\|\zeta_2\Psi^{(n)}-\zeta_2\Psi\|_2^{\mathrm{loc}}\to 0$. 对于 $\Phi^{(n)},\Psi^{(n)}$由(1.36)可知定理成立. 令$n\to\infty$便得定理.

§1.5 Ito 积分的例子

例 1 设

$$\mathscr{L}_0^*=\Big\{\Phi:\ \Phi=f_0(\omega)I_{\{0\}}(t)+\sum_0^{\cdots}f_k(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t),t_k\uparrow\infty,f_k\in\mathscr{F}_{t_k}\Big\}.$$

如果 $\Phi\in\mathscr{L}_0^*\cap\mathscr{L}_2^{loc}$，则仍有

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}B=\sum_0^\infty f_k(B_{t\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge t_k}).$$

证明 由于

$$\sum_0^\infty f_k^2(\omega)(t_{k+1}\wedge t-t_k\wedge t)=\int_0^t \Phi_u^2\mathrm{d}u<\infty,$$

我们有

$$P(I_{|f_k|\geq n}(\omega)>\varepsilon)=P(|f_k|\geq n)\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以

$$f_k I_{|f_k|>n}(B_{t_{k+1}\wedge t}-B_{t_k\wedge t})\xrightarrow{p}0\quad(n\to\infty),$$

$$f_k I_{|f_k|>n}(t_{k+1}\wedge t-t_k\wedge t)\xrightarrow{p}0.$$

令

$$\Phi^{(n)}=f_0(\omega)I_{\{0\}}(t)+\sum_k f_k(\omega)I_{|f_k|<n}I_{(t_k,t_{k+1}]}(t).$$

那么

$$\int_0^t|\Phi_u^{(n)}-\Phi_u|^2\mathrm{d}u$$

$$=\sum_0^\infty f_k^2 I_{|f_k|\geq n}(t_{k+1}\wedge t-t_k\wedge t)\ (\text{有限和})\xrightarrow{p}0.$$

所以 $\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2^{loc}\to 0\ (n\to\infty)$。于是由定理 1.1 的 4° 得到

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}B=(p)\lim_{n\to\infty}\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}B$$

$$=(p)\lim_{n\to\infty}\sum_0^\infty f_k I_{|f_k|<n}(B_{t_{k+1}\wedge t}-B_{t_k\wedge t})$$

$$=\sum_0^\infty f_k(B_{t_{k+1}\wedge t}-B_{t_k\wedge t})\quad(\text{有限和}).$$

例2 若 Φ 是 $[s,T]$ 上连续轨道的 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程，又设 s

$=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{l_n}^{(n)}=T$，$\lambda_n=\max_t(t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)})\to 0\ (n\to\infty)$。那么

$$\int_s^T \Phi \mathrm{d}B=(p)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_k \Phi_{t_k^{(n)}}(B_{t_{k+1}^{(n)}}-B_{t_k^{(n)}})\quad(\text{Riemann 和})。$$

事实上，令

$$\Phi^{(n)}=\sum_k \Phi_{t_k^{(n)}} I_{(t_k^{(n)},\,t_{k+1}^{(n)}]}(t),$$

则我们有$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2^{\mathrm{loc}}\to 0$，而

$$\int_s^T \Phi^{(n)}\mathrm{d}B=\sum_k \Phi_{t_k^{(n)}}(B_{t_{k+1}^{(n)}}-B_{t_k^{(n)}}),$$

从而得到我们的公式。

如果还加上Φ在$[s,T]$上样本的有界变差性，那么对这 Riemann 和重新集项后，得到右方按轨道几乎处处有极限

$$[\Phi_u B_u]_s^T-\int_s^T B_u \mathrm{d}\Phi_u\quad(\text{按轨道积分})。$$

因此得到

$$\int_s^T \Phi \mathrm{d}B=[\Phi_u B_u]_s^T-\int_s^T B\mathrm{d}\Phi。$$

此外，这里的分割$\{t_k^{(n)}\}$还可取成$(\mathscr{F}_t)$停时分割：

$s=\sigma_0^{(n)}<\cdots<\sigma_{n_l}^{(n)}=T$（一切$\sigma_k^{(n)}$为$(\mathscr{F}_t)$停时）。

例3 若Φ是在$[s,T]$上均方连续的$(\mathscr{F}_t)$适应可测过程，那么

$$\int_s^T \Phi \mathrm{d}B=(L_2)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_k \Phi_{t_k^{(n)}}(B_{t_{k+1}^{(n)}}-B_{t_k^{(n)}})。$$

例4 求$\int_0^t B\mathrm{d}B$。

解 按例3利用引理 1.2 我们有

$$\int_0^t B\mathrm{d}B = (L_2)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_k B_{t_k^{(n)}}(B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}})$$

$$= (L_2)\lim_{\lambda_n\to 0}\frac{1}{2}\sum_k [2B_{t_k^{(n)}}B_{t_{k+1}^{(n)}} - 2B^2_{t_k^{(n)}}]$$

$$= (L_2)\lim_{\lambda_n\to 0}\frac{1}{2}\sum_k [(B^2_{t_{k+1}^{(n)}} - B^2_{t_k^{(n)}})$$

$$- (B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}})^2]$$

$$= \frac{1}{2}(B_t^2 - B_0^2) - \frac{1}{2}t.$$

例5 若 $\kappa(s)$是在$[0,t]$上连续有界变差数值函数，求

$$\int_0^t k(s)B_s\mathrm{d}B_s.$$

解 此时按轨道的Stieltjes积分$\int_0^t \kappa(s)\mathrm{d}B_s^2$存在。对$[0,t]$作为例 2 中的分割，与例 4 类似地得到

$$\int_0^t k(s)B_s\mathrm{d}B_s$$

$$= (L_2)\lim_{\lambda_n\to 0}\frac{1}{2}\sum_k k_{(t_k^{(n)})}[(B^2_{t_{k+1}^{(n)}} - B^2_{t_k^{(n)}})$$

$$- (B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}})^2]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t k(s)\mathrm{d}B_s^2 - \frac{1}{2}\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_k k(t_k^{(n)})(\Delta B_{t_k^{(n)}})^2.$$

但是

$$E = \left|\sum_k k(t_k^{(n)})(\Delta B_{t_k^{(n)}})^2 - \sum_k k(t_k^{(n)})\Delta t_k^{(n)}\right|^2$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant t}(k(s))^2\sum_k E[\Delta B_{t_k^{(n)}})^2 - \Delta t_k^{(n)}]^2$$

$$= \max_{[0,t]} k^2(s) \sum_k [E(\Delta B_{t_k^{(n)}})^4$$

$$- 2E(\Delta B_{t_k^{(n)}})^2 \Delta t_k^{(n)} + (\Delta t_k^{(n)})^2]$$

$$= \max_{[0,t]} k^2(s) \sum_k [3(\Delta t_k^{(n)})^2 - 2(\Delta t_k^{(n)})^2 + (\Delta t_k^{(n)})^2]$$

$$= 2\max_{[0,t]} k^2(s) \sum_k (\Delta t_k^{(n)})^2$$

$$\leqslant 2\lambda_n \max_{[0,t]} k^2(s) \sum_k \Delta t_k^{(n)}$$

$$= 2\lambda_n t \max_{[0,t]} k^2(s) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

所以

$$\int_0^t k(s) B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}\int_0^t k(s) \mathrm{d}B_s^2 - \frac{1}{2}\int_0^t k(s) \mathrm{d}s.$$

注 利用定义直接计算 Ito 积分恰如利用积分定义和极限来计算 Riemann定积分一样不方便。在本章后面的章节中我们将给出复合函数微分的 Ito 公式。正如 Newton–Leibniz 公式可用来有效地计算定积分一样，Ito 公式可以用来计算 Ito 积分。例如：若 $f \in C^1$（一次连续可微），则有

$$\int_0^t f(B_s) \mathrm{d}B_s = F(B_t) - F(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(B_s) \mathrm{d}s,$$

其中 F 是 f 的一个原函数。

§1.6 关于无穷限情形的注记

对 $p \geqslant 1$，令

$$\mathscr{L}_{p,\infty} = \left\{\Phi:\ \Phi \text{ 是}(\mathscr{F}_t)\text{适应可测过程且 } E\int_0^\infty |\Phi_u|^p \mathrm{d}u < \infty\right\},$$

$$\mathscr{L}_{p,\infty}^{\text{loc}}=\Big\{\Phi:\ \Phi\text{是}(\mathscr{F}_t)\text{适应可测过程},$$

$$\int_0^\infty|\Phi_u|^p\mathrm{d}u<\infty,\ \text{a.e.}\ \mathrm{d}P\Big\}.$$

我们定义

$$\|\Phi\|_{\mathscr{L}_{p,\infty}}=\left(E\int_0^\infty|\Phi_u|^p\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\Phi\|_{\mathscr{L}_{p,\infty}^{\text{loc}}}=E\left[\left(\int_0^\infty|\Phi_u|^p\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}}\wedge 1\right].$$

于是$\mathscr{L}_{p,\infty}$在$\|\Phi\|_{\mathscr{L}_{p,\infty}}$下成为Banach空间，$\mathscr{L}_{p,\infty}^{\text{loc}}$在$\|\Phi\|_{\mathscr{L}_{p,\infty}^{\text{loc}}}$下成为有平移不变距离的线性距离空间。而且对$\Phi\in\mathscr{L}_{p,\infty}$有

$$\|\Phi\|_{\mathscr{L}_{p,\infty}^{\text{loc}}}\leqslant\|\Phi\|_{\mathscr{L}_{p,\infty}}.$$

（一） $\mathscr{L}_{2,\infty}$函数的Ito积分

设$\Phi\in\mathscr{L}_{2,\infty}$。我们定义

$$\int_0^\infty\Phi\mathrm{d}B=\lim_{t\to\infty}\int_0^t\Phi\mathrm{d}B\quad(\text{a.e.}\ \mathrm{d}P\ \text{或}\ L^2).\tag{1.28}$$

由于$\Phi\in\mathscr{L}_{2,\infty}$，所以$\left(\int_0^\cdot\Phi\mathrm{d}B\right)$是$(\mathscr{F}_t)$一致平方可积鞅。因而存在a.e.d$P$及$L^2$极限。于是(1.28)的定义是合理的。此时

$$\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}B\right)_{0\leqslant t\leqslant\infty}\text{是}(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant\infty}(\text{闭})\text{鞅},$$

其中$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_t\mathscr{F}_t$。

（二） $\mathscr{L}_{2,\infty}^{\text{loc}}$函数的Ito积分

设$\Phi\in\mathscr{L}_{2,\infty}^{\text{loc}}$。我们定义

$$\int_0^\infty\Phi\mathrm{d}B=(p)\lim_{t\to\infty}\int_0^t\Phi\mathrm{d}B.\tag{1.28$'$}$$

这极限确是存在的。事实上，

$$\int_0^t \Phi_u^2 du \to \int_0^\infty \Phi_u^2 du \quad (a.e.dP),$$

因而也 p 收敛。由定理 1.1 我们得到

$$P\left(\left|\int_{T'}^{T''} \Phi dB\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P\left(\int_{T'}^{T''} \Phi_u^2 du \geqslant \delta\right) + \frac{\delta}{\varepsilon^2}.$$

所以 $\int_0^t \Phi dB$ 当 $t\to\infty$ 时概率收敛。

对一般 $\mathscr{L}_2^{loc}$ 函数的积分，定理 1.1 成立于 $0\leqslant t<\infty$。但是对 $\mathscr{L}_{2,\infty}^{loc}$ 函数的积分，定理 1.1 成立于 $0\leqslant t\leqslant\infty$，即包含了 $t=\infty$ 这一个特殊的"点"。这时，有界停时也可改成任意停时。

这里，只有定理 1.1 中的 2° 及 2°°，3°° 中的

$$\int_0^\sigma \Phi dB \in \mathscr{F}_\sigma$$

需要验证。下面我们验证定理 1.1 中的 2°。由定理 1.1 的 4°，们有

$$\int_0^s \Phi_u I_{[0,t]}(u) dB_u \xrightarrow{t\to\infty} \int_0^s \Phi dB$$

（对 $0\leqslant s\leqslant\infty$ 一致）。因此可取子列 $\{t_n\}$，使上式对 $0\leqslant s\leqslant\infty$ 一致地 a.e.dP 收敛。所以 a.e.dP 地 $\int_0^s \Phi dB$ 连续于 $[0,\infty]$。从而 $\int_0^\sigma \Phi dB$ a.e.dP 有定义而且

$$\begin{aligned}\int_0^\sigma \Phi dB &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\sigma \Phi_u I_{[0,t_n]}(u) dB_u \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^s \Phi I_{[0,t_n]} dB\right]_{s=\sigma} = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{s\wedge t_n} \Phi dB\right]_{s=\sigma} \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sigma\wedge t_n} \Phi dB = \lim_{n\to\infty}\int_0^{t_n} \Phi I_{[0,\sigma]} dB\end{aligned}$$

$$=\int_0^\infty \Phi I_{[0,\sigma]}\mathrm{d}B.$$

由此还可见$\int_0^\sigma \Phi\mathrm{d}B\in\bigvee_n \mathscr{F}_{\sigma\wedge t_n}\subset\mathscr{F}_\sigma$.

特别地，若Φ有界，σ为有限$(\mathscr{F}_t)$停时，那么$\Phi I_{[0,\sigma]}\in\mathscr{L}_{2,\infty}^{loc}$. 因此$\int_0^\sigma \Phi\mathrm{d}B=\int_0^\infty \Phi I_{[0,\sigma]}\mathrm{d}B$.

§1.7 Ito 过程与 Ito 积分的链法则——Ito 公式

（一） Ito 公式

我们有两种随机积分：Ito 积分$\int_0^t \sigma_s\mathrm{d}B_s(\sigma\in\mathscr{L}_2^{loc})$及按轨道积分$\int_0^t b_s\mathrm{d}s(b\in\mathscr{L}_1^{loc})$. 前一种积分得到的是局部平方可积鞅（特别当$\sigma\in\mathscr{L}_2$时，是平方可积鞅），后一种积分得到的是两个$(\mathscr{F}_t)$适应的增过程之差，称为有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程. 特别当$b\in\mathscr{L}_1$时，是两个可积的（即一阶矩有限）$(\mathscr{F}_t)$适应增过程之差，称为可积变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程.

因此，这两种随机积分提供了四种过程的特例. 这些特例有助于搞清随机过程发展的背景.

定义1.11 若B是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上$r$维$(\mathscr{F}_t)$Brown运动，$d$维随机变量$\xi\in\mathscr{F}_s$. 又$\sigma=\sigma_t(\omega)$为$d\times r$矩阵，其分量均属于$\mathscr{L}_2^{loc}$；$b=b_t(\omega)$为$d$维列向量，其分量均属于$\mathscr{L}_1^{loc}$. 我们称$d$维过程$X=(X_t)_{t\geqslant s}$:

$$X_t=\xi+\int_s^t \sigma_u\mathrm{d}B_u+\int_s^t b_u\mathrm{d}u\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P)\qquad(1.29)$$

为$t\geqslant s$上（对B，$(\mathscr{F}_t)$的）Ito 过程，并且简记成

$$\mathscr{I}_{(s,\xi)}(\sigma,b).$$

有时我们也把它写成微分的形式：

$$\begin{cases} dX_t = \sigma_t dB_t + b_t dt, \\ X_t|_{t=s} = \xi. \end{cases} \tag{1.30}$$

Ito 过程类是一族较广的连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程类。它对足够光滑的函数的复合是封闭的。下面的定理 1.3 与定理 1.4 说明了：若 $F(x_1,\cdots,x_n)\in C^2$（二阶连续可微函数类），$X^{(1)},\cdots,X^{(n)}$均是Ito 过程，则 $F(X^{(1)},\cdots,X^{(n)})$也是 Ito 过程；若 $F(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)$满足 $F''_{x_ix_j},F'_{y_k}$ $(1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m)$连续，$X^{(1)},\cdots,X_{(n)}$ 为 Ito 过程，而 $Y^{(1)},\cdots,Y^{(m)}$ 均为绝对连续的$(\mathscr{F}_t)$适应过程（当然有限变差），则$F(X^{(1)},\cdots,X^{(n)},Y^{(1)},\cdots,Y^{(m)})$是 Ito过程。

由于多元情况与简单情况（当 $n=m=1$ 时的情况）的差别仅仅在于用多元 Taylor 展开代替二元 Taylor 展开，并没有本质差别，所以我们不妨只对 $n=m=1$ 来证明下面的定理。同时，我们也不妨假定 $d=r=1$（一般情况类似）。

定义1.12 两个$(\mathscr{F}_t)$适应增过程之差称为有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程。两个可积（存在均值）的$(\mathscr{F}_t)$适应增过程之差称为可积变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程。两个满足 $EG^{(1)}_\infty<\infty$，$EG^{(2)}_\infty<\infty$的$(\mathscr{F}_t)$适应增过程 G_1 与 G_2 之差称为一致可积变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程（有些书上把这种过程叫做可积变差过程，而把前一种归入局部可积变差过程）。

注 如果把增过程理解得略为广一些，允许它在有限的 t 值取 $+\infty$，这样的过程可称为具有爆炸的$(\mathscr{F}_t)$适应增过程。

以下恒设 $d=r=1$。

定理1.3（Ito 公式） 若 $F(x,y)$满足：F''_{xx},F'_y 连续，对于$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B 而言，X 是 $t\geqslant s$ 上 Ito 过程：

$$dX_t = \sigma_t dB_t + b_t dt \xlongequal{\text{简记}} dM_t + dA_t;$$

又 $G=(G_t)_{t\geq 0}$是$[s,\infty)$上连续的有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程，那么

$$dF(X_t,G_t)=F'_x(X_t,G_t)dX_t+\frac{1}{2}F''_{xx}(X_t,G_t)\sigma_t^2dt$$

$$+F'_y(X_t,G_t)dG_t. \tag{1.31}$$

也可以写成积分形式

$$F(X_t,G_t)-F(X_s,G_s)$$

$$=\int_s^t F'_x(X_u,G_u)dX_u+\frac{1}{2}\int_s^t F''_{xx}(X_u,G_u)\ \sigma_u^2du$$

$$+\int_s^t F'_y(X_u,G_u)dG_u. \tag{1.32}$$

证明 设 $G=G^{(1)}-G^{(2)}$，其中 $G^{(i)}(i=1,2)$ 为连续的$(\mathscr{F}_t)$适应增过程。

第一步证明当$\int_s^t\sigma dB,\int_s^t\sigma_u^2du,\int_s^t|b_u|du,G^{(1)},G^{(2)}$均为有界时 Ito 公式成立。这时$|X|,|G|$均为有界。设所有这些项的共同界为$K$。而$|F'_x|,|F''_{xx}|,|F'_y|$在$\{|x|\leqslant 3K,|y|\leqslant 3K\}$上的共同界为$C$。

由二元 Taylor 展开，存在 $\varepsilon(t)$，$\varepsilon(t)\downarrow 0(t\to 0)$(例如先任意取一个满足下面 (1.33),(1.34) 的$\bar{\varepsilon}(t)$，$\bar{\varepsilon}(t)\downarrow 0\ (t\to 0)$，令$\varepsilon(t)=\sup\limits_{[0,t]}\bar{\varepsilon}(s)$即可)，使

$$\left|\left[F(x'',y)-F(x',y)\right]-\left[F'_x(x',y)(x''-x')\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}F''_{xx}(x',y)(x''-x')^2\right]\right|$$

$$\leqslant\varepsilon(|x''-x'|)(x''-x')^2, \tag{1.33}$$

$$\left|\left[F(x,y'')-F(x,y')\right]-\left[F'_y(x,y')(y''-y')\right]\right|$$

$$\leqslant \varepsilon(|y'' - y'|)|y'' - y'|. \tag{1.34}$$

在$[s,t]$上我们构造步长为 h 的随机分割：对 $k \geqslant 1$

$$\tau_0 = s,$$

$$\hat{\tau}_{k+1} = \inf\left\{u: u > \sigma_k, \ [(G_u^{(1)} + G_u^{(2)}) - (G_{\tau_k}^{(1)} + G_{\tau_k}^{(2)})] \vee \left|\int_{\tau_k}^u \sigma \mathrm{d}B\right| \vee \int_{\tau_k}^u |b_s| \mathrm{d}s \vee \left(\int_{\tau_k}^u \sigma_s^2 \mathrm{d}s\right) \geqslant h\right\},$$

$$\tau_{k+1} = \hat{\tau}_{k+1} \wedge (\tau_k + h) \wedge t.$$

易见这些都是 $(\mathscr{F}_t)$ 停时．而且上述分割是有限分割（但个数是随机的）．记(1.32)的左方为 I，那么

$$I = \sum_k ([F(X_{\tau_{k+1}}, G_{\tau_{k+1}}) - F(X_{\tau_{k+1}}, G_{\tau_k})] + [F(X_{\tau_{k+1}}, G_{\tau_k}) - F(X_{\tau_k}, G_{\tau_k})]).$$

再记

$$I_h = \sum_k \left[F_y'(X_{\tau_{k+1}}, G_{\tau_k}) \Delta G_{\tau_k} + F_x'(X_{\tau_k}, G_{\tau_k}) \Delta X_{\tau_k} + \frac{1}{2} F_{xx}''(X_{\tau_k}, G_{\tau_k}) (\Delta X_{\tau_k})^2\right].$$

由(1.33)及(1.34)

$$\begin{aligned}
|I - I_h| &\leqslant \sum_k (\varepsilon(h) |\Delta G_{\tau_k}| + \varepsilon(2h) (\Delta X_{\tau_k})^2) \\
&\leqslant \varepsilon(2h)\left[(G_t^{(1)} + G_t^{(2)}) - (G_s^{(1)} + G_s^{(2)}) + \sum_k (\Delta X_{\tau_k})^2\right] \\
&\leqslant \varepsilon(2h)\left[(G_t^{(1)} + G_t^{(2)}) - (G_s^{(1)} + G_s^{(2)}) + 2\sum_k \left((\Delta M_{\tau_k})^2 + \left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} b_u \mathrm{d}u\right)^2\right)\right],
\end{aligned}$$

其中 $M_t=\int_s^t \sigma \mathrm{d}B$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅。所以

$$E\sum_k (\Delta M_{\tau_k})^2 = EM_t^2.$$

因此 $\varepsilon(h)\sum_k (\Delta M_{\tau_k})^2 \xrightarrow{p} 0\ (h\to 0)$。又

$$\sum_k\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} b_u \mathrm{d}u\right)^2 \leqslant \sum_k K\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |b_u| \mathrm{d}u = K\int_0^t |b_u| \mathrm{d}u,$$

所以$|I_h-I|\xrightarrow{p}0$。这样计算(1.32)左边的项归结为求极限$(p)\lim\limits_{h\to 0} I_h$。显然当 $h\to 0$ 时，I_h 中第一项的和按轨道趋于

$$\int_s^t F_y'(X,G)\mathrm{d}G.$$

利用 $\Delta X_{\tau_k}=\Delta M_{\tau_k}+\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} b_u \mathrm{d}u$，$I_h$ 中第二项的和 相应地分成两项。后一项按轨道趋于$\int_s^t F_x'(X_u,G_u)b_u \mathrm{d}u$，而前一项为

$$\begin{aligned}
&\sum_k F_x'(X_{\tau_k}, G_{\tau_k})\Delta M_{\tau_k} \\
&\quad = \sum_k \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_x'(X_{\tau_k}, G_{\tau_k})\sigma_u \mathrm{d}B_u \quad \text{(用定理1.2)} \\
&\quad = \int_s^t \sum_k F_x'(X_{\tau_k}, G_{\tau_k}) I_{(\tau_k,\tau_{k+1}]}(u)\sigma_u \mathrm{d}B_u \ \text{(有限和!)}.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

但是按控制收敛性

$$\int_s^t \left|\sum_k F_x'(x_{\tau_k}, G_{\tau_k}) I_{(\tau_k,\tau_{k+1}]}(u)\right.$$

$$- F'_x(X_u, G_u) \Big|^2 \sigma_u^2 \mathrm{d}u \to 0 \quad (h \to 0).$$

因此(1.35)有 L_2 极限(从而 p 极限)$\int_s^t F'_x(X, G)\sigma \mathrm{d}B$.

同样，利用

$$(\Delta X_{\tau_k})^2 = (\Delta M_{\tau_k})^2 + 2\Delta M_{\tau_k} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} b_u \mathrm{d}u + \left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} b_u \mathrm{d}u\right)^2,$$

I_h 中第三项的和相应地分成三项。易见后两项当 $h \downarrow 0$ 时趋于0；而最前面的一项为$\left(记\langle M\rangle_t = \int_s^t \sigma_u^2 \mathrm{d}u\right)$

$$\frac{1}{2}\sum_k F''_{xx}(X_{\tau_k}, G_{\tau_k})(\Delta M_{\tau_k})^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k F''_{xx}(X_{\tau_k}, G_{\tau_k})\Delta\langle M\rangle_{\tau_k}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_k F''_{xx}(X_{\tau_k}, G_{\tau_k})[(\Delta M_{\tau_k})^2 - \Delta\langle M\rangle_{\tau_k}]$$

$$\overset{记成}{=\!=\!=} I_1 + I_2,$$

其中 I_1 当 $h \downarrow 0$ 时按轨道地趋于

$$\frac{1}{2}\int_s^t F''_{xx}(X_u, G_u)\mathrm{d}\langle M\rangle_u$$

(因而也 p 收敛)。又由于 $\sum_{k=1}^n (\Delta M_{\tau_k})^2 - \Delta\langle M\rangle_{\tau_k}$ 是 $(\mathscr{F}_{\tau_n})$鞅列，所以 I_2 的加项中交叉乘积的数学期望应为0，由此

$$E(I_2)^2 \leqslant \frac{1}{4}C^2\sum_k E[(\Delta M_{\tau_k})^2 - \Delta\langle M\rangle_{\tau_k}]^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2} C^2 \sum_k E[(\Delta M_{\tau_k})^4 + (\Delta \langle M \rangle_{\tau_k})^2]$$

$$\leqslant \frac{1}{2} C^2 \sum_k E[h^2 (\Delta M_{\tau_k})^2 + h \Delta \langle M \rangle_{\tau_k}]$$

$$= \frac{1}{2} C^2 [h^2 E M_t^2 + h E \langle M \rangle_t] \to 0 \quad (h \downarrow 0).$$

从而$I_2 \xrightarrow{p} 0$ $(h \to 0)$。

综合起来，当$h \to 0$时我们有

$$I_h \xrightarrow{p} \int_s^t F'_y(X_u, G_u) dG_u + \int_s^t F'_x(X_u, G_u) dX_u$$

$$+ \frac{1}{2} \int_s^t F''_{xx}(X_u, G_u) \sigma_u^2 du.$$

这恰是(1.32)等式的右方。第一步得证。

第二步证明在第一步中关于有界性的限制可以取消。

事实上，令$\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \tau_3^{(n)}, \tau_4^{(n)}, \tau_5^{(n)}$分别为

$$\left| \int_s^t \sigma dB \right|, \quad \int_s^t \sigma_u^2 du, \quad \int_s^t |b_u| du,$$

及$G_t^{(1)}, G_t^{(2)}$首次超过n的时刻(规定 $\inf \varnothing = \infty$)。易证它们都是$(\mathscr{F}_t)$停时。令

$$\tau_n = \tau_1^{(n)} \wedge \tau_2^{(n)} \wedge \tau_3^{(n)} \wedge \tau_4^{(n)} \wedge \tau_5^{(n)},$$

它也是$(\mathscr{F}_t)$停时。记

$$G_t^{(i)\tau_n} = G_{t \wedge \tau_n}^{(i)},$$

$$X_t^{(n)} \equiv \xi_n + \int_s^{t \wedge \tau_n} \sigma dB + \int_s^{t \wedge \tau_n} b_u du$$

$$\equiv \xi_n + \int_s^t \sigma_u^{(\tau_n)} dB_u + \int_s^t b_u^{(\tau_n)} du, \qquad (1.36)$$

其中

$$\sigma_t^{(\tau_n)} \equiv \sigma_t I_{[0,\tau_n]}(t), \qquad \xi_n = \xi I_{|\xi|<n},$$

$$b_t^{(\tau_n)} \equiv b_t I_{[0,\tau_n]}(t).$$

于是$\left|\int_s^t \sigma_u^{(\tau_n)} dB_u\right|$，$\int_s^t (\sigma_u^{(\tau_n)})^2 du$，$\int_s^t |b_u^{(\tau_n)}| du$，$G^{(1)\tau_n}$，$G^{(2)\tau_n}$均不超过$n$。由(1.36)及第一步已证明的结论，对$X^{(n)}, G^{\tau_n}$，Ito公式成立。而且我们显然有$F(X_t^{(n)}, G_t^{\tau_n}) \to F(X_t, G_t)$，a.e. dP $(n \to \infty)$。另一方面，考虑(1.32)等式的右边，当ω固定后，在$0 \leqslant u \leqslant t$上$F_x'(X_u, G_u)$连续因而有界，设界为$C$。于是

$$|F_x'(X_u^{(n)}, G_u^{\tau_n})\sigma_u^{(\tau_n)} - F_x'(X_u, G_u)\sigma_u|^2 \leqslant (2C)^2 \sigma_u^2 \in \mathscr{L}_1^{loc}.$$

由控制收敛性，我们有

$$\int_s^t |F_x'(X_u^{(n)}, G_u^{\tau_n})\sigma_u^{\tau_n} - F_x'(X_u, G_u)\sigma_u|^2 du \to 0 \quad (\text{a.e.}\, dP).$$

从而由定理1.1中的4°得到

$$\int_s^t F_x'(X^{(n)}, G^{\tau_n})\sigma^{\tau_n} dB \xrightarrow{p} \int_s^t F_x'(X, G)\sigma dB \quad (n \to \infty).$$

同理

$$\int_s^t |F_x'(X_u^{(n)}, G_u^{\tau_n}) b_u^{\tau_n} - F_x'(X_u, G_u) b_u| du \to 0 \quad (\text{a.e.}\, dP).$$

再加上(1.36)就推出

$$\int_s^t F_x'(X^{(n)}, G^{\tau_n}) dX^{(n)} \xrightarrow{p} \int_s^t F_x'(X, G) dX \quad (n \to \infty).$$

同样地在ω固定时用有界收敛性，我们得到

$$\int_s^t F_{xx}''(X_u^{(n)}, G_u^{\tau_n})(\sigma_u^{(\tau_n)})^2 du \to \int_0^t F_{xx}''(X_u, G_u)\sigma_u^2 du,$$

$$\int_s^t F'_y(X_u^{(n)}, G_u^{\tau_n})\,\mathrm{d}G_u^{\tau_n} = \int_s^t F'_y(X_u^{(n)}, G_u^{\tau_n}) I_{[0,\tau_n]}(u)\mathrm{d}G_u$$

$$\to \int_s^t F'_y(X_u, G_u)\mathrm{d}G_u.$$

因此对 X, G. Ito 公式成立.

注 $F(x,y)$ 不必定义于整个空间。若 X, G 只能取值于区域 D_1, E_1, 则 F 可只定义于 $D_1 \times E_1$.

定理1.4 若 $F(x_1,\cdots,x_n;\ y_1,\cdots,y_m)$ 满足：$F''_{x_i x_j}, F'_{y_k}$ 连续 $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m)$. $X^{(i)}(i \leqslant n)$ 是 Ito 过程：

$$\mathrm{d}X_t^{(i)} = \sigma_t^{(i)}\mathrm{d}B_t + b_t^{(i)}\mathrm{d}t \equiv \mathrm{d}M_t^{(i)} + \mathrm{d}A_t^{(i)},$$

又 $G^{(k)}(k \leqslant m)$ 是 $(\mathscr{F}_t)$ 适应连续有限变差过程，则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}F(X_t^{(1)},\cdots,X_t^{(n)};\ G_t^{(1)},\cdots,G_t^{(m)}) \\
&= \sum_i F'_{x_i}(*)\mathrm{d}X_t^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} F''_{x_i x_j}(*)\mathrm{d}\langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle_t \\
&\quad + \sum_k F'_{y_k}(*)\mathrm{d}G_t^{(k)},
\end{aligned} \tag{1.37}$$

其中 $(*)$ 表示 $(X_t^{(1)},\cdots,X_t^{(n)};\ G_t^{(1)},\cdots,G_t^{(m)})$,

$$\langle M\rangle^{(i)}, M^{(j)}\rangle_t = \int_0^t \sigma_u^{(i)}\sigma_u^{(j)}\mathrm{d}u.$$

注 为了便于记忆，记

$$\mathrm{d}X_t^{(i)}\mathrm{d}X_t^{(j)} = \mathrm{d}\langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle_t.$$

于是(1.37)可写成

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F &= \sum_i F'_{x_i}\mathrm{d}X^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} F'_{x_i x_j}\mathrm{d}X^{(i)}\mathrm{d}X^{(j)} \\
&\quad + \sum_k F'_{y_k}\mathrm{d}G^{(k)}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

也可写成向量形式

$$\mathrm{d}F = \partial_x F\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\partial_x\partial_x F\mathrm{d}X\mathrm{d}X + \partial_y F\mathrm{d}G,$$

其中

$$X=\begin{pmatrix}X^{(1)}\\ \vdots\\ X^{(n)}\end{pmatrix},\qquad G=\begin{pmatrix}G^{(1)}\\ \vdots\\ G^{(m)}\end{pmatrix}.$$

定理1.4的证明完全类似于定理1.3，只是繁些，故略。

推论 若 X,Y,Z 均为Ito过程，$F\in C^2$，则

$$d(XY)=XdY+YdX+dXdY;$$

$$dF(X)=F'(X)dX+\frac{1}{2}F''(X)(dX)^2;$$

$$dXdYdZ=0.$$

通常微积分中有复合函数微商公式(链法则)，在随机微积分中相应的就是Ito公式。直观地说，Ito过程中的 dX 包含 σdB，而 $E(dB_t)^2=dt$。即 dB_t 相对于 dt 相当于"半阶无穷小"。所以 $dF(X)$用 Taylor 展开应展到二阶项。

(二) Ito公式的简单应用

1° 计算Ito积分

若 $f\in C^1$，则

$$\int_s^t f(B)dB=F(B_t)-F(B_s)-\frac{1}{2}\int_s^t f'(B_u)du \quad (1.39)$$

(F 为 f 的一个原函数)。

证明 对 F 及 $\int_{x_0}^{x} f(t,y)dy$ 用 Ito 公式即得。

2° B 的指数型泛函

若 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$，则由指数定义的

$$z_t=\exp\left(\int_0^t\Phi dB-\frac{1}{2}\int_0^t\Phi_u^2du\right)$$

是满足

$$\begin{cases}dY=Y\Phi dB,\\ Y_0=1\end{cases}\quad (1.40)$$

的唯一 Ito 过程(因而 $z_t - 1 \in \mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$)。

证明 令

$$X_t = \int_0^t \Phi \mathrm{d}B - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u.$$

对 $z_t = \mathrm{e}^{X_t}$ 用 Ito 公式($F(x) \equiv x$),我们有

$$\mathrm{d}z_t = \mathrm{e}^{X_t}\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{X_t}(\mathrm{d}X_t)^2$$

$$= z_t\left(\Phi_t \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\Phi_t^2 \mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}z_t \Phi_t^2 \mathrm{d}t$$

$$= z_t \Phi_t \mathrm{d}B_t.$$

显然 $z_0 = 1$,因此 z_t 是满足方程的 Ito 过 程。这里我们先证明:如果方程另有一个解 Y,那么在 τ_0 前 $z_t = Y_t$,其中 $\tau_0 = \inf\{t: z_t = 0\}$。为此令 $\tau_n = \inf\{t: z_t \leqslant 1/n\}$,对于

$$\frac{Y_{t\wedge\tau_n}}{z_{t\wedge\tau_n}} \quad 及 \quad \frac{1}{z_{t\wedge\tau_n}}$$

应用 Ito 公式(为了记号简便,我们用 z, Y 简记 $z_{t\wedge\tau_n}, Y_{t\wedge\tau_n}$):

$$\mathrm{d}\left(\frac{Y}{z}\right) = Y\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\mathrm{d}Y + \mathrm{d}Y\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= (Y + \mathrm{d}Y)\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\mathrm{d}Y$$

$$= (Y + \mathrm{d}Y)\left[-\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{z^3}(\mathrm{d}z)^2\right] + \frac{1}{z}\mathrm{d}Y$$

$$= \frac{z\mathrm{d}Y - Y\mathrm{d}z}{z^2} + \frac{Y}{z^3}(\mathrm{d}z)^2 - \frac{1}{z^2}\mathrm{d}Y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{zY\Phi\mathrm{d}B - Yz\Phi\mathrm{d}B}{z^2} + \frac{Y}{z^3}(z\Phi)^2\mathrm{d}t - \frac{1}{z^2}(Y\Phi)(z\Phi)\mathrm{d}t$$

$= 0.$

因此 Y_t/z_t 为常随机变量。但是它在 $t=0$ 处取 1，所以 $Y=z$。即 $Y_{t\wedge\tau_n}=z_{t\wedge\tau_n}$。令 $n\to\infty$ 便得 $Y_{t\wedge\tau_0}=z_{t\wedge\tau_0}$。然而由 z_t 是非负上鞅推出 $z_t=0(t\geqslant\tau_0)$。从而

$$P(\tau_0<\infty)=\lim_{n\to\infty}P(\tau_0<n)\leqslant\lim_{n\to\infty}P(z_n=0)=0.$$

所以我们得到 $Y_t=z_t$（注：唯一性也是定理3.1的推论）。

3° 平方变差与二次互变差公式

对于分割 $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{N^{(n)}}^{(n)}=t$，$\lambda_n=\max_k\Delta t_k^{(n)}$，极限

$$[X]_t\equiv(p)\lim_{\lambda_n\to0}\sum_{k=1}^{N^{(n)}-1}(\Delta X_{t_k^{(n)}})^2,$$

$$[X,Y]_t\equiv(p)\lim_{\lambda_n\to0}\sum_{k=1}^{N^{(n)}-1}\Delta X_{t_k^{(n)}}\Delta Y_{t_k^{(n)}}$$

存在。记

$$\langle M^X\rangle_t\equiv\int_0^t(\mathrm{d}X_s)^2,$$

$$\langle M^X,M^Y\rangle_t\equiv\frac{1}{2}(\langle M^{X+Y}\rangle_t-\langle M^X\rangle_t-\langle M^Y\rangle_t)$$

$$=\int_0^t\mathrm{d}X_s\mathrm{d}Y_s.$$

于是我们有

$$[X]_t=\langle M^X\rangle_t=X_t^2-X_0^2-2\int_0^tX_s\mathrm{d}X_s,\qquad(1.41)$$

$$[X,Y]_t=\langle M^X,M^Y\rangle_t$$
$$=X_tY_t-X_0Y_0-\int_0^t(X_s\mathrm{d}Y_s+Y_s\mathrm{d}X_s).\qquad(1.42)$$

$[X]_t$，$[X,Y]_t$ 分别称为平方变差与二次互变差。

证明 对$(X-X_{t_k^{(n)}})^2$用 Ito 公式

$$(X_t-X_{t_k^{(n)}})^2=2\int_{t_k^{(n)}}^t(X_u-X_{t_k^{(n)}})\mathrm{d}X_u+\int_{t_k^{(n)}}^t\mathrm{d}\langle M^X\rangle_t,$$

于是

$$\sum_k(\Delta X_{t_k^{(n)}})^2=\sum_k 2\int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}}(X_u-X_{t_k^{(n)}})\mathrm{d}X_u+\langle M^X\rangle_t$$

$$=2\int_0^t\Big(X_u-\sum_k X_{t_k^{(n)}}I_{(t_k^{(n)},\,t_{k+1}^{(n)}]}(u)\Big)$$

$$\times(\sigma_u\mathrm{d}B_u+b_u\mathrm{d}u)+\langle M^X\rangle_t.$$

但是由有界收敛性(当ω固定时)得：当$\lambda_u\to\infty$时

$$\int_0^t\Big|X_u-\sum_k X_{t_k^{(n)}}I_{(t_k^{(n)},\,t_{k+1}^{(n)}]}(u)\Big||b_u|\mathrm{d}u\to0,$$

$$\int_0^t\Big[X_u-\sum_k X_{t_k^{(n)}}I_{(t_k^{(n)},\,t_{k+1}^{(n)}]}(u)\Big]^2\sigma_w^2\,\mathrm{d}u\to0.$$

因而也p收敛。于是由定理1.1的4°有

$$\int_0^t\Big[X_u-\sum_k X_{t_k^{(n)}}I_{(t_k^{(n)},\,t_{k+1}^{(n)}]}(u)\Big]\sigma_u\mathrm{d}B_u$$

$$\xrightarrow{p}0\quad(\lambda_n\to\infty).$$

所以我们有

$$\sum_{k=1}^{N^{(n)}-1}(\Delta X_{t_k^{(n)}})^2\xrightarrow{p}\langle M^X\rangle_t\quad(\lambda_n\to0).$$

这就证明了(1.41)。而(1.42)是(1.41)的推论。

4° Stratonovich-Fisk 对称积分

设$[0,t]$上有分割如3°所示。给定 Ito 过程

$$X=X_0+M^X+A^X,$$

$$Y=Y_0+M^Y+A^Y,\quad Z=Z_0+M^Z+A^Z.$$

定义 Stratonovich-Fisk 积分$\Big($记成$\int_0^t Y\circ\mathrm{d}X\Big)$为

$$\int_0^t Y \circ dX = (p)\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=0}^{N^{(n)}-1} \frac{Y_{t_k^{(n)}} + Y_{t_{k+1}^{(n)}}}{2} \Delta X_{t_k^{(n)}},$$

则我们有如下结论:

(S_1) $\int_0^t Y \circ dX$ 存在且

$$\int_0^t Y \circ dX = \int_0^t YdX + \frac{1}{2}\int_0^t d\langle M^X, M^Y\rangle_u, \qquad (1.43)$$

或写成

$$Y \circ dX = YdX + \frac{1}{2}dXdY; \qquad (1.43')$$

(S_2) $X \circ dYdZ = (X \circ dY)dZ = X(dYdZ)$; (1.44)

$$(XY) \circ dZ = X \circ (Y \circ dZ);$$

(S_3) 若$X^{(i)}$是Ito过程($i = 1, \cdots, n$), $F(x_1, \cdots, x_n) \in C^3$, 则普通复合函数微商的链法则成立:

$$dF(X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}) = \sum_k F'_{x_k} \circ dX^{(k)}. \qquad (1.45)$$

证明 证(S_1).

$$\int_0^t Y \circ dX - \int_0^t YdX = (p)\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=0}^{N^{(n)}-1} \Delta Y_{t_k^{(n)}} \Delta X_{t_k^{(n)}}$$

$$= \frac{1}{2}\langle M^X, M^Y\rangle_t. \text{ (用(1.42))}$$

证(S_2).

$$X \circ (dYdZ) = X \circ d\langle M^Y, M^Z\rangle = Xd\langle M^Y, M^Z\rangle = X(dYdZ),$$

$$(X \circ dY)dZ = \left(XdY + \frac{1}{2}dXdY\right)dZ = XdYdZ.$$

另一个类似.

证(S_3).

$$\sum_k F'_{x_k}\circ dX^{(k)}=\sum_k\left[F'_{x_k}dX^{(k)}+\frac{1}{2}dF'_{x_k}dX^{(k)}\right]$$

$$=\sum_k F'_{x_k}dX^{(k)}+\frac{1}{2}\Big(\sum_j F''_{x_kx_j}dX^{(j)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j}F'''_{x_kx_jx_i}dX^{(i)}dX^{(j)}\Big)dX^{(k)}$$

$$=\sum_k F'_{x_k}dX^{(k)}+\frac{1}{2}\sum_{j,k}F''_{x_kx_j}dX^{(j)}dX^{(k)}$$

$$=dF(X^{(1)},\cdots,X^{(n)}).$$

推论 对 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{N^{(n)}-1}(\lambda Y_{t_k^{(n)}}+(1-\lambda)Y_{t_{k+1}^{(n)}})\,\Delta X_{t_k^{(n)}}$$

$$\xrightarrow{p}2(1-\lambda)\int_0^t Y\circ dX+(2\lambda-1)\int_0^t Y dX\quad(\lambda_n\to 0).$$

§1.8 指数上鞅与指数鞅

引理1.10 $(\mathscr{F}_t)$上鞅X是$(\mathscr{F}_t)$鞅，当且仅当$EX_t=$常数$(\forall t)$.

证明 必要性显然. 充分性的证明如下：任取$A\in\mathscr{F}_s(s<t)$. 由上鞅性我们有

$$E(X_tI_A)\leqslant E(X_sI_A),\quad E(X_tI_{A^c})\leqslant E(X_sI_{A^c}).$$

但是$EX_t=EX_s$，所以上面两个不等式必须都取等号. 这说明X是$(\mathscr{F}_t)$鞅.

定理1.5 若$\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$，则

$$z_t=\exp\left(\int_0^t\Phi_s dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t\Phi_s^2 ds\right).$$

为$(\mathscr{F}_t)$上鞅(称为指数上鞅). 它在$0\leqslant t\leqslant T$是$(\mathscr{F}_t)$鞅，当且仅

当 $Ez_t = 1(0 \leqslant t \leqslant T)$。特别地，若 Novikov 条件：对 $T \leqslant \infty$

$$E\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right) < \infty$$

成立，那么 z_t在$0 \leqslant t \leqslant T(T \leqslant \infty)$是$(\mathscr{F}_t)$鞅(称为指数鞅)。

证明 首先证明 z_t 在 $0 \leqslant t < \infty$是$(\mathscr{F}_t)$非负上鞅。事实上，由 § 1.7(二)之2°，z_t 满足

$$z_t = 1 + \int_0^t z_s \Phi_s \mathrm{d}B_s.$$

所以 z_t 是$(\mathscr{F}_t)$局部平方可积鞅。于是存在$(\mathscr{F}_t)$停时$\tau_n \uparrow \infty$(a.e.dP)，使$E(z_{t\wedge\tau_n} | \mathscr{F}_s) = z_{s\wedge\tau_n}(t > s)$。因此由 Fatou 引理我们得到

$$\begin{aligned} E(z_t | \mathscr{F}_s) &\leqslant \lim_{n\to\infty} E(z_{t\wedge\tau_n} | \mathscr{F}_s) \\ &= \lim_{n\to\infty} z_{s\wedge\tau_n} = z_s \quad (\text{a.e.d}P). \end{aligned}$$

其次，由引理1.10可知 z_t 在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅，当且仅当 $Ez_t = 1(0 \leqslant t \leqslant T)$。

最后我们证明 Novikov 条件是指数鞅的充分条件。记

$$M_t \equiv \int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s, \quad \langle M\rangle_t \equiv \int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s.$$

我们先假定比 Novikov 条件更强的条件(N′)

$$(\mathrm{N}')\quad E\exp\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\int_0^T \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right) < \infty \quad (\varepsilon > 0),$$

我们证明在(N′)下，对于任意$1 < \lambda < 1 + \varepsilon$，有

$$E[z_{t\wedge\tau_n}]^{1+\frac{(1+\varepsilon-\lambda)(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}} \leqslant C$$

(不依赖于n)，从而$z_{t\wedge\tau_n}$一致可积，于是

$$Ez_t = \lim_{n\to\infty} Ez_{t\wedge\tau_n} = 1.$$

事实上，对于任意($\mathscr{F}_t$)停时 τ，我们有

$$(z_{t\wedge\tau})^\lambda = \exp\left(\lambda M_{t\wedge\tau} - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_{t\wedge\tau}\right)$$

$$\times \exp\left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\langle M\rangle_{t\wedge\tau}\right).$$

对于

$$p = \frac{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon}, \quad q = \frac{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}{\lambda(\lambda-1)},$$

用 Hölder 不等式和指数上鞅性质便得

$$E(z_{t\wedge\tau})^{1+\frac{(1+\varepsilon-\lambda)(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}} = E(z_{t\wedge\tau})^{\frac{(1+\varepsilon)\lambda}{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}}$$

$$= E\left[\left(\exp\left[\lambda M_{t\wedge\tau} - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_{t\wedge\tau}\right]\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}}\right.$$

$$\left.\times \exp\left(\frac{(\lambda-1)\lambda}{2}\cdot\frac{1+\varepsilon}{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}\times\langle M\rangle_{t\wedge\tau}\right)\right]$$

$$\leqslant\left[E\exp\left(\lambda M_{t\wedge\tau} - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_{t\wedge\tau}\right)\right]^{\frac{1+\varepsilon}{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}}$$

$$\times\left[E\exp\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\langle M\rangle_{t\wedge\tau}\right)\right]^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}}$$

$$\leqslant\left[E\exp\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\int_0^t \Phi_s^2 ds\right)\right]^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)+(1+\varepsilon)}}$$

(与 τ 无关，记成 C)。

现在我们要把条件(N′)减弱为 Novikov 条件。注意到当 Φ 满足 Novikov 条件时，$\Phi/\sqrt{1+\varepsilon}$ 满足(N′)。于是

$$z_t(\varepsilon) \equiv \exp\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}M_t - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\varepsilon)}\langle M\rangle_t\right)$$

在 $0\leqslant t\leqslant T$ 为$(\mathscr{F}_t)$鞅。即 $Ez_t(\varepsilon)=1(t\leqslant T)$。由 Hölder 不等式我们得到

$$1=Ez_T(\varepsilon)=E\left[(z_T)^{\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}}\exp\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{2(1+\varepsilon)}\langle M\rangle_T\right)\right]$$

$$\leqslant(Ez_T)^{\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}}\left(E\exp\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\varepsilon}}\langle M\rangle_T\right)\right)^{1-\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}}.$$

令$\varepsilon\to0$便得 $Ez_T\geqslant1$。因此 $Ez_T=1$，即 z_t 在$0\leqslant t\leqslant T$ 是鞅。

注 在(N')下有$z_t\in L_{\frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{1+\varepsilon}-1}}$（取$\lambda=\sqrt{1+\varepsilon}$）。

推论1 若存在 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$，使

$$E\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Phi_s^2\mathrm{d}s\right\}<\infty\quad(k\leqslant n),$$

则 z_t 在 $0\leqslant t\leqslant T$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅。

证明 记

$$\Phi^{(k)}=\Phi I_{[t_{k-1},t_k)}(t).$$

于是 $\Phi^{(k)}$ 满足 Novikov 条件。因此

$$z_t^{(k)}\equiv\exp\left\{\int_0^t\Phi_s^{(k)}\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^t(\Phi^{(k)})^2\mathrm{d}s\right\}$$

在$[0,T]$是$(\mathscr{F}_t)$鞅。这样我们有

$$E(z_{t_k}^{(k)}|\mathscr{F}_{t_{k-1}})=z_{t_{k-1}}^{(k)}=1.$$

进而

$$\begin{aligned}Ez_{t_k}&=E(z_{t_{k-1}}E(z_{t_k}^{(k)}|\mathscr{F}_{t_{k-1}}))\\&=Ez_{t_{k-1}}=\cdots=Ez_0=1.\end{aligned}$$

但是 Ez_t 对 t 是减函数，从而 $Ez_t\equiv1(t\leqslant T)$。

推论2 若 $M\in\mu_2^c(\mathscr{F}_t)$，$\Phi_t=F(t,M)\in\mathscr{B}([0,\infty)\times W)$，且满足

$$|F(t,M)|\leqslant K(1+|M|_t^*)\quad(t\leqslant T),$$

其中

$$|M|_t^* = \max_{0\le s\le t} |M|_s,$$

则 z_t 在 $[0,T]$ 是鞅。

证明 记

$$X_t = e^{\frac{1}{4}TK^2(1+|M_t|)^2},$$

则 X_t 是下鞅。由 Doob 不等式

$$\begin{aligned}
Ee^{\frac{1}{2}\int_0^T \Phi_s^2 ds} &\leqslant Ee^{\frac{1}{2}K^2(1+|M|_T^*)^2} \\
&= E(X_T^*)^2 \leqslant 4EX_T^2 \\
&\leqslant 4e^{E(\frac{1}{2}TK^2(1+|M|_T)^2)} \\
&= 4e^{TK^2(1+EM_T^2)} < \infty.
\end{aligned}$$

可见在 $[0,T]$ 上 Novikov 条件得到满足，从而就是鞅。

$$\begin{aligned}
|\hat{z}_t^{(n)}| &\leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^s \Phi_u^2 du\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_s^t (\Phi_u^{(n)})^2 du\right) \\
&\leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \Phi_u^2 du\right).
\end{aligned}$$

利用控制收敛定理，对于任意 $A\in\mathscr{F}_s$，我们在

$$E(\hat{z}_t^{(n)}I_A) = E(\hat{z}_s^{(n)}I_A) = E(\tilde{z}_sI_A)$$

中令 $n\to\infty$ 便得 $E(\tilde{z}_tI_A) = E(\tilde{z}_sI_A)$。

推论 3（复指数鞅） 若 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$，且满足 Novikov 条件，那么

$$\tilde{z}_t \equiv \exp\left(i\int_0^t \Phi_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_s^2 ds\right)$$

在 $0\leqslant t\leqslant T$ 是（复）$(\mathscr{F}_t)$ 鞅，称为复指数鞅。

证明 首先设 $\Phi\in\mathscr{L}_0$。记

$$M_t=\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s, \quad \langle M\rangle_t=\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s.$$

对于 $s<t\leqslant T$ 而言,

$$\exp\left[\lambda(M_t-M_s)-\frac{\lambda^2}{2}(\langle M\rangle_t-\langle M\rangle_s)\right]$$

是λ的解析函数。因此对于任意 $\Lambda\in\mathscr{F}_s$,

$$g(\lambda)\equiv E\left(\exp\left[\lambda(M_t-M_s)-\frac{\lambda^2}{2}(\langle M\rangle_t-\langle M\rangle_s)\right]I_\Lambda\right)$$

是 λ 的解析函数。但是当 λ 为实数时

$$z_t(\lambda)\equiv\exp\left(\lambda M_t-\frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t\right)$$

为$(\mathscr{F}_t)$鞅,所以当 λ 为实数时$g(\lambda)=P(\Lambda)$。因此对于一切复数λ仍有 $g(\lambda)=P(\Lambda)$。从而 $z_t(\lambda)$是$(\mathscr{F}_t)$鞅(λ 复数)。

现在设 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$ 且满足 Novikov 条件。令$\Phi^{(n)}=\Phi I_{|\Phi|\leqslant n}$。于是$|\Phi^{(n)}|\leqslant|\Phi|$,同时$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2^{\mathrm{loc}}\to 0$。记

$$\tilde{z}_t^{(n)}\equiv\tilde{z}_s\exp\left(\mathrm{i}\int_0^t \Phi_u^{(n)}\mathrm{d}B_u+\frac{1}{2}\int_0^t(\Phi_u^{(n)})^2\mathrm{d}u\right).$$

由于存在 $\Phi^{(n)}$ 的子列(不妨设就是它自己),使 a.e. $\mathrm{d}P$ 地有

$$\int_0^t \Phi_u^{(n)}\mathrm{d}B_u\to\int_0^t \Phi_u \mathrm{d}B_u,$$

$$\int_0^t(\Phi_u^{(n)})^2\mathrm{d}u\to\int_0^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u,$$

于是 $\tilde{z}_t^{(n)}\to\tilde{z}_t$(a.e.$\mathrm{d}P$对 t 局部一致)。由此可得 $\tilde{z}_t^{(n)}$是$(\mathscr{F}_t)$鞅。

推论4(指数不等式) 对于$\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$及任意$\lambda,v>0$,$t\geqslant 0$,有

$$P\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left(\int_0^s \Phi_u \mathrm{d}B_u-\frac{v}{2}\int_0^s \Phi_u^2 \mathrm{d}u\right)>\lambda\right)\leqslant \mathrm{e}^{-v\lambda}. \quad (1.46)$$

证明 令

$$z_t = \exp\left(v\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s - \frac{v^2}{2}\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right)$$

是$(\mathscr{F}_t)$上鞅，且 $Ez_t \leqslant 1$. 我们有

$$P\left(\sup_{0<s<t}\left(\int_0^s \Phi \mathrm{d}B - \frac{v}{2}\int_0^s \Phi_u^2 \mathrm{d}u\right) \geqslant \lambda\right)$$

$$= P(\sup_{0<s<t} z_s \geqslant e^{v\lambda}) \leqslant \frac{E(z^t)}{e^{v\lambda}} \leqslant e^{-v\lambda}.$$

§1.9 随机积分的内蕴时间

定义1.13 设 $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}$. 我们称连续$(\mathscr{F}_t)$适应增过程

$$t^*(t) = \int_0^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u \tag{1.47}$$

为随机积分$\int_0^{\cdot} \Phi \mathrm{d}B$ 的内蕴时间$\Big($在下一章中我们将指出它就是$\int_0^{\cdot} \Phi \mathrm{d}B$ 的"特征"$\Big)$.

显然在Φ 为 0 的区间上是不计内蕴时间的增加的.

定义1.14 令τ_t为这样的时刻，在这时刻上的内蕴时间首次超过给定的 t：

$$\tau_t = \begin{cases} \inf\{s: t^*(s) > t\}, & t < t^*(\infty), \\ +\infty, & t \geqslant t^*(\infty) \end{cases} \tag{1.48}$$

(在本书中，如果括号中的集合是空集，那么这个集上的最小值一般地理解为$+\infty$). 我们称 τ_t 为$\int_0^{\cdot} \Phi \mathrm{d}B$的内蕴时间变换.

τ_t 实际上是 $t^*(t)$是右连续逆，即 τ_t 的样本函数右连续，

而且$t^*(\tau_t)=t\wedge t^*(\infty)$，$\tau_{t^*(t)}\leqslant t$。

内蕴时间变换τ_t是一族递增的$(\mathscr{F}_t)$停时。事实上，对$\forall s$有

$$\{\tau_t<s\}=\bigcup_n\left\{t^*\left(s-\frac{1}{n}\right)>t\right\}\in\mathscr{F}_s.$$

此外，$\tau_{t^*(\infty)}=\infty$。因此我们还有$\tau_{t\wedge t^*(\omega)}=\tau_t$。

同时由于$\Phi I_{[0,\tau_t]}\in\mathscr{L}_{2,\infty}$，我们有

$$\int_0^{\tau_t}\Phi\mathrm{d}B=\int_0^{\infty}\Phi_s I_{[0,\tau_t]}(s)\mathrm{d}B_s. \qquad (1.49)$$

定理1.6(Dambis-Dubins-Schwarz) 设$\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$，那么随机积分$\int_0^t\Phi\mathrm{d}B$经过内蕴时间变换后，就成为停止Brown运动(含义为：某个Brown运动在某个停时上的停止)。即：存在$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},(\tilde{\mathscr{F}}_t),\tilde{P})$及$(\tilde{\mathscr{F}}_t)$Brown运动$\tilde{B}$，$(\tilde{\mathscr{F}}_t)$停时$\tilde{\tau}=t^*(\infty)$，使

$$\int_0^{\tau_t}\Phi\mathrm{d}B=\tilde{B}_{t\wedge\tilde{\tau}}, \qquad (1.50)$$

$$\int_0^t\Phi\mathrm{d}B=\tilde{B}_{t^*(t)}. \qquad (1.51)$$

证明 第一步证明$t^*(\infty)$是$(\mathscr{F}_{\tau_t})$停时：事实上，$(\mathscr{F}_{\tau_t})$是递增、右连续(仿441页的证明)σ代数族，且对$\forall s$

$$\begin{aligned}\{t^*(n)<t\}\cap\{\tau_t\leqslant s\}&=\{\tau_t<n\}^c\cap\{\tau_t\leqslant s\}\\&=\{n\leqslant\tau_t\leqslant s\}\in\mathscr{F}_s.\end{aligned}$$

因此$\{t^*(n)<t\}\in\mathscr{F}_{\tau_t}$。于是$\{t^*(n)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{\tau_{t+}}=\mathscr{F}_{\tau_t}$。即$t^*(n)$是$(\mathscr{F}_{\tau_t})$停时。但是

$$\{t^*(\infty)\leqslant t\}=\bigcap_n\{t^*(n)\leqslant t\},$$

所以 $t^*(\infty)$也是 $(\mathscr{F}_{\tau_t})$停时。

第二步构造 Brown 运动：任取一个$(\bar{\Omega},\overline{\mathscr{F}},(\overline{\mathscr{F}}_t),\bar{P})$及$(\overline{\mathscr{F}}_t)$ Brown 运动$\bar{B}$。令

$$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},(\tilde{\mathscr{F}}_t),\tilde{P})$$
$$=(\Omega\times\bar{\Omega},\mathscr{F}\times\overline{\mathscr{F}},(\mathscr{F}_{\tau_t}\times\overline{\mathscr{F}}_t)P\times\overline{P})。$$

定义

$$\tilde{B}_t=\int_0^{\tau_t}\Phi\mathrm{d}B+\bar{B}_{(t-t^*(\infty))^+}。\tag{1,52}$$

当 $a<0$ 时$\{(t-t^*(\infty))^+\leqslant a\}=\varnothing$； $a\geqslant 0$ 时

$$\{(t-t^*(\infty))^+\leqslant a\}$$
$$=\{t^*(\infty)>t\}\vee\{t-a<t^*(\infty)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{\tau_t}。$$

所以 $(t-t^*(\infty))^+\in\mathscr{F}_{\tau_t}$。

但是 $\bar{B}=\bar{B}(t,\bar{\omega})$是$(\overline{\mathscr{F}}_t)$循序过程。因此

$$\bar{B}_{(t-t^*(\infty))^+}=\bar{B}((t-t^*(\infty))^+,\bar{\omega})\in\mathscr{F}_{\tau_t}\times\overline{\mathscr{F}}_t=\tilde{\mathscr{F}}_t。$$

此外，由(1.49)推出

$$\int_0^{\tau_t}\Phi\mathrm{d}B\in\mathscr{F}_{\tau_t}\subset(\text{嵌入})\mathscr{F}_{\tau_t}\times\overline{\mathscr{F}}_t=\tilde{\mathscr{F}}_t。$$

因此 $\tilde{B}$ 是连续的$(\tilde{\mathscr{F}}_t)$适应过程。我们来证明它是$(\tilde{\mathscr{F}}_t)$Brown运动。为此我们计算：

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\tilde{B}_t-\tilde{B}_s)}|\tilde{\mathscr{F}}_s)$$
$$=E\left[\exp\left(\mathrm{i}\lambda\int_{\tau_s}^{\tau_t}\Phi\mathrm{d}B\right)\exp(\mathrm{i}\lambda\bar{B}_{(t-t^*(\infty))^+})\right.$$
$$\left.\times\exp(-\mathrm{i}\lambda\bar{B}_{(s-t^*(\infty))^+})\,|\,\mathscr{F}_{\tau_s}\times\overline{\mathscr{F}}_s\right]$$

$$= E\left(E\left[\exp\left(\mathrm{i}\lambda\int_{\tau_s}^{\tau_t}\Phi\mathrm{d}B\right)\exp(\mathrm{i}\lambda B_{(t-t^*(\infty))^+})\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\exp(-\mathrm{i}\lambda B_{(s-t^*(\infty))^+}\mid\mathscr{F}_\infty\times\overline{\mathscr{F}}_s\right]\mid\mathscr{F}_{\tau_s}\times\overline{\mathscr{F}}_s\right)$$

$$= E\left[\exp\left(\mathrm{i}\lambda\int_{\tau_s}^{\tau_t}\Phi\mathrm{d}B\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2(t-t^*(\infty))^+\right)\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2(s-t^*(\infty))^+\right)\middle|\mathscr{F}_{\tau_s}\times\overline{\mathscr{F}}_s\right]. \qquad (1.53)$$

注意到$\int_{\tau_{t^*(\infty)}}^{\infty}\Phi_u^2\mathrm{d}u=0$，$\int_{\tau_{t^*(\infty)}}^{\infty}\Phi\mathrm{d}B=0$，(1.53)可写成

$$E\left[\exp\left(\mathrm{i}\lambda\int_{\tau_{s\wedge t^*(\infty)}}^{\tau_{t\wedge t^*(\infty)}}\Phi\mathrm{d}B\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2(t-t^*(\infty))^+\right)\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2(s-t^*(\infty))^+\right)\middle|\mathscr{F}_{\tau_s}\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\mathrm{i}\lambda\int_{\tau_{s\wedge t^*(\infty)}}^{\tau_{t\wedge t^*(\infty)}}\Phi\mathrm{d}B+\frac{\lambda^2}{2}\int_{\tau_{s\wedge t^*(\infty)}}^{\tau_{t\wedge t^*(\infty)}}\Phi_u^2\mathrm{d}u\right)\right.$$

$$\times\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}[(t-t^*(\infty))^+ + t\wedge t^*(\infty)]\right)$$

$$\left.\times\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}[(s-t^*(\infty))^+ + s\wedge t^*(\infty)]\right)\middle|\mathscr{F}_{\tau_s}\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\mathrm{i}\lambda\int_{\tau_{s\wedge t^*(\infty)}}^{\tau_{t\wedge t^*(\infty)}}\Phi\mathrm{d}B+\frac{\lambda^2}{2}\int_{\tau_{s\wedge t^*(\infty)}}^{\tau_{t\wedge t^*(\infty)}}\Phi_u^2\mathrm{d}u\right)\middle|\mathscr{F}_{\tau_s}\right]$$

$$\times\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)$$

$$= \lim_{T\to\infty}E\left[\exp\left(\mathrm{i}\lambda\int_{\tau_{s\wedge t^*(\infty)\wedge T}}^{\tau_{t\wedge t^*(\infty)\wedge T}}\Phi\mathrm{d}B\right)\right.$$

$$\times \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\int_{\tau_{s\wedge t^*(\infty)\wedge T}}^{\tau_{t\wedge t^*(\infty)\wedge T}}\Phi_u^2 du\right)$$

$$\times \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)\Big|\mathscr{F}_{\tau_s}\Big]$$

$$= \lim_{T\to\infty} E\left[\exp\left(i\lambda\int_{\tau_{s\wedge T}}^{\tau_{t\wedge T}}\Phi dB + \frac{\lambda^2}{2}\int_{\tau_{s\wedge T}}^{\tau_{t\wedge T}}\Phi_u^2 du\right)\Big|\mathscr{F}_{\tau_s}\right]$$

$$\times \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)$$

$$\times \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\tilde{z}_{\tau_{s\wedge T}}} E[\tilde{z}_{\tau_{t\wedge T}}|\mathscr{F}_{\tau_s}]. \qquad (1.54)$$

这里的 $\tilde{z}_t$ 具有定理 1.5 推论 1 中的形状，但是用 $\lambda\Phi$ 代替了Φ。仿照 § 1.8 推论 1 中的记号和证明，当 $\Phi^{(n)}$ 有界时由Doob停止定理可知 $\tilde{z}^{(n)}_{\tau_{t\wedge T}}$ 是 $(\mathscr{F}_{\tau_t})$鞅，因此

$$E(\tilde{z}^{(n)}_{\tau_{t\wedge T}}I_A) = E(\tilde{z}^{(n)}_{\tau_{t\wedge T}}I_A) \quad (\forall A\in\mathscr{F}_{\tau_s}).$$

另一方面，由于

$$|\tilde{z}^{(n)}_{\tau_{t\wedge T}}I_A|\leqslant\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\int_0^{\tau_{t\wedge T}}\Phi_u^2 du\right)$$

$$\leqslant\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\int_0^{\tau_t}\Phi_u^2 du\right)\leqslant\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}t\right),$$

我们可用控制收敛定理得到：$\tilde{z}_{\tau_{t\wedge T}}$ 为$(\mathscr{F}_{\tau_t})$鞅.再用停止定理，(1.54)就变成

$$\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\tilde{z}_{\tau_{s\wedge T}}}\tilde{z}_{\tau_{t\wedge T\wedge\tau_s}} = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right).$$

即 $\tilde{B}$ 是 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ Brown 运动。而(1.50),(1.51)是(1.52)的直接推论。

注 定理 1.6 的多维情形也正确，即 $\Phi=(\Phi^{(1)},\cdots,\Phi^{(m)})^T\in\mathscr{L}_2^{loc}$ B 为 m 维$(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，$t^*(t)\equiv\int_0^t\Phi_s^T\Phi_s\mathrm{d}s$，$\tau_t$ 是其右连续逆，那么存在一维$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动 $\tilde{B}$，使 $\int_0^t\Phi_s^T dB_s=\tilde{B}_{t^*(t)}$。

证明是一样的。

§1.10 Brown 运动的平移与 Girsanov 变换

（一）Brown 运动的平移

定理1.7(Cameron-Martin-Girsanov 定理) 设 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$，且$(\mathscr{F}_t)$指数上鞅

$$z_t=\exp\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}B-\frac{1}{2}\int_0^t\Phi_u^2\mathrm{d}u\right)$$

在$[0,T)(T\leqslant\infty)$上是$(\mathscr{F}_t)$指数鞅(即 $Ez_t\equiv1$, $0\leqslant t<T$)，那么$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B 的如下"平移"

$$\tilde{B}_t=B_t-\int_0^t\Phi_u\mathrm{d}u \tag{1.55}$$

对于 $0\leqslant t<T$ 是$(\Omega,\mathscr{F}_T,\hat{P})$上$(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，其中 $\hat{P}$ 是

$$\hat{P}(A)=E(I_Az_t)\ （当 A\in\mathscr{F}_t,\ t<T 时） \tag{1.56}$$

在 $\mathscr{F}_{T-}$ 上扩张得到的概率测度。

注 如果 z_t 在闭区间$[0,T]$ $(T\leqslant\infty)$上是$(\mathscr{F}_t)$鞅(在 $T=\infty$时，如果 $\Phi\in\mathfrak{M}_2$ 且 $Ez_\infty=1$ 时就属这种情形。这时 z_t 是闭鞅)，那末 $\tilde{B}$ 当 $t\leqslant T$ 时是$(\Omega,\mathscr{F}_T,\hat{P})$上$(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，而且对 $\forall A\in\mathscr{F}_T$ 有

$$\hat{P}(A)=E(I_Az_T).$$

证明 首先我们注意到由于 z_t 是 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅定义式(1.56)不依赖 t 的取法。因此 $\hat{P}$ 的定义是唯一确定的因而是合理的。其次，对 $\Lambda\in\mathscr{F}_s$，$\eta\in\mathscr{F}_t$，$\hat{E}|\eta|<\infty$，$s<t$，由(1.56)我们有

$$\begin{aligned}\hat{E}(I_\Lambda\eta)&=E(I_\Lambda z_t\eta)\\&=E\left[I_\Lambda z_s E\left(\frac{z_t}{z_s}\eta\,|\,\mathscr{F}_s\right)\right]\\&=\hat{E}\left[I_\Lambda E\left(\frac{z_t}{z_s}\eta\,|\,\mathscr{F}_s\right)\right].\end{aligned}$$

因此

$$\hat{E}(\eta\,|\,\mathscr{F}_s)=E\left(\eta\frac{z_t}{z_s}\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right).\tag{1.57}$$

取 $\eta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\tilde{B}_t-\tilde{B}_s)}$，于是

$$\hat{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\tilde{B}_t-\tilde{B}_s)}\,|\,\mathscr{F}_s)=E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\tilde{B}_t-\tilde{B}_s)}\frac{z_t}{z_s}\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right).\tag{1.58}$$

如果 $\Phi\in\mathscr{L}_0$，那么

$$\Phi=\Phi_0 I_{\{0\}}(t)+\sum_k\Phi_k I_{(t_k,t_{k+1}]}(t)\quad(\Phi_k\in\mathscr{F}_{t_k}).$$

而且不妨设 s 与 t 均是这分割中的分点：$s=t_p$，$t=t_q$。于是(1.58)右边变为

$$\begin{aligned}&E\left[\exp\left(\mathrm{i}\lambda(B_t-B_s)-\mathrm{i}\lambda\int_s^t\Phi_u\mathrm{d}u\right)\right.\\&\qquad\left.\times\exp\left(\int_s^t\Phi\mathrm{d}B-\frac{1}{2}\int_s^t\Phi_u^2\mathrm{d}u\right)\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right]\\&=E\left[\exp\left(\sum_{k=t_p}^{t_q-1}\left[\mathrm{i}\lambda\Delta B_{t_k}-\mathrm{i}\lambda\Phi_k\Delta t_k+\Phi_k\Delta B_{t_k}\right.\right.\right.\\&\qquad\left.\left.\left.-\frac{1}{2}\Phi_k^2\Delta t_k\right]\right)\,\middle|\,\mathscr{F}_{t_p}\right]\\&\overset{\text{记}}{=}E\left[\exp\left(\sum_{k=t_p}^{t_q-1}\xi_k\right)\,\middle|\,\mathscr{F}_{t_p}\right]\quad(\xi_k\in\mathscr{F}_{t_{k+1}})\end{aligned}$$

$$= E\left[\exp\left(\sum_{k=t_p}^{t_{q-2}} \xi_k\right) E(\exp(\xi_{t_{q-1}}) \mid \mathscr{F}_{t_{q-1}}) \mid \mathscr{F}_{t_p}\right].$$

但是ΔB_{t_k}与$\mathscr{F}_{t_k}$独立，$\Phi_k \in \mathscr{F}_{t_k}$，我们推得

$$\begin{aligned} & E(\exp \xi_k \mid \mathscr{F}_{t_k}) \\ & \quad = E\Big[\exp\Big(i\lambda \Delta B_{t_k} + \Phi_k \Delta B_{t_k} \\ & \qquad - i\lambda \Phi_k \Delta t_k - \frac{1}{2}\Phi_k^2 \Delta t_k\Big) \Big| \mathscr{F}_{t_k}\Big] \\ & \quad = \Big(E\Big[\exp\Big(i\lambda \Delta B_{t_k} + x \Delta B_{t_k} \\ & \qquad - i\lambda x \Delta t_k - \frac{1}{2} x^2 \Delta t_k\Big)\Big]\Big)_{x=\Phi_k}. \end{aligned}$$

又因为$\Delta B_{t_k} \sim \mathscr{N}(0, \Delta t_k)$，所以

$$E\exp[(i\lambda + x)\Delta B_{t_k}] = \exp\left(\frac{(i\lambda + x)^2}{2} \Delta t_k\right).$$

于是

$$\begin{aligned} E[\exp \xi_k \mid \mathscr{F}_{t_k}] &= \left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} \Delta t_k\right)\right]_{x=\Phi_k} \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} \Delta t_k\right). \end{aligned}$$

重复多次运用它，我们就得

$$E[\exp(i\lambda(B_t - B_s)) \mid \mathscr{F}_s] = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right).$$

这说明当$\Phi \in \mathscr{L}_0$时定理已成立[①]。为了证明一般$\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}$时定

① 这个证明是早期的初等证明。为了使只需要知道Brown运动的Ito积分的读者阅读方便，我们使本书的第一章能够独自的成为综观随机运算的"背景"。但是，如果用局部平方可积鞅的积分及Brown运动的鞅特征等工具，本定理的证明可大为简化，并得到推广(参见第二章)。

理也成立，我们先证明一个引理：

引理1.11 若$(\Omega,\mathscr{F},P)$上$g_n\in\mathscr{F}$，$g_n\geqslant 0$，$g_n\xrightarrow{P}g$ 且 $Eg_n=Eg=1$，则$g_n\xrightarrow{L^1}g$。

证明 利用

$$(g-g_n)^+\leqslant g.$$

由控制收敛定理得到

$$E(g-g_n)^+\to 0\quad(n\to\infty).$$

但是

$$E(g-g_n)^+-E(g-g_n)^-=E(g-g_n)=0,$$

所以

$$E|g-g_n|=2E(g-g_n)^+\to 0.$$

现在我们在$\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$条件下证明定理1.7。

由于定理1.1的4°，我们可取$\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使

$$\int_0^s\Phi^{(n)}\mathrm{d}B\to\int_0^s\Phi\mathrm{d}B,\quad\int_0^s(\Phi_u^{(n)})^2\mathrm{d}u\to\int_0^s\Phi_u^2\mathrm{d}u$$

a.e.dP地对$0\leqslant s\leqslant t(<T)$一致。令

$$g_n=\frac{z_t^{(n)}}{z_s^{(n)}},\quad g=\frac{z_t}{z_s},$$

其中$z_t^{(n)}$，z_t分别为Φ，$\Phi^{(n)}$对应的指数鞅。于是g，g_n满足引理1.11条件。因此$E|g_n-g|\to 0(n\to\infty)$。所以$g_n$一致可积。因而下式也一致可积

$$\exp[\mathrm{i}\lambda(\tilde{B}_t^{(n)}-\tilde{B}_s^{(n)})]g_n\quad\left(\text{这里}\tilde{B}_t^{(n)}\equiv B_t-\int_0^t\Phi_s^{(n)}\mathrm{d}s\right).$$

于是

$$E|\exp[\mathrm{i}\lambda(\tilde{B}_t^{(n)}-\tilde{B}_s^{(n)})]g_n-\exp[\mathrm{i}\lambda(\tilde{B}_t-\tilde{B}_s)]g|$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty).$$

由此推出

$$E(\exp[i\lambda(\tilde{B}_t^{(n)} - \tilde{B}_s^{(n)})]g_n \mid \mathscr{F}_s)$$

$$\xrightarrow{L^1} E(\exp[i\lambda(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)]g \mid \mathscr{F}_s).$$

但是前段中已经证明了左方为 $\exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right]$。因此右方也应该是它。由(1.58)立刻推出

$$\hat{E}(\exp[i\lambda(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)] \mid \mathscr{F}_s) = \exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right].$$

注 指数上鞅、指数鞅的定理及 Girsanov 定理可以毫无困难地平行论证于多维情形:

B 是 d 维$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，Φ 是$\mathscr{L}_2^{loc}$函数的 d 维列，其转置为 Φ^T。那么对应地可用

$$z_t = \exp\left[\int_0^t \Phi^T dB - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_u^T \Phi_u du\right],$$

$$\tilde{z}_t = \exp\left[i\int_0^t \Phi^T dB + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_u^T \Phi_u du\right],$$

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \Phi_u du$$

代替在一维情形中的相应量。

（二） Wiener 空间的平移变换

考虑 Wiener 空间$(W^d, \mathscr{B}(W^d), P^W)$。记

$$\mathscr{B}_t(W^d) = \sigma(W_s;\ s \leqslant t).$$

于是有 $\mathscr{B}_{t+}(W^d)$及 P^W 完备化$\overline{\mathscr{B}}(W^d)$，$\overline{\mathscr{B}}_t(W^d)$，$\overline{\mathscr{B}}_{t+}(W^d)$。为了记号方便，在不混淆的情形下，我们简记(在维数 d 确定时)：

$$\mathscr{B}_t = \mathscr{B}_t(W^d),\quad \mathscr{B}_t^W = \mathscr{B}_{t+}(W^d),\quad \mathscr{B} = \mathscr{B}(W^d),$$

$$\overline{\mathscr{B}}_t = \overline{\mathscr{B}}_t(W^d), \quad \overline{\mathscr{B}}_t^W = \overline{\mathscr{B}}_{t+}(W^d), \quad \overline{\mathscr{B}} = \overline{\mathscr{B}}(W^d).$$

于是$(\mathscr{B}_t^W)$是参考族，$(\overline{\mathscr{B}}_t^W)$ 是完备参考族（而且必有 $\overline{\mathscr{B}}_t^W = \overline{\mathscr{B}}_t(W^d)$）①（此外由$W_t$之连续性，显然还有$\mathscr{B}_{t-} = \mathscr{B}_t$）。

为了简单起见，我们让 $d=1$（不妨碍一般性）。

$(W, \mathscr{B}, P^W)$上坐标过程$w = (w_t)_{t \geq 0}$是$(\mathscr{B}_t^W)$Brown 运动，也是$(\overline{\mathscr{B}}_t^W)$ Brown 运动。

如果 $\Phi \in \mathscr{L}_2^{loc}$，而且 Φ 关于$(\overline{\mathscr{B}}_t^W)$ Brown 运动w的 Ito 积分所对应的指数上鞅在 $0 \leq t \leq \infty$ 为一致可积$(\overline{\mathscr{B}}_t^W)$指数鞅，那么 w 的$-\int_0^{\cdot} \Phi_s \mathrm{d}s$ 平移引起了W自身的一个“点”变换U（称为 Girsanov 变换）：

$$w \xrightarrow{U} \tilde{w}: \quad \tilde{w}_t = w_t - \int_0^t \Phi_s \mathrm{d}s.$$

由 Girsanov 定理，$\tilde{w}$ 是$(W, \overline{\mathscr{B}}, \hat{P}^W)$上的$(\overline{\mathscr{B}}_t^W)$ Brown 运动，其中

$$\hat{P}^W(A) = E(I_A z_t) \quad (A \in \overline{\mathscr{B}}_t^W),$$

$$z_t = \exp\left(\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}w_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right) \quad (0 \leq t \leq \infty).$$

为了叙述得更为清楚些，我们人为地把w与$\tilde{w}$所在的同一个可测空间及参考族$(W, \overline{\mathscr{B}}, (\overline{\mathscr{B}}_t^W))$记以不同的记号$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t))$与

---

① 对于$t_n > \cdots > t_1 > t$，由 Brown 运动定义推出

$$E[\exp(\mathrm{i}\sum \lambda_i w t_k) \mid \mathscr{B}_{t+}^W(W^d)]$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} E[\exp(\mathrm{i}\sum \lambda_i w t_k) \mid \mathscr{B}_{t+\varepsilon}^W(w^d)] \in \mathscr{B}_t^W(W^d),$$

用典型逼近可得：对$\forall t_k > t$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 及$\forall \infty$维可测函数

$$f(w_{t_1}, \cdots, w_{t_n}, \cdots),$$

有

$$E[f(w_{t_1}, \cdots, w_{t_n}, \cdots) \mid \mathscr{B}_{t+}^W(W^d)] \in \mathscr{B}_t^W(W^d).$$

因此$\mathscr{B}_{t+}^W(W^d) \subset \mathscr{B}_t^W(W^d)$。

$(\tilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},(\widetilde{\mathscr{F}}_t))$(但是这里$\mathscr{F}=\mathscr{F}_\infty,\widetilde{\mathscr{F}}=\widetilde{\mathscr{F}}_\infty$)。

首先我们指出：U是$(\Omega,\mathscr{F}_t)$到$(\tilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}}_t)$的可测变换。

事实上，如果

$$\tilde{\Gamma}=\{\tilde{w}:\ \tilde{w}_{t_1}\leqslant a_1,\cdots,\tilde{w}_{t_n}\leqslant a_n\},\quad t_1,\cdots,t_n\leqslant t,$$

那么

$$U^{-1}\tilde{\Gamma}=\left\{w:\ w_{t_1}-\int_0^{t_1}\Phi_s\mathrm{d}s\leqslant a_1,\cdots,w_{t_n}\right.$$

$$\left.-\int_0^{t_n}\Phi\mathrm{d}s\leqslant a_n\right\}\in\mathscr{F}_t,\quad t_1,t_2,\cdots,t_n\leqslant t.$$

注意到 P^W 与 $\hat{P}^W$ 有相同的零测集，由典型扩张便得$U^{-1}\widetilde{\mathscr{F}}_t\subset\mathscr{F}_t$。此即$U$是所要的可测变换。

定义$(\tilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})$上测度 $\tilde{P}$：

$$\tilde{P}=\hat{P}^W U^{-1}.$$

定理1.7保证了$\tilde{w}$在$\tilde{P}$下是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown运动。但是$\tilde{w}$是$(\tilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})$上的坐标过程，所以$\tilde{P}$是$(\tilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})$上的Wiener测度。

对于$\tilde{A}\in\widetilde{\mathscr{F}}_t$，我们有$U^{-1}\tilde{A}\in\mathscr{F}_t$，而且

$$\int I_{\tilde{A}}(\tilde{w})\tilde{P}(\mathrm{d}\tilde{w})=\tilde{P}(\tilde{A})=\hat{P}^W(U^{-1}\tilde{A})$$

$$=\int I_{U^{-1}\tilde{A}}(w)z_t(w)P^W(\mathrm{d}w)$$

$$=\int I_{\tilde{A}}(Uw)z_t(w)P^W(\mathrm{d}w).$$

用典型逼近可知，对一切$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$可积函数$f(\tilde{w})$有

$$\int f(\tilde{w})\tilde{P}(\mathrm{d}\tilde{w}) = \int f(Uw)z_t(w)P^W(\mathrm{d}w). \qquad (1.59)$$

既然 $\tilde{P}$ 是$(\tilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})$上的 Wiener 测度，而且$(\Omega,\mathscr{F})$与$(\tilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})$都是$(W,\overline{\mathscr{B}})$，于是(1.49)就可以看成为$(W,\overline{\mathscr{B}})$自身的可测变换 U：

$$\tilde{w} = Uw(\in W)$$

(由前还知U是"等时地"可测的，即U也是$(W,\overline{\mathscr{B}}_t^W)$自身的可测变换)。这样(1.59)就变成：$\forall \Gamma \in \overline{\mathscr{B}}_t^W$ 及 $f \in (\overline{\mathscr{B}}_t^W)$ 非负或可积，我们有

$$\int_\Gamma f(\tilde{w})P^W(\mathrm{d}\tilde{w}) = \int_{U^{-1}\Gamma} f(Uw)z_t(w)P^W(\mathrm{d}w). \qquad (1.59')$$

这就是 Wiener 积分在平移变换U下的变换公式。这个变换的 Jacobian 记成 $J(U;w)$。如果把变换限制在$\overline{\mathscr{B}}_t^W$上，对应的 Jacobian 记成 $J(U;w)_t$，那么

$$J(U;w)_t = z_t(w).$$

我们把以上的结论写成如下定理：

定理1.8(Cameron–Martin) $(W,\overline{\mathscr{B}},P^W)$自身的如下变换$U$：

$$\tilde{w} = Uw, \tilde{w}_t = (Uw)_t = w_t - \int_0^t \Phi_s(w)\mathrm{d}s,$$

其中 $\Phi \in \mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$，称为 Girsanov 变换，如果

$$E^W z_t(w) \equiv E^W \exp\left(\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}w_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right) = 1 \quad (\forall t > 0).$$

它对 $\forall t>0$ 都是$\overline{\mathscr{B}}_t^W$ 自身的可测变换，而且对 $\forall \Gamma \in \overline{\mathscr{B}}_t^W$，

$f\in\overline{\mathscr{B}}_t^W$ 可积或非负，恒有

$$\int_\Gamma f(w)P^W(\mathrm{d}w)=\int_{U^{-1}\Gamma}f(Uw)z_t(w)P^W(\mathrm{d}w),\qquad(1.60)$$

即变换的 Jacobian $J(U;w)_t=z_t(w)$.

例 1 设 $\Phi_t=c(t)$常函数，局部平方可积. 记 $w^0\in\Omega$为

$$w_t^0=-\int_0^t c(s)\mathrm{d}s.$$

这时 Girsanov 变换为 w^0 平移：$\tilde{w}=Uw=w+w^0$. 所以

$$J(U;w)_t=z_t=\exp\left(\int_0^t c(s)\mathrm{d}w_s-\frac{1}{2}\int_0^t c^2(s)\mathrm{d}s\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\mathrm{d}w_s^0}{\mathrm{d}s}\right)^2\mathrm{d}s-\int_0^t\frac{\mathrm{d}w_s^0}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}w_s\right)$$

$$\stackrel{\text{记成}}{=}J(w^0;w)_t.$$

易见 U^{-1} 也是 Girsanov 变换：$U^{-1}w=w-w_0$. 因此

$$J(U^{-1};w)_t=J(-w^0;w)_t.$$

对于U，U^{-1} 利用定理1.6，我们得到：对 $\forall\,\Gamma\in\overline{\mathscr{B}}_t^W$，$f\in\overline{\mathscr{B}}_t^W$ 可积或非负，恒有

$$\int_\Gamma f(w)P^W(\mathrm{d}w)$$

$$=\int_{U^{-1}\Gamma}f(w+w_0)J(w^0;w)_tP^W(\mathrm{d}w)$$

$$=\int_{U\Gamma}f(w-w_0)J(-w^0;w)_tP^W(\mathrm{d}w).\qquad(1.61)$$

这就是 Cameron-Martin 平移公式.

以上的观点是把 Girsanov 变换看成 Wiener 空间自身的点变换. 另一种观点把Girsanov 变换看成随机过程的变换，即把坐标

随机过程 w_t 变成另一个随机过程 $\bar{w}_t = w_t + w_t^0$，我们称它为平移过程。我们要讨论这两个过程在同一个测度 P^W 下的分布之间的相互绝对连续性。

注意，定理1.7是说平移过程 $\bar{w}_t$ 在 $\tilde{P}^W$ 下的分布是Wiener测度。但是在 P^W 下的分布当然就不会是Wiener测度了。我们把这个分布记成 P_{w+w^0}：

$$P_{w+w^0}(A) = P^W(U^{-1}A) = \int_{U^{-1}A} P^W(\mathrm{d}w) \quad (\forall A \in \overline{\mathscr{B}}_t^W).$$

在(1.61)中取 $\Gamma = U^{-1}A$，我们就有

$$P_{w+w^0}(A) = \int_A J(-w^0;w)_t P^W(\mathrm{d}w).$$

于是平移过程 $w + w^0$ 的分布对坐标过程w的分布绝对连续，且当限制在 $\overline{\mathscr{B}}_t^W$ 上考虑时的 Radon-Nikodyn 导数为：

$$\frac{\mathrm{d}P_{w+w^0}}{\mathrm{d}P^W}(w) = J(-w^0;w)_t.$$

例2 $\Phi_t = k(t)w_t$，$k(t)$是在任意有限区间上连续有界变差函数，w_t 是坐标过程。由指数函数的凹性可知定理1.5条件满足，因此 $Ez_t \equiv 1$。此时 Girsanov变换 U 为：

$$(Uw)_t = w_t - \int_0^t k(s)w_s \mathrm{d}s.$$

即 $Uw = (I - K)w$，其中K是 Volterra 积分算子：

$$(K_w)_t = \int_0^t k(s)w_t \mathrm{d}s.$$

因此(由 Volterra 算子的性质)$U^{-1} = (I - K)^{-1}$ 存在，并且可用叠代得到如下形式的表达式：

$$(U^{-1}w)_t = ((I-K)^{-1}w)_t = w_t + \int_0^t H(t,s)w_s \mathrm{d}s,$$

由于 $H(t,s)$显含 t，所以U^{-1}不再可能是 Girsanov 变换了。

由定理1.8，变换U的 Jacobian 为

$$J(U;w)_t=\exp\left[\int_0^t k(s)w_s\mathrm{d}w_s-\frac{1}{2}\int_0^t(k(s)w_s)^2\mathrm{d}s\right]$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2}\left[\int_0^t k(s)\mathrm{d}w_s^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^t(k(s)+k^2(s)w_s^2)\mathrm{d}s\right)\right]\quad(\S 1.4\text{例}5^*)$$

$$\xlongequal{\text{记成}}J(K;w)_t.$$

对 $\forall\Gamma\in\overline{\mathscr{B}}_t^W$，$f\in\overline{\mathscr{B}}_t^W$可积或非负，我们有变换公式

$$\int_\Gamma f(w)P^W(\mathrm{d}w)$$

$$=\int_{U^{-1}\Gamma}f(Uw)J(K;w)_tP^W(\mathrm{d}w).\qquad(1.61')$$

这时候由于U是 Girsanov 变换，因此对于反变换过程

$$\tilde{w}_t=(U^{-1}w)_t$$

在 P^W 下的分布 $P_{U^{-1}w}$ 有

$$P_{U^{-1}w}(A)=P^W(UA)=\int_{UA}P^W(\mathrm{d}w)\qquad(\forall A\in\overline{\mathscr{B}}_t^W).$$

取$\Gamma=UA\in\overline{\mathscr{B}}_t^W$（$U^{-1}$虽不是 Girsanov 变换，但仍是“等时的”可测变换，故有$U\overline{\mathscr{B}}_t^W\subset\overline{\mathscr{B}}_t^W$），由(1.59′)得到

$$P_{U^{-1}w}(A)=\int_A J(K;w)_tP^W(\mathrm{d}w).$$

所以 $P_{U^{-1}w}$ 对 P^W 绝对连续，而且当限制于$\overline{\mathscr{B}}_t^W$上考虑时，其 Radon–Nikodyn 导数为

$$\frac{\mathrm{d}P_{U^{-1}w}}{\mathrm{d}P^W}(w)=J(K;w).$$

但是正变换过程$(Uw)_t$在 P^W 下的分布与 P^W 的关系却不能

由这里的一般理论推出了，因为U^{-1}不是Girsanov变换.

§1.11 Brown参考族及关于它的局部鞅

定义1.15 Brown运动B生成的完备参考族$(\overline{\mathscr{F}_t^0})$，称为Brown参考族。

引理1.12 1° 若随机过程X左连续，则$(\mathscr{F}_t^0)$左连续的；

2° 设X是强马氏过程，即对任意$(\mathscr{F}_t^0)$停时τ及有界Borel函数f，恒有

$$E(f(X_{\tau+t})|\mathscr{F}_{\tau+}^0)=E(f(X_{\tau+t})|X_\tau),$$

那么$(\overline{\mathscr{F}_t^0})$是右连续的。

证明 1° 令$t_1<\cdots<t_n\leqslant t$。由

$$\{(X_{t_1},\cdots,X_{t_n-\frac{1}{m}})\in\Gamma\}\in\mathscr{F}_{t-}^0,$$

让$m\to\infty$，得到

$$\{(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})\in\Gamma\}\in\mathscr{F}_{t-}^0.$$

但是$\mathscr{F}_t^0$由$\{(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})\in\Gamma\}$生成，所以$\mathscr{F}_t^0\subset\mathscr{F}_{t-}^0$。从而$\mathscr{F}_t^0=\mathscr{F}_{t-}^0$。

2° 这时候对于任意有界$\mathscr{F}_\infty^0$随机变量ξ，恒有

$$E(\xi|\mathscr{F}_{\tau+}^0)=E(\xi|X_\tau)\quad(\text{参见}[Q]).$$

因此$E(\xi|\mathscr{F}_{\tau+}^0)$概率为1地$\mathscr{F}_\tau^0$可测。取$A\in\mathscr{F}_{\tau+}^0$。那么$I_A=E(I_A|\mathscr{F}_{\tau+}^0)$概率为1地$\mathscr{F}_\tau^0$可测。即存在$\eta\in\mathscr{F}_\tau^0$，使$P(I_A\neq\eta)=0$。所以$A\triangle\{\eta=1\}\subset\{\eta\neq I_A\}$是零测集，从而$A\in\overline{\mathscr{F}_\tau^0}$。由$A$的任意性可知$\mathscr{F}_{\tau+}^0\subset\overline{\mathscr{F}_\tau^0}$。

现在，对$\forall A\in\overline{\mathscr{F}_{t+}^0}$，由于$A\in\overline{\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}^0}$，存在$C_n\in\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}^0$使$P(A\triangle C_n)=0$。显见$\overline{\lim_{n\to\infty}}C_n\in\mathscr{F}_{t+}^0$，故由上段证明推得$\overline{\lim_{n\to\infty}}C_n\in\overline{\mathscr{F}_t^0}$。然而

$$A\triangle(\overline{\lim_{n\to\infty}}C_n)\subset\bigcup_n(A\triangle C_n),$$

右边是零测集。从而 $A\in\overline{\mathscr{F}}^0_t$，即得$\overline{\mathscr{F}}^0_{t+}=\overline{\mathscr{F}}^0_t$。

推论 左连续强马氏过程 X 有连续的参考族$(\overline{\mathscr{F}}^0_t)$：

$$\overline{\mathscr{F}}^0_{t+}=\overline{\mathscr{F}}^0_t=\overline{\mathscr{F}}^0_{t-}.$$

特别，Brown 参考族$(\overline{\mathscr{F}}^0_t)$是连续的。

引理1.13 设$B_0=0$，$(\overline{\mathscr{F}}^0_t)$为 Brown 参考族，则

$$\mathscr{E}=\mathrm{e}^{\int_0^\infty f_s\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^\infty f_s^2\mathrm{d}s};\quad f_s=\sum_1^n\lambda_j I_{(t_{j-1},t_j]}(s)$$

$(\forall n,\ \forall t_0<\cdots<t_n,\ \forall\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in R)$是 $L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty,P)$的生成集(即其线性组合在$L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty,P)$中稠)。

证明 $\forall\xi\in L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty,P)$，由控制收敛性可推出如下定义的$\varphi(z_1,\cdots,z_n)\varphi$是解析函数：

$$\varphi(z_1,\cdots,z_n)\equiv E(\xi\mathrm{e}^{\sum_1^n z_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})}).$$

又若ξ与$\mathscr{E}$正交，则$\varphi(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0$。再由$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的任意性便得$\varphi\equiv0$。在$\varphi$中取$z_j=\mathrm{i}\lambda_j$，则

$$E(\xi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_1^n\lambda_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})})=0.$$

这说明$(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$（取$t_0=0$）在测度$\int\xi\mathrm{d}P$下的 Fourier 变换为0。从而$(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots)$在$\int\xi\mathrm{d}P$下的分布为0。于是$\int\xi\mathrm{d}P$在$B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$生成的$\sigma$代数$\sigma(B_1,\cdots,B_n)$上为0。进而在$\overline{\mathscr{F}}^0_\infty$上为0。最后导致$\xi=0$。

命题1.6 设$(\overline{\mathscr{F}}^0_t)$是 Brown 参考族。对于$\xi\in L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty,P)$，存在唯一$(\overline{\mathscr{F}}^0_t)$可料过程$\Phi_s$，使

$$\xi - E\xi = \int_0^{\infty} \Phi_s \mathrm{d}B_s. \tag{1.62}$$

证明 记

$$\mathscr{H} = \{\xi \in L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty, P): (1.62)\text{成立}\}.$$

对于 $\xi \in \mathscr{H}$，显见有

$$E\xi^2 = (E\xi)^2 + \int_0^{\infty} \Phi_s^2 \mathrm{d}s. \tag{1.63}$$

首先，$\mathscr{H}$ 是闭集。事实上，如果 $\xi_n \in \mathscr{H}$，$\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$，那么存在可料列 $\Phi^{(n)}$ 使

$$\xi_n - E\xi_n = \int_0^{\infty} \Phi_s^{(n)} \mathrm{d}B_s.$$

利用 ξ_n 是 Cauchy 列及(1.63)可知 $\Phi^{(n)}$ 是 $\mathscr{L}_{2,\infty}$ 中的 Cauchy 列。从而 $\Phi^{(n)} \xrightarrow{\mathscr{L}_{2,\infty}}$ 某个可料过程 Φ。从 ξ_n 满足(1.62)立得 ξ 满足(1.62)，即 $\xi \in \mathscr{H}$。

另一方面，对于 $\xi \in \mathscr{E}$，设

$$\xi = e^{\int_0^{\infty} f_s \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} f_s^2 \mathrm{d}s},$$

则 $\Phi_t \equiv e^{\int_0^t f_s \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t f_s^2 \mathrm{d}s}$ 满足：对 t 固定，

$$\Phi_t = 1 + \int_0^t \Phi_s f(s) \mathrm{d}B_s \in \mathscr{H}.$$

令 $t \to \infty$，得 $\xi \in \mathscr{H}$。可见 $\mathscr{E} \subset \mathscr{H}$。再由 $\mathscr{H}$ 是线性的且闭的性质，便得到 $L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty, P) = \mathscr{H}$。

定理1.9 (Brown 局部鞅的可料表示) 设 $(\overline{\mathscr{F}}^0_t)$ 为 Brown 参考族，$M \in \mathscr{M}^{\mathrm{loc}}(\overline{\mathscr{F}}^0_t)$，那么存在常数 a 及 $(\overline{\mathscr{F}}^0_t)$ 可料过程 $\Phi \in \mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$，使

$$M_t = a + \int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s.$$

特别地，关于 Brown 参考族的局部鞅都有连续修正。

证明 首先，如果 $M\in\mathscr{M}^2$，且 $\sup_t EM_t^2<\infty$，那么由命题1.6，存在 $\Phi\in L^2(\overline{\mathscr{F}}_\infty^0,P)$，使

$$M_t=E(M_\infty|\overline{\mathscr{F}}_t^0)=EM_\infty+E\left(\int_0^\infty\Phi_s\mathrm{d}B_s|\overline{\mathscr{F}}_t^0\right)$$

$$=EM_\infty+\int_0^t\Phi_s\mathrm{d}B_s.$$

其次，对于一致可积鞅M，我们可找 $\xi_n\in L^2(\overline{\mathscr{F}}_\infty^0,P)$，使$\xi_n\xrightarrow{L^1}M_\infty$。由 Doob 不等式

$$P(\sup_t|M_t-E(\xi_n|\overline{\mathscr{F}}_t^0)|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{E|M_\infty-\xi_n|}{\lambda}.$$

仿照引理 1.7 的证明，可知存在 $E(\xi_n|\overline{\mathscr{F}}_t^0)$ 的子列 a.e.dP 地一致收敛到M，从而M有连续修正。对于 $M\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}$，存在停时列 $\tau_n\uparrow\infty$，使M^{τ_n}为一致可积鞅，于是 M^{τ_n}有连续修正。但n任意，从而M有连续修正。这样就存在停时列 $\sigma_n\uparrow\infty$，使M^{σ_n}有界。所以由第一部分知存在 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_2$，使

$$M_t^{\sigma_n}=EM_{\sigma_n}+\int_0^t\Phi_s^{(n)}\mathrm{d}B_s=EM_0+\int_0^t\Phi_s^{(n)}\mathrm{d}B_s.$$

由于 $M_t^{\sigma_n}\to M_t^{\sigma}$ a.e.dP。这推出 $\Phi^{(n)}$ 是 $\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$的 Canchy 列。因此 $\Phi^{(n)}\xrightarrow{\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}}$某个 Φ。从而

$$M_t=EM_0+\int_0^t\Phi_s\mathrm{d}B_s.$$

注 对 d 维 Brown 运动可同样定义 Brown 参考族，定理1.9 仍然正确。

$L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty,P)$中元的第二种表示是混沌(chaos)表示。记

$$\Delta_n=\{(t_1,\cdots,t_n):\ t_1<\cdots<t_n\}.$$

于是 $E_n\equiv\{f=f_1(t_1)\cdots f_n(t_n):\ f_i\in L^2\}$是 $L^2(\Delta_n)$ 的生成集，其中 $L^2(\Delta_n)\equiv L^2(\Delta_n,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n)$，在 E_n 上定义

$$J_nf=\int_0^\infty f_1(t_1)\mathrm{d}B_{t_1}\int_0^{t_1}f_2(t_2)\mathrm{d}B_{t_2}\cdots\int_0^{t_{n-1}}f_n(t_n)\mathrm{d}B_{t_n}.$$

我们有

$$\|J_nf\|_{L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty,P)}=\|f\|_{L^2(\Delta_n)}.$$

$\overline{J_n(E_n)}$称为第 n 个 Wiener 混沌空间。对不同 n，它们互相正交。而且

$$L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty,P)=\bigoplus_{n=0}^\infty\overline{J_n(E_n)}\equiv\bigoplus_{n=0}^\infty J_n(L^2(\Delta_n)),$$

$\forall\xi\in L^2(\overline{\mathscr{F}}^0_\infty;P)$ 对应于$\{f^{(n)}\}$ $(f^{(n)}\in L^2(\Delta_n))$：

$$\xi=\sum_0^\infty J_n(f^{(n)}),$$

其中 $J_0(E_n)\equiv\boldsymbol{R}$。这个公式对 $\xi\in\mathscr{E}$（$\mathscr{E}$ 见引理 1.13）时 $f^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)=f(t_1)\cdots f(t_n)$。当 $f=1$时这公式即为下一章§3.2的例1。由此可证对 $\xi\in\mathscr{E}$ 成立，再用引理1.13便得一般的公式。

习　　题

1．在 $C[0,\infty)$ 中定义

$$\rho(w^{(1)},w^{(2)})=\sup_{0\leqslant t}\mathrm{e}^{-t}(|w_t^{(1)}-w_t^{(2)}|\wedge 1)$$

$$(w^{(i)}=(w_t^{(i)})_{t\geqslant0}\in C[0,\infty)),$$

求证 ρ 是距离，而且与 ρ_c 等价。

2．若 $f\in C^2$，X 是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上 Ito 过程，求

$$(p)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{k=0}^{N^{(n)}-1} f\left(\frac{X_{t_k^{(n)}}+X_{t_{k+1}^{(n)}}}{2}\right)\Delta X_{t_k^{(n)}},$$

$$(p)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{k=0}^{N^{(n)}-1} f(\lambda X_{t_k^{(n)}}+(1-\lambda)X_{t_{k+1}^{(n)}})\Delta X_{t_k^{(n)}}\quad(0\leqslant\lambda\leqslant 1).$$

3．若 Φ_s 为($\mathscr{F}_t$)可料过程，$P\left(\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s<\infty\right)<1$，

$$\sigma_n=\inf\left\{t: \int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s\geqslant n\right\}\ (\inf\varnothing\equiv\infty),$$

那么

$$(p)\lim_{n\to\infty}\left(I_{\{\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s<\infty\}}\int_0^t \Phi_s I_{[0,\sigma_n]}(s)\,\mathrm{d}B_s\right)$$

存在。

4．若 Φ_s 有界，那么

$$E\left|\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s\right|^{2m}\leqslant[(\max|\Phi|)^2 t]^m(2m-1)!!.$$

5．若 $\Phi_s\in\mathscr{L}_{2m}(m\geqslant 1)$，则

$$E\left|\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s\right|^{2m}\leqslant[m(2m-1)]^m t^{m-1}\int_0^t E\Phi_s^{2m}\mathrm{d}s.$$

6．设可测过程 Y 为($\mathscr{F}_t^X$)适应，那么存在 $[0,\infty)\times W$ 可测函数 $f(t,w)$，使 $(\lambda\times P)(Y.\neq f(\cdot,X))=0$（$\lambda$ 为 Lebesgue 测度）。

7．证明：X 是($\mathscr{F}_t$)鞅，当且仅当对于 $\forall$ 有界($\mathscr{F}_t$)停时 σ，恒有 $EX_\sigma=$ 常数。

8．($\mathscr{F}_t$) Brown 运动 B，$\tilde{B}$ 相互独立，($\mathscr{F}_t$)适应过程 $\Phi\in\mathscr{L}_2$，则有

$$E\left(\int_0^t \Phi \mathrm{d}\tilde{B}\,\middle|\,\mathscr{F}_t^B\right)=0.$$

9．$(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动 B，$\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$，那么有

$$E\left(\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s \mid \mathscr{F}_t^B\right)=\int_0^t E(\Phi_s \mid \mathscr{F}_s^B)\mathrm{d}B_s.$$

10．若 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$ 且 $\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s\in\mathscr{M}_2$，则 $\Phi\in\mathscr{L}_2$。

11．证明有连续非负上鞅几乎所有的轨道在到达 0 后便停止在 0 上。

12．若 $f\geqslant a>0$，$f\in C_b^{1,2}$，X 为 $\mathscr{I}$to(α,β)，α,β 有界。证明 $f(t,X_t)\exp\left(-\int_0^t\left[\left(\frac{\partial}{\partial_s}+A\right)f(s,X_s)/f(s,X_s)\right]\mathrm{d}s\right.$ 是鞅，其中

$$\alpha=(\alpha_{ij}(x)),\quad \beta=(\beta_i(x)),\quad (a_{ij})=\alpha\alpha^T,$$

$$Af=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}f''_{ij}+\sum_i b_i f'_i.$$

13．若 $\{X_n\}$ 一致可积，则 $E(X_n|\mathscr{F})$ 也一致可积。

14．若任意 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅都是 $(\mathscr{G}_t)$ 鞅，则 $\overline{\mathscr{F}}_t\subset\overline{\mathscr{G}}_t$。

15．证明：

$$P_0(\max_{s\leq t} B_s\geqslant \varepsilon t)\leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon^2 t/2}.$$

16．$\sigma\geqslant 0,\sigma\in C^1$，$\frac{1}{\sigma}$ 在 $\pm\infty$ 都不可积，设 $f(x,t)=\mathrm{e}^{ct}\int_0^x\frac{\mathrm{d}y}{\sigma(y)}$ 对 X 严格递增，$g(t,x)$ 是它的逆，ξ_t 满足

$$\mathrm{d}\xi_t=\alpha\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}B_t.$$

求 $X_t\equiv g(t,\xi_t)$ 满足的方程。

17．α,β,γ 为非负常数，求

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix}X_t\\ Y_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\beta & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_t\\ Y_t\end{pmatrix}\mathrm{d}t+\gamma\mathrm{d}B_t$$

的解，又X的平稳解什么时候存在？协方差是什么？

18. B为r维 Brown 运动，$\Phi=(\Phi^{(1)},\cdots,\Phi^{(n)})^{\tau}$与$B$独立，且$\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$。已知$t^*(t)=\int_0^t\Phi_s^{\tau}\mathrm{d}s$的分布密度$\varphi(t,x)$，求$\int_0^t\Phi_s^{\tau}\mathrm{d}B_s$的分布密度。

第二章　鞅与鞅的随机积分

在五十年代初，Doob 早就注意到可以仿照对 Brown 运动的 Ito 积分给出对于某些鞅的随机积分。他对这些鞅假定了(D)条件：M是$(\mathscr{F}_t)$鞅且存在随机过程 $f_t=f(t,\omega)\in\mathscr{F}_t$，使

$$E[(M_t-M_s)^2|\mathscr{F}_s]=E\left[\int_s^t f(u,\omega)\mathrm{d}u\,|\,\mathscr{F}_s\right].$$

这时只要分别用M_t，$\int_0^t f_u(\omega)\mathrm{d}u$ 代替 Brown 运动 B_t及 t，就可以照搬定义 Ito 积分的一切程式。因为M_t是$(\mathscr{F}_t)$鞅，所以条件(D)等价于条件(D')：

$$M_t^2-\int_0^t f_u\mathrm{d}u \text{ 是}(\mathscr{F}_t)\text{鞅}.$$

略广一些，可以用非负$(\mathscr{F}_t)$适应随机过程 $F=(F_t)_{t\geq 0}$代替$\int_0^t f_u\mathrm{d}u$。只要 M_t，$M_t^2-F_t$都是$(\mathscr{F}_t)$鞅就够了。

给定了鞅M_t，如何判断以上的 F_t存在与否呢？我们知道这直接地关系到能否定义对 M_t的随机积分。因此这是一个非常重要的问题。Doob早期论证的缺点就在于未能在一切鞅中区别出这类非常重要的子类出来。六十年代初 Meyer 解决了这个问题。他证明了只要是平方可积鞅，F_t都存在。继后 Kunita-S. Watanabe 用局部化方法定义了对局部平方可积鞅的积分。Meyer 的理论是导向现代的鞅论与随机积分最关键的一步。自此揭开了新的序幕。

Strasbourg 学派关于随机过程的一般理论，更进一步揭示了随机积分中的一些实质问题。本章的前几节将简要地介绍这个理

论的某些部分。

§2.1 严格事前σ代数及可料时

定义2.1 给定可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上取值于$[0,\infty)$的$\mathscr{F}$随机变量σ，记σ_A为σ在集合A上的限制：

$$\sigma_A \equiv \sigma I_A + (+\infty) I_{A^c} \qquad (A\in\mathscr{F}).$$

易见我们有

(T·1°) 若σ是$(\mathscr{F}_t)$停时，$A\in\mathscr{F}_\sigma$，则σ_A也是$(\mathscr{F}_t)$停时.

定义2.2 给定可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上取值于$[0,\infty)$的$\mathscr{F}$随机变量σ和τ，记

$$[[\sigma,\tau))\equiv\{(t,\omega)\in[0,\infty)\times\Omega:\ \sigma(\omega)\leqslant t<\tau(\omega)\}.$$

它称为(左闭右开的)随机区间. 类似地还可定义$[[\sigma,\tau]]$，$((\sigma,\tau]]$，$((\sigma,\tau))$。需要注意的是：

$$[[\sigma,\tau]]=\{(t,\omega):\ \sigma(\omega)\leqslant t\leqslant\tau(\omega)<\infty\}.$$

记$[[\sigma]]\equiv[[\sigma,\sigma]]$，它称为$\sigma$的图.

易见，对于参考族$(\mathscr{F}_t)$而言，τ是停时等价于$[[\tau,\infty))$是可选集. 这时$I_{((\tau,\infty))}(t,\omega)$为左连适应过程，因此$((\tau,\infty))$是可料集。于是我们有：

(T·2°) 以停时为端点的一切随机区间都是可选集；

(T·3°) 以停时为端点的一切左开右闭随机区间都是可料集；

(T·4°) 若$\xi\in\mathscr{F}_\tau$(τ为停时)，则$\xi I_{[[\tau,\infty))}$是右连左极适应过程(必可选)，$\xi I_{((\tau,\infty))}$是左连适应过程(必可料)；

(T·5°) 若τ为停时，X为循序过程，则$X_\tau I_{\tau<\infty}\in\mathscr{F}_\tau$.

定义2.3 $(\mathscr{F}_t)$停时τ称为$(\mathscr{F}_t)$可料时，如果$[[\tau,\infty))$是可料集.

定义2.4 $(\mathscr{F}_t)$停时τ称为$(\mathscr{F}_t)$可预报时，如果存在停时列$\tau_n\uparrow\tau$，而且在$\{\tau>0\}$上严格地$\tau_n<\tau$(一切n)。这时，τ_n称为

预告 τ 的停时列。

显见，若 τ 是停时，$t_0>0$，则 $\tau+t_0$是可预报时。

(T·6°) 可预报时必是可料时。

事实上，

$$[\![\tau,\infty))=([0,\infty)\times\{\tau=0\})\bigcup\left(\bigcap_n((\tau_n,\infty))\right)\in\mathscr{P}.$$

命题2.7 $\mathscr{O}=\sigma\{[\![\tau,\infty)):\ \text{一切停时}\ \tau\}$；

$$\begin{aligned}\mathscr{P}&=(\{0\}\times\mathscr{F}_0)\vee\sigma\{((\tau,\infty)),\ \text{一切停时}\ \tau\}\\&=\sigma\{[\![\tau,\infty)):\ \text{一切可料时}\ \tau\}\\&=\sigma\{[\![\tau,\infty)):\ \text{一切可预报时}\ \tau\}.\end{aligned}$$

证明 先证前面的等式。记等式右方的 σ 代数为$\mathscr{O}'$。设X为有界右连左极适应过程，令

$$\tau_0^{(n)}=0,$$

$$\tau_{k+1}^{(n)}=\inf\left\{s>\tau_k^{(n)}:\ |X_s-X_{\tau_k^{(n)}}|\vee|X_{s-}-X_{\tau_k^{(n)}}|\geqslant\frac{1}{n}\right\}$$

$$(\inf\varnothing\equiv+\infty).$$

我们有

$$\{\tau_{k+1}^{(n)}\leqslant t\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{\substack{r=t\\ \text{或}\ r\ \text{有理}<t}}\left(\{\tau_k^{(n)}\leqslant r\}\right.$$

$$\left.\bigcap\left\{|X_{\tau_k^{(n)}}I_{\{\tau_k^{(n)}<\infty\}}-X_r|\geqslant\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{n}\right\}\right\}\right).$$

因此由归纳法推出$\{\tau_{k+1}^{(n)}\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$，即 $\tau_{k+1}^{(n)}$是$(\mathscr{F}_t)$ 停时。由于X_t右连续且具有有限左极限，因此 $\tau_k^{(n)}$对 k 严格递增，而且 $\tau_k^{(n)}\uparrow\infty(k\to\infty)$。我们定义

$$X^{(n)}=\sum_{k=0}^{\infty}X_{\tau_k^{(n)}}I_{[\tau_k^{(n)},\tau_{k+1}^{(n)})}(t)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} X_{\tau_k^{(n)}} I_{\{\tau_k^{(n)}<\infty\}} I_{[\tau_k^{(n)},\tau_{k+1}^{(n)})}(t),$$

显见 $X^{(n)} \to X$，如果 $A \in \mathscr{F}_{\tau_k^{(n)}}$，那么 $I_A I_{[\tau_k^{(n)},\tau_{k+1}^{(n)})}(t) = [[(\tau_k^{(n)})_A, (\tau_{k+1}^{(n)})_A)) \in \mathscr{O}'$。于是由典型逼近及（T.4°）推出

$$X_{\tau_k^{(n)}} I_{\{\tau_k^{(n)}<\infty\}} I_{[\tau_k^{(n)},\tau_{k+1}^{(n)})}(t) \in \mathscr{O}',$$

从而得到 $X \in \mathscr{O}'$。再用典型逼近便得 $\mathscr{O} \subset \mathscr{O}'$。但是 $\mathscr{O}' \subset \mathscr{O}$ 显然成立，因此 $\mathscr{O} = \mathscr{O}'$。

其次，我们证明后面的等式。分别记等式右方的各个 σ 代数为 $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3$。由于对于 $A \in \mathscr{F}_s$ 有 $(s,\infty) \times A = ((s_A, \infty))$，利用命题1.2便得 $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}_1$。如果 τ 是停时，那么 $\tau + (1/n)$ 是可预报时，所以

$$((\tau, \infty)) = \bigcup_n [[\tau + (1/n), \infty)) \in \mathscr{P}_3;$$

又若 $A \in \mathscr{F}_0$，则 $[0,\infty) \times A = [[0_A, \infty))$。又因为 0 在 A 上的限制 0_A 符合可预报时定义，所以 $[0,\infty) \times A \in \mathscr{P}_3$。于是 $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}_3$。但是我们显然有 $\mathscr{P}_3 \subset \mathscr{P}_2 \subset \mathscr{P}$。于是命题得证。

推论1 可料过程 X 在停时 τ 上的停止过程 X^τ 可料。

证明 由 $X^\tau = X_0 I_{[0]} + X I_{[[0,\tau]]} + X_\tau I_{((\tau,\infty))}$ 即得。

推论2 停时 τ 为可料时，当且仅当图 $[[\tau]]$ 为可料集。

证明 设 τ 为可料时，$\tau + \frac{1}{n}$ 显然是可预报时，因而也是可料时。于是 $[[\tau]] = \lim_n \left[\left[\tau, \tau + \frac{1}{n}\right)\right)$ 是可料集。反之，如果 $[[\tau]]$ 是可料集，那么 $[[\tau, \infty)) = [[\tau]] \cup ((\tau, \infty))$ 是可料集，因此 τ 是可料时。

我们知道对于 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 τ，τ 前 σ 代数 $\mathscr{F}_\tau$ 在过程的停止研究方面起了很重要的作用。对于 $(\mathscr{F}_t)$ 可料时 τ，还有一个严格事前 σ 代数 $\mathscr{F}_{\tau-}$。它在可料性研究中起重要作用。

定义2.5 对于$(\mathscr{F}_t)$停时τ我们定义严格τ前σ代数为

$$\mathscr{F}_{\tau-}\equiv\mathscr{F}_0\vee\left[\bigvee_t(\mathscr{F}_t\cap\{t<\tau\})\right]$$

$$=\bigvee_t(\mathscr{F}_{t-}\cap\{t\leqslant\tau\})\quad(\mathscr{F}_{0-}\equiv\mathscr{F}_0).$$

易见$\mathscr{F}_{\tau-}\subset\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_{\tau+}$。与(T·1°)类似地我们有

(T·7°) 若σ是$(\mathscr{F}_t)$可料时，$A\in\mathscr{F}_{\sigma-}$，则$\sigma_A$也是$(\mathscr{F}_t)$可料时(参见引理2.3)。

引理2.7 设$(\mathscr{F}_t)$为参考族，σ,τ,τ_n都是$(\mathscr{F}_t)$停时，则我们有

1° $\mathscr{F}_\sigma\cap\{\sigma<\tau\}\subset\mathscr{F}_{\tau-}$ (因此$\{\sigma<\tau\}\in\mathscr{F}_{\tau-}$)；

$\mathscr{F}_\infty\cap\{\tau=\infty\}\subset\mathscr{F}_{\tau-}$ (因此$\{\tau<\infty\}\in\mathscr{F}_{\tau-}$)。

2° 设$\sigma\leqslant\tau$。

若在$\{\sigma<\infty\}$上恒有$\sigma<\tau$，则$\mathscr{F}_\sigma\subset\mathscr{F}_{\tau-}$；

若在$\{\tau>0\}$上恒有$\sigma<\tau$，则$\mathscr{F}_{\sigma}\subset\mathscr{F}_{\tau-}$。

3° 若$\tau_n\uparrow\tau$，则$\mathscr{F}_{\tau_n-}\uparrow\mathscr{F}_{\tau-}$。如果还有：在$\{\tau>0\}$上$\tau_n<\tau$，则$\mathscr{F}_{\tau_n}\uparrow\mathscr{F}_{\tau-}$。

4° 对于$A\in\mathscr{F}_\tau$有$A\cap\mathscr{F}_{\tau-}=A\cap\mathscr{F}_{\tau_A-}$。

证明 1° 设$A\in\mathscr{F}_\sigma$，那么$A\cap\{\sigma<t\}\in\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$。于是

$$A\cap\{\sigma<\tau\}=\bigcup_{r\text{有理}}A\cap\{\sigma<r<\tau\}$$

$$\in\bigcup_{r\text{有理}}(\mathscr{F}_r\cap\{r<\tau\})\subset\mathscr{F}_{\tau-}.$$

又

$$\mathscr{F}_\infty\cap\{\tau=\infty\}=\bigvee_n(\mathscr{F}_n\cap\{\tau=\infty\})$$

$$=\bigvee_n\bigcup_{k=n}^{\infty}(\mathscr{F}_n\cap\{k<\tau\})\subset\mathscr{F}_{\tau-}.$$

2° 在第一个假定下，利用1°，对于$A\in\mathscr{F}_\sigma$我们得到

$$A=(A\cap\{\sigma<\tau\})\cup(A\cap\{\tau=\infty\})\in\mathscr{F}_{\tau-}.$$

在第二个假定下，我们有$\mathscr{F}_\sigma\cap\{\tau=0\}=\mathscr{F}_\sigma\cap\{\sigma=0\}\cap\{\tau=0\}\subset\mathscr{F}_0$，再利用1°便得

$$\mathscr{F}_\sigma\subset(\mathscr{F}_\sigma\cap\{\sigma<\tau\})\cup(\mathscr{F}_\sigma\cap\{\tau=0\})\subset\mathscr{F}_{\tau-}.$$

3° 由于

$$\mathscr{F}_s\cap\{s<\tau\}\subset\bigvee_n(\mathscr{F}_s\cap\{s<\tau_n\})\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{\tau_n-},$$

所以由$\mathscr{F}_{\tau-}$的定义推出

$$\mathscr{F}_{\tau-}\subset\bigvee_n\mathscr{F}_{\tau_n-}\subset\mathscr{F}_{\tau-}.$$

其余结论由2°可推得。

4° 由于$\tau\leqslant\tau_A$，所以$\mathscr{F}_{\tau-}\subset\mathscr{F}_{\tau_A-}$。另一方面由1°我们有

$$A\cap(\mathscr{F}_t\cap\{t<\tau_A\})=A\cap(\mathscr{F}_t\cap\{t<\tau\})\subset A\cap\mathscr{F}_{\tau-},$$

因此还有$A\cap\mathscr{F}_{\tau_A-}\subset A\cap\mathscr{F}_{\tau-}$。由此便得4°。

对于停时σ，严格σ前σ代数$\mathscr{F}_{\sigma-}$和可料σ代数$\mathscr{P}$之间有一个实质的联系。这个联系是由σ的图$[\![\sigma]\!]$给出的。把$[\![\sigma]\!]$看成ω的函数，我们把它改记为$f_\sigma(\omega)$，即

$$f_\sigma(\omega)=(\sigma(\omega),\omega)\quad(\omega\in\{\sigma(\omega)<\infty\}).$$

命题2.2 设σ为$(\mathscr{F}_t)$停时，那么

$$f_\sigma^{-1}(\mathscr{P})=\{\sigma<\infty\}\cap\mathscr{F}_{\sigma-}.$$

即停时图是$\{\sigma<\infty\}\cap\mathscr{F}_{\sigma-}$到$\mathscr{P}$的可测变换。

(同样我们还有$f_\sigma^{-1}(\mathscr{O})=\{\sigma<\infty\}\cap\mathscr{F}_\sigma$。)

证明 对于任意停时τ，由引理2.1我们有

$$f_\sigma^{-1}(((\tau,\infty)))=\{\tau<\sigma<\infty\}\in\{\sigma<\infty\}\cap\mathscr{F}_{\sigma-}.$$

对于$A_0\in\mathscr{F}_0$，我们有

$$f_\sigma^{-1}(\{0\}\times A_0)=\{\sigma=0\}\cap A_0\in\{\sigma<\infty\}\cap\mathscr{F}_{\sigma-}.$$

综上便得$f_\sigma^{-1}(\mathscr{P})\subset\{\sigma<\infty\}\cap\mathscr{F}_{\sigma-}$。反之，对于$A\in\mathscr{F}_0$有

$$A\cap\{\sigma<\infty\}=f_\sigma^{-1}([0,\infty)\times A)\in f_\sigma^{-1}(\mathscr{P});$$

对于 $A\in\mathscr{F}_t$有

$$A\cap\{t<\sigma\}\cap\{\sigma<\infty\}=f_\sigma^{-1}((t,\infty)\times A)\in f_\sigma^{-1}(\mathscr{P}).$$

因此$\mathscr{F}_{\sigma-}\cap\{\sigma<\infty\}\subset f_\sigma^{-1}(\mathscr{P})$。从而它们必须相等。

下面叙述$\mathscr{F}_{\sigma-}$的另一个刻画，即在 $\sigma<\infty$ 上$\mathscr{F}_{\sigma-}$随机变量就是可料过程在σ时刻的值(同样在 $\sigma<\infty$上$\mathscr{F}_\sigma$随机变量是可选过程在σ 时刻上的值)。这就是

命题2.3 对于$\xi\in\mathscr{F}_\infty$，我们有：$\xi\in\mathscr{F}_{\sigma-}$，当且仅当存在可料过程$X$使$\xi I_{\sigma<\infty}=X_\sigma I_{\sigma<\infty}$（若$\mathscr{F}_{\sigma-}$改为$\mathscr{F}_\sigma$则可料相应地应改为可选)，也就是可料过程$X$在$[\![\sigma]\!]$上的值。

证明 充分性。因为由引理2.1知道$\{\sigma<\infty\}\in\mathscr{F}_{\sigma-}$,所以在$\{\sigma<\infty\}$上$X_\sigma I_{\sigma<\infty}=X(f_\sigma(\omega))$是$\mathscr{F}_{\sigma-}$到$\mathscr{P}$，然后再到$\mathscr{B}(R^1)$的复合可测函数，从而$\mathscr{F}_{\sigma-}$可测。而在$\mathscr{F}_{\sigma-}$集$\{\sigma=\infty\}$上$X_\sigma I_{\sigma<\infty}=0$,因此也是$\mathscr{F}_{\sigma-}$可测的。

必要性。对于$A\in\mathscr{F}_{\sigma-}$,由命题2.2存在$C\in\mathscr{P}$,使$f_\sigma^{-1}(C)=\{\sigma<\infty\}\cap A$。取$X=I_C$便有

$$I_A I_{\sigma<\infty}=I_{f_\sigma^{-1}(C)}I_{\sigma<\infty}=I_C(f_\sigma(\omega))I_{\sigma<\infty}=X_\sigma I_{\sigma<\infty}.$$

对于一般$\xi\in\mathscr{F}_{\sigma-}$，我们可用典型逼近定义可料过程$X$使之满足命题要求。

引理2.2 1° 若σ是可料时，τ是停时，则

$$\mathscr{F}_{\sigma-}\cap\{\sigma=\tau\}\subset\mathscr{F}_{\tau-};\ \mathscr{F}_{\sigma-}\cap\{\sigma\leqslant\tau\}\subset\mathscr{F}_{\tau-}$$

(因此$\{\sigma\leqslant\tau\}$，$\{\sigma=\tau\}\in\mathscr{F}_{\tau-}$)。

2° 假若σ,τ是可料时，则

$$\mathscr{F}_{(\sigma,\tau)-}\cap\{\sigma\leqslant\tau\},\ \mathscr{F}_{(\sigma,\tau)-}\cap\{\sigma<\tau\}\subset\mathscr{F}_{\tau-};$$

$$\mathscr{F}_{\sigma-}\cap\mathscr{F}_{\tau-}=\mathscr{F}_{(\sigma\wedge\tau)-},\quad \mathscr{F}_{\sigma-}\vee\mathscr{F}_{\tau-}=\mathscr{F}_{(\sigma\vee\tau)-}.$$

证明 1° 对于$A\in\mathscr{F}_{\sigma-}$,$A\cap\{\sigma\leqslant\tau\}$可写成$A\cap\{\sigma<\tau\}$,$A\cap\{\sigma=\tau\}\cap\{\tau<\infty\}$，$A\cap\{\sigma=\tau=\infty\}$三项的并。由引理2.1可知第

一、三两项属于$\mathscr{F}_{\tau-}$。对于第二项，我们先利用命题2.3取可料过程X，使$X_\sigma I_{\sigma<\infty}=I_A I_{\sigma<\infty}$。于是$XI_{[[\sigma]]}$是可料过程，因此

$$I_A I_{\sigma=\tau<\infty}=X_\sigma I_{\sigma=\tau<\infty}=X_\tau I_{\sigma=\tau<\infty}=(XI_{[[\sigma]]})_\tau I_{\tau<\infty}\in\mathscr{F}_{\tau-}.$$

2° 若$A\in\mathscr{F}_{(\sigma<\tau)-}$，则利用$[[\sigma\vee\tau,\infty))=[[\sigma,\infty))\cap[[\tau,\infty))$，便得$\sigma\vee\tau$可料，再利用1°我们就有

$$A\cap\{\sigma\leqslant\tau\}=A\cap\{\sigma\vee\tau=\tau\}\in\mathscr{F}_{\tau-},$$

$$A\cap\{\sigma<\tau\}=(A\cap\{\sigma\leqslant\tau\})\cap\{\sigma<\tau\}\in\mathscr{F}_{\tau-}.$$

若$A\in\mathscr{F}_{\sigma-}\cap\mathscr{F}_{\tau-}$，则由1°得到

$$A=(A\cap\{\sigma=\sigma\wedge\tau\})\cup(A\cap\{\tau=\sigma\wedge\tau\})\in\mathscr{F}_{(\sigma\wedge\tau)-}.$$

因此$\mathscr{F}_{\sigma-}\cap\mathscr{F}_{\tau-}\subset\mathscr{F}_{(\sigma\wedge\tau)-}\subset\mathscr{F}_{\sigma-}\cap\mathscr{F}_{\tau-}$。这样便得前一个等式。另一个等式证明类似。

引理2.3 1° 若σ是可料时，$A\in\mathscr{F}_{\sigma-}$，则$\sigma_A$是可料时；又若$\xi\in\mathscr{F}_{\sigma-}$，则$\xi I_{[[\sigma,\infty))}$是可料过程。

2° 若σ,τ为可料时，则当A取下列五个集合之一时，σ_A为可料时。这五个集合为

$$\{\sigma<\tau\},\ \{\sigma=\tau\},\ \{\sigma\leqslant\tau\},\ \{\sigma\geqslant\tau\},\ \{\sigma>\tau\}.$$

证明 1° 利用命题2.3并取可料过程X，使$I_A I_{\sigma<\infty}=X_\sigma I_{\sigma<\infty}$，便得$[[\sigma_A]]=[[\sigma]]\cap\{(t,\omega):X=1\}\in\mathscr{P}$，于是由命题2.1推论2可知$\sigma_A$是可料时。再则，对于$\xi=I_A$，我们有$I_A I_{[[\sigma,\infty))}=I_{[[\sigma_A,\infty))}$是可料过程。用典型方法便得：只要$\xi\in\mathscr{F}_{\sigma-}$，$\xi I_{[[\sigma,\infty))}$就是可料过程。

2° 只需注意：引理2.2保证了$\{\tau\leqslant\sigma\}\in\mathscr{F}_{\sigma-}$，从而这些集都是$\mathscr{F}_{\sigma-}$集。

§2.2 截口定理

（一）解析集

定义2.6 设$\mathscr{F}$是集合F的一个含ϕ的子集类。F的子集A

称为$\mathscr{F}$解析集，如果存在紧距离空间E和$A'\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$，使

$$A=\mathrm{Proj}_F A',$$

其中$\mathscr{K}(E)$是E的紧子集类，$\mathrm{Proj}_F A'$表示A'在F上的投影，即$\{x\in F:\ \exists y,使(x,y)\in A'\}$，$(\quad)_{\sigma\delta}$表示集类的可列并后再作可列交运算所得的集类，即

$$\mathscr{H}_\sigma=\left\{\bigcup_n H_n:\ H_n\in\mathscr{H}\right\},$$

$$\mathscr{H}_\delta=\left\{\bigcap_n H_n:\ H_n\in\mathscr{H}\right\},\quad \mathscr{H}_{\sigma\delta}=(\mathscr{H}_\sigma)_\delta.$$

（一般地，空间E的选取依赖于A。）

全体$\mathscr{F}$解析集记成$\mathscr{A}(\mathscr{F})$。我们显然有

(A.1) $\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$;

(A.2) $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2\Rightarrow\mathscr{A}(\mathscr{F}_1)\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}_2)$;

(A.3) $\mathscr{E}\times\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{E}\times\mathscr{F})$（此处$\mathscr{E}$是另一个集合$E$的一个含$\phi$的子集类）。

引理2.4 1° $(\mathscr{A}(\mathscr{F}))_\sigma=(\mathscr{A}(\mathscr{F}))_\delta=\mathscr{A}(\mathscr{F})$;

2° $\mathscr{A}(\mathscr{E})\times\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{E}\times\mathscr{F})$;

3° $\mathscr{A}(D\cap\mathscr{F})=D\cap\mathscr{A}(\mathscr{F})$（$F$的任意子集$D$）;

4° $\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})\Leftrightarrow\{D^c: D\in\mathscr{F}\}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$。

证明 1° 设$A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，$A_n=\mathrm{Proj}_F A_n'$，$A_n'\in(\mathscr{K}(E_n)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$，$E_n$是紧距离空间。首先，取$E=$乘积$\underset{n}{\times}E_n$，它仍是紧距离空间。令$A_n''=\left(\underset{m\neq n}{\times}E_m\right)\times A_n'$。用$E,A_n''$分别替代$E_n,A_n'$，易见$\bigcap_n A_n''\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$。于是

$$\bigcap_n A_n = \mathrm{Proj}_F\left(\bigcap_n A''_n\right) \in \mathscr{A}(\mathscr{F}).$$

其次，改定义E为拓扑和$\bigcup\limits_n E_n$的单点紧化。于是E是紧距离空间，而且$A'_n \in (\mathscr{K}(E_n)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}$，从而

$$\bigcup_n A'_n \in (\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}.$$

因此$\bigcup\limits_n A_n = \mathrm{Proj}_F\left(\bigcup\limits_n A'_n\right) \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$。这就证明了1°。

2° 首先注意，对于$A \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$，它可写成

$$A = \mathrm{Proj}_F \bigcap_k \bigcup_n (K_{nk}\times C_{nk}) \quad (K_{nk}\in\mathscr{K}(E))$$

$$\subset \bigcup_n C_{n1} \in \mathscr{F}_\sigma.$$

因此对于$A \in \mathscr{A}(\mathscr{E}), B \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$，就存在$A_1 \in \mathscr{E}_\sigma$，$B_1 \in \mathscr{F}_\sigma$使$A \subset A_1$，$B \subset B_1$。利用(A.3)及1°我们就得到

$$\begin{aligned} A\times B &= (A\times B_1)\cap(A_1\times B) \\ &\in (\mathscr{A}(\mathscr{E})\times\mathscr{F}_\sigma)\cap(\mathscr{E}_\sigma\times\mathscr{A}(\mathscr{F})) \\ &\subset (\mathscr{A}(\mathscr{E})\times\mathscr{F})_\sigma \cap (\mathscr{E}\times\mathscr{A}(\mathscr{F}))_\sigma \\ &\subset (\mathscr{A}(\mathscr{E}\times\mathscr{F}))_\sigma = \mathscr{A}(\mathscr{E}\times\mathscr{F}), \end{aligned}$$

这里$\mathscr{B}\cap\mathscr{E} = \{B\cap C;\ \forall B\in\mathscr{B},\ \forall C\in\mathscr{E}\}$。

3° $A \in \mathscr{A}(D\cap\mathscr{F})$等价于存在紧距空间$E$及

$$A'' \in (\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta},$$

使$A = \mathrm{Proj}_F[(E\times D)\cap A'']$，此等式等价于$A = D\cap \mathrm{Proj}_F A''$，即$A \in D\cap\mathscr{A}(\mathscr{F})$。

4° 由1°可知$\mathscr{A}(\mathscr{F})$的下述子类：$\mathscr{G} = \{A\in\mathscr{A}(\mathscr{F}):\ A^c \in \mathscr{A}(\mathscr{F})\}$是包含$\mathscr{F}$的$\sigma$代数，从而包含$\sigma(\mathscr{F})$。因此$\sigma(\mathscr{F})\subset \mathscr{A}(\mathscr{F})$。

引理2.5(投影性质) 1° 设$\mathscr{K}(E)$是紧距空间E的紧子集类,那么对于$E\times F$上的$\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F}$解析集有

$$\mathrm{Proj}_F\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}).$$

2° $\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))=\mathscr{A}(\mathscr{F})$.

证明 1° 若$A\in\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})$,则存在紧距空间$E'$使

$$A=\mathrm{Proj}_{E\times F}A',$$

其中

$$A'\in(\mathscr{K}(E')\times\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}\subset(\mathscr{K}(E'\times E)\times\mathscr{F})_{\sigma\delta}.$$

于是

$$\mathrm{Proj}_F A=\mathrm{Proj}_F\mathrm{Proj}_{E\times F}A'=\mathrm{Proj}_F A'\in\mathscr{A}(\mathscr{F}).$$

2° 对$A\in\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))$存在紧距离空间$E$使$A=\mathrm{Proj}_F A'$,其中

$$A'\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{A}(\mathscr{F}))_{\sigma\delta}\subset(\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F}))_{\sigma\delta}$$
$$=\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})$$

(以上用了(A.1)及引理2.4 1°)。于是$A\in\mathrm{Proj}_F\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{F})$。由1°我们立得$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$。所以

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}).$$

反方向的包含关系是显然的。

命题2.4 记$\mathscr{K}$为R^d的全体紧集类,那么

1° $\mathscr{B}(R^d)\subset\mathscr{A}(\mathscr{K})$(因此$\mathscr{A}(\mathscr{B}(R^d))=\mathscr{A}(\mathscr{K})$);

对于任意可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$有

2° $\mathscr{B}(R^d)\times\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})$;

3° $\mathrm{Proj}_\Omega\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$.

证明 1° 若$K\in\mathscr{K}$,则$K^c\in\mathscr{K}_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{K})$。由引理2.4 1°即得1°,

2° 若$B\in\mathscr{K}\times\mathscr{F}$,则由$B^c\subset(\mathscr{K}\times\mathscr{F})_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})$便得2°.

3° 取$K_n\in\mathscr{K}$,使$K_n\uparrow R^d$。对于$A\in\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})$,由引

理2.4我们有

$$(K_n \times \Omega) \cap A \in (K_n \times \Omega) \cap \mathscr{A}(\mathscr{K} \times \mathscr{F})$$
$$= \mathscr{A}((K_n \times \Omega) \cap (\mathscr{K} \times \mathscr{F}))$$
$$= \mathscr{A}(\mathscr{K}(K_n) \times \mathscr{F}).$$

再由引理2.5有 $\mathrm{Proj}_\Omega \mathscr{A}(\mathscr{K}(E) \times \mathscr{F}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{F})$，于是

$$\mathrm{Proj}_\Omega A = \mathrm{Proj}_\Omega \bigcup_n [(K_n \times \Omega) \cap A]$$

$$= \bigcup_n \mathrm{Proj}_\Omega [(K_n \times \Omega) \cap A] \subset \mathscr{A}(\mathscr{F}).$$

（二） Choquet 容度

定义2.7 设 $\mathscr{G}$ 是集合 F 的一些子集组成的格（即对有限交、有限并运算封闭）。若 $\mathscr{G} \supset \mathscr{E}_\delta$，且在 $\mathscr{G}$ 上定义了一个广值实值（即取值于$[-\infty, \infty]$）函数 I，满足

（I_1）单调性：$A, B \in \mathscr{G}, A \subset B$，则 $I(A) \leq I(B)$；

（I_2）上升极限封闭性：$A_n, A \in \mathscr{G}$，$A_n \uparrow A$，则 $I(A_n) \uparrow I(A)$；

（I_3）$\mathscr{E}$ 下降极限封闭性：$A_n \in \mathscr{E}$，$A_n \downarrow A$，则 $I(A_n) \downarrow I(A)$，那么 I 称为$(F, \mathscr{G})$上的Choquet $\mathscr{E}$ 容度。

定义2.8 设 I 为$(F, \mathscr{G})$上的 $\mathscr{E}$ 容度，$A \in \mathscr{G}$ 称为 I 可容的，如果 A 的容度能用含于它的 $\mathscr{E}_\delta$ 集的容度近似，即

$$I(A) = \sup_{B \subset A, B \in \mathscr{E}_\delta} I(B). \tag{2.1}$$

由可容性定义直观地看出，要使 $\mathscr{G}$ 中集合都是可容的，那么 $\mathscr{G}$ 比 $\mathscr{E}_\delta$ 不能大得过多。

可容引理 设 I 是$(F, \mathscr{G})$上 $\mathscr{E}$ 容度。如果 $\mathscr{G} = \mathscr{E}_{\sigma\delta}$，那么 $\mathscr{G}$ 中集合都是 I 可容的。

证明 $\mathscr{E}_{\sigma\delta}$ 中任意集 A 有表示

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{n,m}(A_{n,m}\in\mathscr{E}).$$

我们不妨设 $I(A)>-\infty$，而且设 $A_{n,m}$ 对 $m\uparrow$。由(I_2)，对于任意的 $a<I(A)$，我们有

$$I(A)=\sup_m I(A\cap A_{1,m}).$$

因此存在 m_1，使 $I(A\cap A_{1,m_1})>a$。用归纳法可证对于任意 k 存在 $m_1,\cdots,m_k$，使 $I(A\cap A_{1,m_1}\cap\cdots\cap A_{k,m_k})>a$。再由($I_1$)使得对一切 n 有 $I\left(\bigcap_1^n A_{k,m_k}\right)>a$。从而 $I\left(\bigcap_1^{\infty}A_{k,m_k}\right)\geqslant a$。但是 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{k,m_k}\in\mathscr{E}_\delta$。取 $B=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{k,m_k}$，它满足 $B\subset A$ 且 $I(B)\geqslant a$。所以 A 是 I 可容的。

命题 2.5(Choques 定理) 若 I 是$(F,\mathscr{G})$上的 $\mathscr{E}$ 容度，又设 $\mathscr{G}=\mathscr{A}(\mathscr{E})$，那么 $\mathscr{G}$ 中的集合都是 I 可容的。

证明 对于 $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ 中的集合 A，总存在紧距离空间 E 及 $A'\in(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{E})_{\sigma\delta}$ 使 $A=\mathrm{Proj}_F A'$。令

$$\mathscr{H}=\left\{\bigcup_1^m(K_j\times D_j):\ K_j\in\mathscr{K}(E),\ D_j\in\mathscr{E},\ m\text{ 任意正整数}\right\}.$$

那么 $\mathscr{H}$ 是格，而且 $(\mathscr{K}(E)\times\mathscr{E})_{\sigma\delta}=\mathscr{H}_{\sigma\delta}$。在$(E\times F,\mathscr{H}_{\sigma\delta})$上定义

$$J(H)=I(\mathrm{Proj}_F H).$$

那么 J 是$(E\times F,\mathscr{H}_{\sigma\delta})$上的 Choquet $\mathscr{H}$ 容度。事实上，J 满足(I_1)，(I_2)是显然的。为了验证(I_3)，我们证明：对于 $\mathscr{H}$ 中下降集合 B_n，恒有

$$\bigcap_n \mathrm{Proj}_F B_n=\mathrm{Proj}_F\left(\bigcap_n B_n\right). \tag{2.2}$$

我们显然有 $\mathrm{Proj}_F\left(\bigcap_n B_n\right)\subset\bigcap_n \mathrm{Proj}_F B_n$；反之，对于

$$x\in\bigcap_n \mathrm{Proj}_F B_n,$$

由 $B_n\in\mathscr{K}$ 可知存在 $\mathscr{K}(E)$ 中集合 $K_n\neq\varnothing$，使

$$(E\times\{x\})\cap B_n\supset K_n\times\{x\},$$

而且满足要求 $K_n\downarrow$。又因为 K_n 都是紧集，所以 $\bigcap_n K_n\neq\varnothing$。故而

$$(E\times\{x\})\cap\left(\bigcap_n B_n\right)\supset\left(\bigcap_n K_n\right)\times\{x\}\neq\phi.$$

这说明 $x\in\mathrm{Proj}_F\left(\bigcap_n B_n\right)$。于是(2.2)得证。从而可知 J 满足(I_3)。因此 J 是$(E\times F,\ \mathscr{K}_{\sigma\delta})$上 Choquet $\mathscr{K}$ 容度。再利用可容引理便得到一切 $\mathscr{K}_{\sigma\delta}$ 集都是 J 可容集。最后，由于 $\mathrm{Proj}_F\mathscr{K}_\delta\subset\mathscr{E}_\delta$，我们得到

$$\begin{aligned}I(A)=J(A')&=\sup_{B\subset A',B\in\mathscr{K}_\delta}J(B)\\&=\sup_{B\subset A',B\in\mathscr{K}_\delta}I(\mathrm{Proj}_F B)\\&\leqslant\sup_{D\subset A,D\in\mathscr{E}_\delta}I(D)\leqslant I(A).\end{aligned}$$

因为 A 是 I 可容的。

定义2.9 设可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上一切概率测度的集为 $\mathscr{P}$。记 $\mathscr{F}^{(u)}=\bigcap_{P\in\mathscr{P}}\overline{\mathscr{F}}^P$，其中 $\overline{\mathscr{F}}^P$ 是 $\mathscr{F}$ 的 P 完备化。我们称 $\mathscr{F}^{(u)}$ 为 $\mathscr{F}$ 的普遍完备化 σ 代数，其中集合称为普遍可测集。

显然，$(\overline{\mathscr{F}}^P)^{(u)}=\overline{\mathscr{F}}^P$。

引理2.6 对于可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$有

$$\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{F}^{(u)}=\mathscr{A}(\mathscr{F}^{(u)}).$$

又若$\mathscr{F}$是P完备的，那么$\mathscr{A}(\mathscr{F})=\mathscr{F}$。

证明 对于$P\in\mathscr{P}$及$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，定义

$$I(A)=\inf_{A\subset B\in\mathscr{F}}P(B).$$

易证I是$(\Omega,\mathscr{A}(\mathscr{F}))$上的$\mathscr{F}$容度，而且在$\mathscr{F}$上$I$与$P$一致。由命题2.5，对于$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$有

$$\inf_{A\subset B\in\mathscr{F}}P(B)=I(A)=\sup_{B\subset A,B\in\mathscr{F}}I(B)=\sup_{B\subset A,B\in\mathscr{F}}P(B).$$

因此$A\in\overline{\mathscr{F}}^P$。但是$P$是任意的，因此$A\in\mathscr{F}^{(u)}$。从而

$$\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{F}^{(u)}.$$

再则，$\mathscr{F}^{(u)}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}^{(u)})\subset(\mathscr{F}^{(u)})^{(u)}=\mathscr{F}^{(u)}$。最后，当$\mathscr{F}$为$P$完备时，我们还有$\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{F}^{(u)}\subset\overline{\mathscr{F}}^P=\mathscr{F}$。

（三）截口定理

定义2.10 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，$[0,\infty)\times\Omega$的子集A的初遇（或称下端集）是指从Ω到$[0,\infty]$的函数D_A：

$$D_A(\omega)=\inf\{t\geqslant 0:\ (t,\omega)\in A\}.$$

命题2.6 1° 若$A\in\mathscr{A}(\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathscr{F}))$，则$D_A\in\mathscr{F}^{(u)}$；

2° 若$(\mathscr{F}_t)$是完备化参考族$(\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F})$，$A$是循序集，则$D_A$是$(\mathscr{F}_t)$停时。

证明 1° 由命题2.4之2° 及引理2.6可知

$$\{D_A<t\}=\mathrm{Proj}_\Omega[A\cap[[0,t))]\in\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{F}^{(u)}.$$

2° 因为A是循序的，所以在1°中可用$\mathscr{F}_t$代替$\mathscr{F}$。

推论1 设$(\mathscr{F}_t)$为完备参考族，X是循序过程，则X首达某个Borel集合$B(\in\mathscr{B}(R^1))$的时刻

$$\tau_B=\inf\{t:\ X_t\in B\}$$

是$(\mathscr{F}_t)$停时。

证明 因为$\tau_B = D_{X^{-1}(B)}$，所以由2° 得到$\{\tau_B < t\} \in \mathscr{F}_t$。

推论2 设$(\mathscr{F}_t)$为完备参考族，而且可料集A的初遇的图$[[D_A]] \subset A$，那么D_A是可料时。

证明 $[[D_A]] = A \cap [[0, D_A]] = A \cap [([0,\infty) \times \Omega) \setminus ((D_A, \infty))]$为可料集，由命题2.1推论2便知$D_A$为可料时。

推论3 设$(\mathscr{F}_t)$为完备参考族，$X = (X_t)_{t \geq 0}$是可料的右连续过程，则

$$\tau_a = \inf\{t: |X_t| \geq a\}$$

是可料时。

证明 $\tau_a = D_{X^{-1}((-a,a)^c)}$，由$X_t$之右连性可知

$$[[D_{X^{-1}((-a,a)^c)}]] \subset X^{-1}((-a,a)^c),$$

由推论2推出τ_a是可料时(这里

$$(-a,a)^c = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)).$$

引理2.7 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的广义随机变量族$\mathscr{H}$(可取无穷值)如果对上端运算"$\vee$"封闭，而且在$\mathscr{H}$中存在ξ_0，使$P(\xi_0 > -\infty) = 1$，那么在$\mathscr{H}$中存在ξ_n，使$\xi_n \uparrow$某个η，这个η满足

(S₁) 对于$\forall \xi \in \mathscr{H}$，有$P(\eta \geq \xi) = 1$；

(S₂) 如果η'也满足(S₁)，那么$P(\eta \leq \eta') = 1$。

并且η由(S₁),(S₂)唯一确定。它称为$\mathscr{H}$中元的本质上确界，记成$\mathrm{ess.sup}\mathscr{H}$。

证明 先设$\mathscr{H}$中的元都是非负的。取$\xi_n \in \mathscr{H}$使

$$E\frac{\xi_n}{1+\xi_n} \to \sup_{\xi \in \mathscr{H}} E\frac{\xi}{1+\xi}.$$

我们不妨设$\xi_n \uparrow$ $\left(\text{否则用}\bigvee_1^n \xi_k \text{代替} \xi_n\right)$，因此$\xi_n \uparrow$某个$\eta$。(S₂)显然满足。另一方面，对于任意$\xi \in \mathscr{H}$，我们有

$$E\frac{\eta\vee\xi}{1+\eta\vee\xi}=\lim_n E\frac{\xi_n\vee\xi}{1+\xi_n\vee\xi}\leqslant\lim_n E\frac{\xi_n}{1+\xi_n}$$

$$=E\frac{\eta}{1+\eta}.$$

因此

$$E\left(\frac{\eta\vee\xi}{1+\eta\vee\xi}-\frac{\eta}{1+\eta}\right)=0.$$

从而$\frac{\eta\vee\xi}{1+\eta\vee\xi}=\frac{\eta}{1+\eta}$ a.e.dP,并导致$P(\eta\vee\xi=\eta)=1$.此即(S_1).在一般情形时，我们令$\mathscr{H}_1=\{(\xi-\xi_0)^+:\ \xi\in\mathscr{H}\}$。因为$(\xi_1-\xi_0)^+\vee(\xi_2-\xi_0)^+=(\xi_1\vee\xi_2-\xi_0)^+$，所以$\mathscr{H}_1$对上端运算封闭。记$\eta_1=$ ess.sup $\mathscr{H}_1$。我们来验证$\eta_1+\xi_0$满足(S_1),(S_2)。首先，对于任意$\xi\in\mathscr{H}$，我们有

$$\eta_1+\xi_0\geqslant(\xi-\xi_0)^++\xi_0\geqslant\xi.$$

此即(S_1);其次，设η'满足：对于任意$\xi\in\mathscr{H}$有$P(\eta'\geqslant\xi)=1$.那末$P(\eta'-\xi_0\geqslant(\xi-\xi_0)^+)=1$,因此$\eta'=(\eta'-\xi_0)+\xi_0\geqslant(\xi-\xi_0)^++\xi_0$。从而$\eta'\geqslant\eta_1+\xi_0$。此即$(S_2)$。

唯一性是显然的。最后，关于 ess.sup $\mathscr{H}$的表达式我们有

$$\text{ess.sup}\,\mathscr{H}=\eta_1+\xi_0=\bigvee_n(\xi_n-\xi_0)^++\xi_0$$

$$=\bigvee_n((\xi_n-\xi_0)^++\xi_0)$$

$$=\bigvee_n(\xi_n\vee\xi_0)=\bigvee_{n=0}^{\infty}\xi_n.$$

定义2.11 给定$(\Omega,\mathscr{F},P)$,$[0,\infty)\times\Omega$的子集A称为P不足道集,如果$\text{Proj}_\Omega A\in\overline{\mathscr{F}^P}$，而且$P(\text{Proj}_\Omega A)=0$；过程$X$称为不足道过程，如果$\{X\neq0\}$是不足道集。

命题2.7 若参考族完备，那么$\mathscr{O}=\mathscr{O}^*$（全体右连续适应过程生成的$\sigma$代数，见定义1.8）。

证明 $\mathscr{O}\subset\mathscr{O}^*$是显然的。所以我们只需证明一切右连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程都是$\mathscr{O}$可测的。

首先我们证明：对于右连适应过程X一定存在右连可选过程$\overline{X}$，使$X-\overline{X}$为不足道过程。为此我们记

$\mathscr{H}=\{\tau$：τ为停时且存在可选过程$Y^{(\tau)}$，

$$\text{使}[[0,\tau))\cap\left\{|X-Y^{(\tau)}|\geqslant\frac{1}{n}\right\}\text{为不足道集}\}.$$

对于σ，$\tau\in\mathscr{H}$，只要取$Y^{(\sigma\vee\tau)}\equiv Y^{(\sigma)}I_{\sigma\geqslant\tau}+Y^{(\tau)}I_{\sigma<\tau}$，便得$\sigma\vee\tau\in\mathscr{H}$。我们显然还有$0\in\mathscr{H}$，由引理2.7可知存在$\operatorname{ess.sup}\mathscr{H}$，我们简记它为$\sigma_0$。易见$\mathscr{H}$对递增极限封闭，因此$\sigma_0\in\mathscr{H}$。我们来证明$P(\sigma_0=+\infty)=1$。事实上，集合

$$A\equiv((\sigma_0,\infty))\cap\left\{|X-X_{\sigma_0}|\geqslant\frac{1}{n}\right\}$$

是循序集。于是

$$\{D_A<t\}=\operatorname{Proj}_\Omega([[0,t))\cap A)\in\mathscr{A}(\mathscr{F}_t)=\mathscr{F}_t.$$

即D_A是$(\mathscr{F}_t)$停时。同时，由X的右连续性可推出在$D_A<\infty$上有$D_A>\sigma_0$。

另一方面，只要取$Y^{(D_A)}\equiv Y^{(\sigma_0)}I_{[[0,\sigma_0))}+X_{\sigma_0}I_{[[\sigma_0,D_A))}$便知$D_A\in\mathscr{H}$。因此$P(D_A\leqslant\sigma_0)=1$。从而$P(\sigma_0=\infty)=1$。由$\mathscr{H}$的定义即可知$+\infty\in\mathscr{H}$。我们定义$X^{(n)}=Y^{(+\infty)}$，那么$\{|X-X^{(n)}|\geqslant(1/n)\}$是不足道集。记

$$\hat{X}=\varliminf_{n\to\infty}X^{(n)}I_{\{\varliminf X^{(n)}<\infty\}},$$

那么$\hat{X}$可选，而且$\{X-\hat{X}\neq0\}$是不足道集。再记

$$\Omega_0=\operatorname{Proj}_\Omega\{X=\hat{X}\},$$

那么$P(\Omega_0)=1$。最后，我们定义$\bar{X}=\hat{X}I_{[[0_{\Omega_0},\infty))}$，于是$\bar{X}$是右连续可选过程。而且$X-\bar{X}$是右连续不足道过程。

记$Y=X-\bar{X}$，它是右连续不足道过程。令

$$Y^{(n)}\triangleq Y_0 I_{[[0]]}+\sum_{k=0}^{\infty}Y_{\frac{k+1}{n}}I_{((\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]]},$$

那么因为$Y_0=Y_{\frac{k+1}{n}}=0$ a.e. dP，由$(\mathscr{F}_t)$的完备性便得Y_0，$Y_{\frac{k+1}{n}}\in\mathscr{F}_0$，所以$Y^{(n)}$是可料过程。从而$Y$是可料过程。于是$X=\bar{X}+Y$是可选过程，即$X\in\mathscr{O}$。

命题2.8(截口定理) 给定$(\Omega,\mathscr{F},P)$以及$A\in\mathscr{A}(\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathscr{F})$，必定存在非负的$\mathscr{F}$随机变量$\tau(\omega)$，使

$$[[\tau]]\subset A, \tag{2.3}$$

$$P(\tau<\infty)=P(D_A<\infty). \tag{2.4}$$

这个$\tau(\omega)$称为A的(不计P零测集差异的)一个截口。

($\tau(\omega)$与$D_A(\omega)$不同处：$\tau\in\mathscr{F}$而$D_A\in\mathscr{F}^{(u)}$；$[[\tau]]\subset A$而$[[D_A]]$未必$\subset A$。)

证明 由于$\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\overline{\mathscr{F}}^P$，$P$是$(\Omega,\mathscr{A}(\mathscr{F}))$上的Choquet $\mathscr{F}$容度。记

$$\mathscr{H}=\left\{\bigcup_1^m K_j\times D_j;K_j\in[0,\infty)\text{的紧子集类}\mathscr{K},D_j\in\mathscr{F},\forall m\right\},$$

那么$\mathscr{H}$是格。由命题2.4的2° 我们有

$$\mathscr{A}(\mathscr{H})=\mathscr{A}(\mathscr{K}\times\mathscr{F})=\mathscr{A}(\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathscr{F})).$$

再由命题2.5的证明可知，对于$B\in\mathscr{A}(\mathscr{H})$，

$$I(B)\equiv P(\mathrm{Proj}_\Omega B)(=P(D_B<\infty))$$

是$([0,\infty)\times\Omega,\ \mathscr{A}(\mathscr{H}))$上的$\mathscr{H}$容度。而命题2.5说明了一切

$\mathscr{A}(\mathscr{K})$集都是 I 可容的。因此对于任意 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{K})$及 $\varepsilon>0$，存在 $A_\varepsilon\subset\mathscr{K}_\delta$，使 $A_\varepsilon\subset A$ 而且 $I(A_\varepsilon)>I(A)-\varepsilon$。也就是

$$P(D_{A_\varepsilon}<\infty)>P(D_A<\infty)-\varepsilon.$$

又因为 A_ε 的 w 截口集 $A_\varepsilon(\omega)=\{t:(t,\omega)\in A_\varepsilon\}$ 是紧集，所以 $[[D_{A_\varepsilon}]]\subset A_\varepsilon$。由命题2.6，$D_{A_\varepsilon}\in\mathscr{F}^{(u)}$，因此可取 $\tau_\varepsilon\in\mathscr{F}$，使 $P(\tau_\varepsilon=D_{A_\varepsilon})=1$。我们取 $\{\tau_\varepsilon=D_{A_\varepsilon}\}$ 的一个子集 $\Omega_0\in\mathscr{F}$，使 $P(\Omega_0)=1$。令

$$\hat{\tau}_\varepsilon=(\tau_\varepsilon)_{\Omega_0}\quad（在 \Omega_0 上的限制）.$$

于是$[[\hat{\tau}_\varepsilon]]\subset A$，而且$P(\hat{\tau}_\varepsilon<\infty)>P(D_A<\infty)-\varepsilon$。令$\tau^{(0)}=+\infty$，再归纳地由 $\tau^{(n)}$ 定义 $\tau^{(n+1)}$ 如下：记

$$A_n=A\cap([0,\infty)\times\{\tau^{(n)}=\infty\})$$
$$\in\mathscr{A}(\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathscr{F})).$$

在前段证明中的 $\hat{\tau}_\varepsilon$ 中，我们取 A 为 A_n，取 $\varepsilon=(1/2)P(D_{A_n}<\infty)$。对此 $\hat{\tau}_\varepsilon$ 定义

$$\tau^{(n+1)}=\tau^{(n)}\wedge\hat{\tau}_\varepsilon.$$

由 A_n 的定义可知在$\{\hat{\tau}_\varepsilon<\infty\}$上有 $\tau^{(n)}=\infty$，所以

$$\tau^{(n+1)}I_{\tau^{(n)}<\infty}=\tau^{(n)}I_{\tau^{(n)}<\infty},$$

而且 $[[\tau^{(n+1)}]]\subset A$。同时

$$P(\tau^{(n+1)}<\infty)=P(\tau^{(n)}<\infty)+P(\hat{\tau}_\varepsilon<\infty)$$
$$\geqslant P(\tau^{(n)}<\infty)+\frac{1}{2}P(D_{A_n}<\infty)$$
$$=P(\tau^{(n)}<\infty)$$
$$+\frac{1}{2}P(\{D_A<\infty\}\cap\{\tau^{(n)}=\infty\}).$$

现在我们定义 $\tau=\bigwedge\limits_n\tau^{(n)}$，于是 $\tau I_{\tau^{(n)}<\infty}=\tau^{(n)}I_{\tau^{(n)}<\infty}$，而且$[[\tau]]$

$\subset A$。令 $n\to\infty$，得到

$$P(\tau<\infty)\geqslant P(\tau<\infty)+\frac{1}{2}P(\{D_A<\infty\}\cap\{\tau=\infty\}).$$

因此 $P(\{D_A<\infty\}\cap\{\tau=\infty\})=0$。但是$[[\tau]]\subset A$，所以(2.4)成立。

推论 设$\mathscr{R}$是$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$的一个子代数，那么对于任意$A\in\sigma(\mathscr{R})$及 $\varepsilon>0$，存在 $A_\varepsilon\in\mathscr{R}_\delta$，使 $A_\varepsilon\subset A$，而且

$$P(\mathrm{Proj}_\Omega A_\varepsilon)\geqslant P(\mathrm{Proj}_\Omega A)-\varepsilon. \tag{2.5}$$

证明 设 τ 是 A 的一个截口，即满足(2.3),(2.4)。定义

$$\mu(B)=P([[\tau]]\in B)\quad (B\in\sigma(\mathscr{R})).$$

这是 $\sigma(\mathscr{R})$上一个支集在 A 的有限测度，由测度逼近可知存在 $A_\varepsilon\subset A$，使 $A_\varepsilon\in\mathscr{R}_\delta$且 $\mu(A_\varepsilon)\geqslant\mu(A)-\varepsilon$。此即(2.5)。

下面将证明对于可选、可料等特殊集合，其截口停时可选取成停时、可料时等特殊随机时间。

引理2.8 设$\mathscr{I}$是满足下面条件的$(\mathscr{F}_t)$停时类：$\mathscr{I}$是格且满足：(1) 对递增极限封闭；(2) $0,+\infty\in\mathscr{I}$；(3) 由 $\tau,\sigma\in\mathscr{I}$推出$\tau_{\{\tau<\sigma\}}\in\mathscr{I}$。设$\mathscr{C}=\{$"端点"在$\mathscr{I}$的左闭右开随机区间（简称为$\mathscr{I}$随机区间）的有限并$\}$。那么对于 $B\in\mathscr{C}_\delta$恒有 $[[D_B]]\subset B$,而且存在 $\sigma_0\in\mathscr{I}$，使 $P(D_B=\sigma_0)=1$。

证明 由于构成$\mathscr{C}$中元的随机区间的左"端点"是闭的，所以当 $B\in\mathscr{C}_\delta$时，B的 ω 截口 $B(\omega)=\{t:(t,\omega)\in B\}$ 对于下确界封闭。从而 $[[D_B]]\subset B$。今证第二个结论。为此我们定义

$$\mathscr{H}=\{\sigma:\ \sigma\in\mathscr{I},\sigma\leqslant D_B\}\quad (B\in\mathscr{C}_\delta).$$

它满足引理2.7的条件,故存在 $\sigma_n\in\mathscr{H}$，使 $\sigma_n\uparrow\sigma_0=\operatorname{ess.sup}\mathscr{H}$。由$\mathscr{H}$与$\mathscr{I}$的定义可知 $\sigma_0\in\mathscr{I}$，$\sigma_0\leqslant D_B$。

对此 $B(\in\mathscr{C}_\delta)$，取 $B_n\in\mathscr{C}$，使 $B_n\downarrow B$。由于当 $\sigma,\tau\in\mathscr{I}$ 时 $D_{[[\sigma,\tau))}=\sigma_{\{\sigma<\tau\}}\in\mathscr{I}$ 及 $B_n\cap[[\sigma_0,\infty))\in\mathscr{C}$，所以集合 $B_n\cap[[\sigma_0,\infty))$ 作为$\mathscr{I}$随机区间的有限并应有 $D_{B_n\cap[[\sigma_0,\infty))}\in\mathscr{I}$。于是我们有

$$\sigma_0\leqslant D_{B_n\cap[[\sigma_0,\infty))}\leqslant D_B.$$

所以 $D_{B_n\cap[[\sigma_0,\infty))}\in\mathscr{H}$。但是 σ_0是$\mathscr{H}$中本质最大元，因此

$$P(D_{B_n\cap[[\sigma_0,\infty))}=\sigma_0)=1.$$

于是 a.e. dP地有

$$[[\sigma_0]]=[[D_{B_n\cap[[\sigma_0,\infty))}]]\subset B_n\cap[[\sigma_0,\infty))\subset B_n.$$

由此推得 $P([[\sigma_0]]\subset B)=1$，也就有 $\sigma_0\geqslant D_B$(a.e.dP)。但是按$\mathscr{H}$的定义 $\sigma_0\leqslant D_B$，所以 $P(\sigma_0=D_B)=1$。

命题2.9(可料截口定理) 若 A 是可料集，则对于 $\varepsilon>0$存在可料时 τ，使

$$[[\tau]]\subset A \text{ 且 } P(\tau<\infty)\geqslant P(\mathrm{Proj}_\Omega A)-\varepsilon. \qquad (2.6)$$

证明 令$\mathscr{I}$为全体可料时。由可料时的定义和引理 2.3可知$\mathscr{I}$满足引理2.8的条件，而且 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{P}$。由命题2.8的推论及引理2.8可知，对于 $A\in\mathscr{P}$，存在 $B\in\mathscr{C}_\delta$，使 $B\subset A$，$[[D_B]]\subset B$，而且

$$P(\mathrm{Proj}_\Omega B)\geqslant P(\mathrm{Proj}_\Omega A)-\varepsilon.$$

再由引理2.8推出存在可料时 σ，使 $P(\sigma=D_B)=1$。记

$$\Lambda=\{\omega:([[\sigma]]\cap B)_\omega\neq\varnothing\}.$$

那么 $P(\Lambda)=1$。因为 B 是可料集，所以由命题2.3得到

$$I_\Lambda=(I_B)_{t=\sigma}I_{\sigma<\infty}\in\mathscr{F}_{\sigma-}.$$

取 $\tau=\sigma_\Lambda$，于是由引理2.3推出 τ 是可料时。我们有 $P(\tau=D_B)=1$，

而且$[[\tau]]\subset B$。同时有

$$P(\tau<\infty)=P(D_B<\infty)=P(\mathrm{Proj}_\Omega B)\geqslant P(\mathrm{Proj}_\Omega A)-\varepsilon.$$

注 同样有可选截口定理。证明一样，只需把可料与可料时相应地改成可选与停时。

命题2.10 设X,Y为可料(可选)过程，则下列断言彼此等价：

1° $\{X>Y\}$是不足道集；

2° 对一切有界可料时(有界停时)τ，有$P(X_\tau\leqslant Y_\tau)=1$；

3° 对一切使$X_\tau I_{\tau<\infty}$，$Y_\tau I_{\tau<\infty}$可积的可料时(停时)τ，有

$$E(X_\tau I_{\tau<\infty})\leqslant E(Y_\tau I_{\tau<\infty}). \tag{2.7}$$

证明 1°⇒3°⇒2°显然。今证2°⇒1°。对于可料集$A=\{X>Y\}$，我们利用命题2.9可知，存在可料时τ，使$[[\tau]]\subset A$，而且(2.6)成立。记$r=P(\mathrm{Proj}_\Omega A)$。如果$r>0$，则取$\varepsilon=r/2$，便得$P(\tau<\infty)>0$。因此存在常数$C$使$P(\tau\leqslant C)>0$。于是在有界可料时$\tau\wedge C$上以正概率有$X_{\tau\wedge C}>Y_{\tau\wedge C}$。这与假定2°成立发生矛盾。因此必须有$r=0$。也就是1°成立。

(四) 可料时的可预报性与可料停止定理

引理2.9 设$(\mathscr{F}_t)$完备，则尾定的下降可预报时列(即存在$n_0(\omega)$，只要$n\geqslant n_0(\omega)$，就有$\tau_n=\tau_{n_0(\omega)}$)的极限为可预报时。

证明 因为停时取值于$[0,\infty]$，我们改用新距离$d(x,y)=|e^{-x}-e^{-y}|$作为$[0,\infty)$上欧氏距离的拓扑扩张。由假定可预报时列τ_n尾定且$\tau_n\downarrow\tau$，于是存在停时列$\sigma^{n,k}\uparrow\tau_n$，而且在$\{\tau_n>0\}$上$\sigma^{n,k}<\tau_n$。对固定的$n$，我们可取子列$\sigma^{n,k_n^{(n)}}$，使

$$P\left(d(\sigma^{n,k_n^{(n)}},\tau_n)>\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2^{n+n}}.$$

定义$\sigma_n=\bigwedge_n\sigma^{n,k_n^{(n)}}$。那么在$\{\tau>0\}$上有

$$\sigma_e < \bigwedge_{n=1}^{n_0(\omega)} \tau_n = \tau_\circ$$

设 $\sigma_e \uparrow$ 某个 σ，我们有

$$P\left(d(\sigma,\tau)>\frac{1}{2^e}\right)\leqslant P\left(d(\sigma_e,\tau)>\frac{1}{2^e}\right)$$

$$\leqslant P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{d(\sigma^{n,k_e^{(n)}},\tau_n)>\frac{1}{2^e}\right\}\right)$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left(d(\sigma^{n,k_e^{(n)}},\tau_n)>\frac{1}{2^e}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2^e}.$$

于是

$$P(d(\sigma,\tau)>0)\leqslant P\left(\bigcup_{e=m}^{\infty}\left\{d(\sigma,\tau)>\frac{1}{2^e}\right\}\right)$$

$$\leqslant \sum_{m}^{\infty}\frac{1}{2^e}\to 0\,.$$

可见 $\sigma_e \uparrow \tau$。即 σ_e 是预告 τ 的停时列。从而 τ 是可预报时。

命题2.11 若 $(\mathscr{F}_t)$ 完备，则 $(\mathscr{F}_t)$ 可料时与 $(\mathscr{F}_t)$ 可预报时是一样的。

证明 由(T.6°)可知只需证明可料时的可预报性。记 $\mathscr{I}$ 为全体可预报时。它是格，对递增极限封闭，而且 $0,+\infty\in\mathscr{I}$；如果 $\sigma^{(n)},\tau^{(m)}$ 分别为预告可预报时 σ,τ 的停时列，那么对于固定的 m，$\sigma^{(n)}_{\{\sigma^{(n)}<\tau^{(m)}\}}\wedge n$ 是对 n 递增的停时列，其极限为

$$\sigma_{\{\sigma\leqslant\tau^{(m)}\}\cap\{\tau^{(m)}>0\}}\,.$$

易见后者是可预报时，同时前者为预告它的一个列。由于后者对 m 是尾定的，而且当 $m\to\infty$ 时有极限 $\sigma_{\{\sigma<\tau\}}$，由引理2.9推出

$\sigma_{\{\sigma<\tau\}}$是可预报时，因此$\mathscr{I}$满足引理2.8的条件。再利用命题2.1得到$\mathscr{P}=\sigma(\mathscr{C})$。如果$\tau$为可料时，那么$[[\tau]]\in\sigma(\mathscr{C})$，由引理2.8仿照命题2.9的证明可知，存在$\sigma_n\in\mathscr{I}$，使$[[\sigma_n]]\subset[[\tau]]$，而且

$$P(\sigma_n<\infty)\geqslant P(\tau<\infty)-(1/n).$$

令$\tau_n=\bigwedge_{k=1}^{n}\sigma_k\in\mathscr{I}$。于是$\tau_n\downarrow$某个$\hat{\tau}$，那么我们就有$P(\tau=\hat{\tau})=1$。又由于$[[\tau_n]]\subset[[\tau]]$，所以$\tau_n$是尾定的，再用引理2.9便得$\hat{\tau}$是可预报时。又因为$\hat{\tau}\geqslant\tau$，且$A_0\equiv\{\hat{\tau}>\tau\}$是$P$零测集，如果$\hat{\alpha}_n$是预告$\hat{\tau}$的停时列，那么由$(\mathscr{F}_t)$的完备性可知

$$\alpha_n\equiv\hat{\alpha}_n I_{A_0^c}+\frac{n-1}{n}\tau I_{A_0}$$

也是$(\mathscr{F}_t)$停时，而且它预告了τ，从而τ也是可预报时。

命题2.12(可料停止定理) 设X为$(\mathscr{F}_t)$闭下鞅，τ为$(\mathscr{F}_t)$可料时，那么我们有$X_{\tau-}$可积而且

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_{\tau-})\geqslant X_{\tau-}\text{（鞅的时候取“=”）}.$$

证明 记$\tau^\circ=\tau_{\{\tau>0\}}$，由引理2.3可知它为可料时。我们不妨设$(\mathscr{F}_t)$是完备的，于是$\tau^\circ$是可预报时。设$\tau_n$是预告$\tau^\circ$的停时列。由引理2.1得到$\mathscr{F}_{\tau^\circ-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{\tau_n}$。于是

$$E(X_{\tau^\circ}|\mathscr{F}_{\tau^\circ-})=\lim_n E(X_{\tau^\circ}|\mathscr{F}_{\tau_n})\geqslant\lim_n X_{\tau_n}=X_{\tau^\circ-}.$$

但是$\{\tau>0\}\in\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}_{\tau^\circ-}$，而且$E(\xi I_A|\mathscr{F})=E(\xi I_A|A\cap\mathscr{F})$。由此我们得到

$$\begin{aligned}X_{\tau-}I_{\{\tau>0\}}&=X_{\tau^\circ-}I_{\tau>0}\leqslant E(X_{\tau^\circ}|\mathscr{F}_{\tau^\circ-})I_{\{\tau>0\}}\\&=E(X_{\tau^\circ}I_{\{\tau>0\}}|\mathscr{F}_{\tau^\circ-})\\&=E(X_{\tau^\circ}I_{\{\tau>0\}}|\{\tau>0\}\cap\mathscr{F}_{\tau^\circ-})\end{aligned}$$

$$= E(X_\tau I_{\{\tau>0\}} | \{\tau>0\} \cap \mathscr{F}_{\tau-})$$
$$= E(X_\tau | \mathscr{F}_{\tau-}) I_{\{\tau>0\}}.$$

另一方面，由 X_0 及 $\{\tau=0\} \in \mathscr{F}_{\tau-}$ 得到

$$E(X_\tau | \mathscr{F}_{\tau-}) I_{\{\tau=0\}} = E(X_0 I_{\tau=0} | \mathscr{F}_{\tau-}) = X_0 I_{\{\tau=0\}}.$$

加起来我们便得到

$$E(X_\tau | \mathscr{F}_{\tau-}) \geqslant X_{\tau-}.$$

由 Doob 停止定理可知 $(X_{\tau_n}, X_{\tau:})$ 是下鞅列，因此 $(X^+_{\tau_n}, X^+_{\tau:})$ 也是下鞅列。于是 $\sup\limits_n EX^+_{\tau_n} \leqslant EX^+_{\tau:}$。这就推出 $X_{\tau:-} = \lim\limits_n X_{\tau_n}$ 的可积性。但是 $X_{\tau-} = X_{\tau:-} I_{\{\tau>0\}} + X_0 I_{\{\tau=0\}}$，因此 $X_{\tau-}$ 可积。

§2.3 过程的投影理论与(DL)类下鞅的 Doob-Meyer 分解

在本章自本节起 $(\mathscr{F}_t)$ 恒指完备参考族。

定义2.12 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量 ξ 称为关于（$\mathscr{F}$ 的子 σ 代数）$\mathscr{G}$ 为 σ-可积，如果存在 $\Omega_n \in \mathscr{G}$，使 $\Omega_n \uparrow \Omega$，而且

$$E|\xi I_{\Omega_n}| < \infty.$$

定义2.13（条件期望的推广） 设 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 为 σ-可积，定义 $E(\xi|\mathscr{G})$ 为 $\mathscr{G}$ 可测的 ξ，如果

$$E(\xi I_A) = E(\xi I_A) \quad (\forall A \in \mathscr{G} \text{ 满足 } E|\xi I_A| < \infty).$$

显然 $E(\xi|\mathscr{G})$ 存在唯一，而且满足通常条件期望的一些性质。特别地，也有 $E(\xi I_A|\mathscr{G}) = E(\xi I_A|A \cap \mathscr{G})$ $(A \in \mathscr{G})$。

命题2.13（可测过程的可选投影） 设 $(\mathscr{F}_t)$ 是完备参考族，X 为可测过程，而且对于任意 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 τ，$X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$ 关于 $\mathscr{F}_\tau$ 为 σ 可积。那么存在唯一可选过程，记成 ${}^{\circ}X$，满足

$$E(X_\tau I_{\{\tau<\infty\}} | \mathscr{F}_\tau) = {}^{\circ}X_\tau I_{\{\tau<\infty\}} \text{（任意停时 } \tau, \text{a.e.} dP\text{）}. \quad (2.8)$$

这个$^{\circ}X$称为X的可选投影. 特别, 循序过程的可选投影存在.

证明 唯一性是命题2.10的推论. 今证存在性. 首先由命题2.10可知, 如果$X\geqslant 0$且$^{\circ}X$存在, 那么$\{^{\circ}X<0\}$是不足道集. 如果$X=I_{[s,u)\times A}$, 那么由于$(\mathscr{F}_t)$的右连性, 我们可选取$E(I_A|\mathscr{F}_t)$的一个右连左极修正. 于是令$^{\circ}X=I_{[s,u)}E(I_A|\mathscr{F}_t)$. 易验证$^{\circ}X$满足(2.8). 与命题1.3证明类似地用典型方法就推出, 对于有界可测的X存在$^{\circ}X$满足(2.8). 现在设X可测且非负, 并且满足命题条件. 对于任意取定的停时τ, 利用推广了的条件期望的单调收敛定理, 我们得到

$$E(X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}|\mathscr{F}_\tau)=\lim_n E((X\wedge n)_\tau I_{\{\tau<\infty\}}|\mathscr{F}_\tau)$$

$$=\lim_n {}^{\circ}(X\wedge n)_\tau I_{\{\tau<\infty\}},\quad \text{a.e.}dP.$$

令$Y=\varlimsup_n {}^{\circ}(X\wedge n)$. 那么$\{Y=+\infty\}$必是不足道集. 事实上, 如果$P(\mathrm{Proj}_\Omega\{Y=+\infty\})>0$, 那么由可选截口定理(命题2.9的注)可知存在停时τ, 使$[\![\tau]\!]\subset\{Y=+\infty\}$, 而且$P(\tau<\infty)>0$. 这样在$\{\tau<\infty\}$上$Y_\tau=+\infty$, 这与$X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$关于$\mathscr{F}_\tau$的$\sigma$可积性相矛盾. 因此$\{Y=+\infty\}$是不足道集. 我们定义

$$^{\circ}X=YI_{\{Y<\infty\}}.$$

于是$^{\circ}X$满足(2.8). 一般的X只是满足命题条件, 我们可定义

$$^{\circ}X={}^{\circ}(X^+)-{}^{\circ}(X^-).$$

命题2.13′(可测过程的可料投影) 设$(\mathscr{F}_t)$为完备参考族, X为可测过程, 而且对于任意$(\mathscr{F}_t)$可料时τ, $X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$关于$\mathscr{F}_{\tau-}$为$\sigma$可积, 那么存在唯一可料过程, 记成$^{p}X$, 满足: 对任意可料时$\tau$

$$E(X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}|\mathscr{F}_{\tau-})={}^{p}X_\tau I_{\{\tau<\infty\}},\quad \text{a.e.}dP. \tag{2.9}$$

这个^{p}X称为X的可料投影.

证明 若$X=I_{(s,u]\times A}$, 则取$^{p}X=I_{(s,u]}E(I_A|\mathscr{F}_t)_-$. 其余步

骤与证明命题2.13相仿。

可选投影与可料投影有类似于条件期望的一些性质：

1° Y可选，X可测且$^{\circ}X$存在，则$^{\circ}(XY)={}^{\circ}X\cdot Y$；

2° Y可料，X可测且^{p}X存在，则$^{p}(XY)={}^{p}X\cdot Y$；

3° X可测而且$^{\circ}X$，^{p}X都存在，则$^{p}({}^{\circ}X)={}^{\circ}({}^{p}X)={}^{p}X$。

推论1 令

$$\mathscr{F}_J=\sigma\{M_\cdot-M_{\cdot-}:\ \forall\text{ 有界}(\mathscr{F}_t)\text{鞅 }M\},$$

则

$$\mathscr{O}=\mathscr{P}\vee\mathscr{F}_J。$$

证明 $\forall$有界随机变量ξ，有$I_{[0,u)}(t)(E(\xi|\mathscr{F}_t)-E(\xi|\mathscr{F}_{t-}))\in\mathscr{F}_J$，所以$I_{[0,u)}(t)E(\xi|\mathscr{F}_t)\in\mathscr{P}\vee\mathscr{F}_J$，从而左含一切可选投影。

推论2 对于Brown参考族$(\mathscr{F}_t^0)$而言，$\mathscr{O}=\mathscr{P}$。

证明 由定理1.9及推论1即得。

例1 设M是(右连左极)$(\mathscr{F}_t)$有界鞅，那么

$$^{p}(MI_{[0,t]})=M_-I_{[0,t]}\quad(M_-\text{ 为 }M\text{ 的左极限过程})。$$

事实上，由可料停止定理，对于任意可料时τ，有

$$E[(M_\tau-M_{\tau-})I_{\tau\leq t}|\mathscr{F}_{\tau-}]=0。$$

显然$M_-I_{[0,t]}$可料，因此是$^{p}(MI_{[0,t]})$。

定义2.14 $([0,\infty)\times\Omega,\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F})$上$\sigma$有限测度$\mu$称为$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$随机测度。

例2 设A_t是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上零初值右连续增过程，定义

$$\mu_A(D)=E\left(\int I_D\mathrm{d}A_t\right)\quad(D\in\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F})。\tag{2.10}$$

那么μ_A是$\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathscr{F})$随机测度。事实上，用典型方法可验证$\int I_D\mathrm{d}A_t$有意义，为$\mathscr{F}\rightarrow\mathscr{B}([0,\infty])$可测，并且$\mu_A$是测度。下面验证其$\sigma$有限性。设$\tau_n=\operatorname{Inf}\{t:\ A_t\geq n\}$，则

$$\{\tau_n \leqslant s\} = \{A_s \geqslant n\} \in \mathscr{F},$$

所以 τ_n 是随机时间。取 $D_n = [\![0,\tau_n)\!)$，于是 $D_n \uparrow [0,\infty)\times\Omega$，而且 $\mu_A(D_n) = EA_{\tau_n -} \leqslant n$。因此 μ_A 是 σ 有限的。我们称它为右连增过程生成的测度。

引理2.10 设 μ 为 $\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$ 随机测度，则下面三种说法彼此等价：

1° μ 是由右连增过程生成的；

2° μ 在 P 不足道集生成的 σ 环 $\mathscr{N}$ 上恒为0；

3° $P^{(t)}(A) \equiv \mu([0,t]\times A)$ $(A \in \mathscr{F})$，恒有 $\mathrm{d}P^{(t)} \ll \mathrm{d}P$ $(\forall t \geqslant 0)$。

在条件成立下，对应于1°的右连增过程是唯一的，它就是 $\dfrac{\mathrm{d}P^{(t)}}{\mathrm{d}P}$ 的右连续修正。

证明 因为 A 是 P 零测集等价于 $[0,t]\times A$ 是 P 不足道集，因此2°等价于3°。

1°⇒3°：由于 $P^{(t)}(A) = E(I_A A_t)$，所以 $\mathrm{d}P^{(t)} \ll \mathrm{d}P$；此时还有 $A_t = \dfrac{\mathrm{d}P^{(t)}}{\mathrm{d}P}$ (a.e. $\mathrm{d}P$)。

3°⇒1°：由定义可知 $\dfrac{\mathrm{d}P^{(t)}}{\mathrm{d}P}$ (a.e. $\mathrm{d}P$)↑，作它的右连修正，即令 $\tilde{A}_t = \sup\limits_{\text{有理}\, r \leqslant t} \dfrac{\mathrm{d}P^{(r)}}{\mathrm{d}P}$，则有

$$P\left(\tilde{A}_t \leqslant \frac{\mathrm{d}P^{(t)}}{\mathrm{d}P} \leqslant \tilde{A}_{t+}\right) = 1,$$

于是 $A_t = \tilde{A}_{t+}$ 即是 $\dfrac{\mathrm{d}P^{(t)}}{\mathrm{d}P}$ 的右连续修正。易验证 μ 由 A_t 生成。

下面我们局限于讨论右连增过程生成的 $\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathscr{F})$ 随机测度。这时由引理2.10可知 $\mu_A \longleftrightarrow A_t$ 的对应是一一的。但是如

果只在$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$的某个子$\sigma$代数，例如$\mathscr{O}$，$\mathscr{P}$，…等，就未必唯一了，而且也未必能保持$\sigma$有限性。

最简单的情形是$A_t=t$。这是连续而且非随机情形，易见它所生成的$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$随机测度$\mu_A$限制在$\mathscr{P}$上仍旧是$\sigma$有限的。在第一章中定义的$\mathscr{L}_2$函数$\Phi$的 Ito 积分$\int_0^t \Phi dB$所确定的对应$\Phi\to\int_0^t \Phi_s dB_s$就是 Hilbert 空间$L_2([0,t]\times\Omega,\ ([0,t]\times\Omega)\cap\mathscr{P},\ \mu_A)$到$L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$的等距算子。

一般的右连增过程A_t生成的μ_A什么时候能限制在$\mathscr{P}$上成为σ有限测度呢？我们规定μ_{A_1}与μ_{A_2}等价（或A_1与A_2等价），如果它们限在$\mathscr{P}$上相等。这样就把全体右连增过程生成的$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$随机测度分成了一些等价类，以便在每一个类中找一个性质"好"的"代表"。

定义2.15 $\mathscr{P}$上的σ有限测度如果是某个μ_A在$\mathscr{P}$上的限制，则称为$\mathscr{P}$上的 Doleans 测度。

上面的每一个等价类就对应$\mathscr{P}$上一个测度，我们要区别出哪些等价类对应于 Doleans 测度。为此，我们先放弃σ有限性的限制，而考虑$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$上所有在不足道集上取值为0的测度，把这些测度也按前面的办法根据是否在$\mathscr{P}$上相等分成等价类，并记μ所在的等价类为$[\mu]$。$[\mu]$对应$\mathscr{P}$上的一个测度，反之对于$\mathscr{P}$上的一个测度μ有一个$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$上的自然扩张：$\int {}^{P}(I_D)d\mu$（$\forall D\in\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$），它与$\mu$分别在$\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathscr{F})$上和$\mathscr{P}$上的$\sigma$有限与否是一致的，我们称它为$\mu$的可料投影。由此一个等价类$[\mu]$也确切地定义了一个它的可料投影。

定义2.16 设$[\mu]$是$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$上全体在不足道集上取0的测度按在$\mathscr{P}$上相等与否分成的等价类之一。$[\mu]$的可料投影是指测度$\int {}^{P}(I_D)d\mu$，其中$\mu\in[\mu]$，${}^{P}(I_D)$是$I_D$的可料投影，$D\in$

$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$，易见这只依赖于等价类。我们记成 $\mu^p(D)=\int^p(I_D)\mathrm{d}\mu$。它是 $\mu|_{\mathscr{P}}$ 的一个扩张。此定义等价于：对于任意非负有界可测过程 X 恒有 $\int^p X\mathrm{d}\mu=\int X\mathrm{d}\mu^p$。$\mu$ 称为可料测度，如果 $\mu^p=\mu$。显见，测度的可料投影必是可料测度。注意 $^p(I_D)$ 是过程的可料投影，而 μ^p 是测度的可料投影。它就是 $[\mu]$ 中的一个"好"的代表。$[\mu]$ 在 $\mathscr{P}$ 的 σ 有限性等价于 μ^p 在 $\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$ 的 σ 有限性。我们有兴趣的正是这种情况。所以我们要通过 A_t 来判别 $[\mu_A]$ 的可料投影的 σ 有限性。

定义2.17 若 $(\mu_A)^p$ 能由一个可料的右连续增过程 $\tilde{A}$ 生成，则我们称 $\tilde{A}_t$ 为 A_t 的可料对偶投影。为记号有对称性，$\tilde{A}$ 也常记成 A^p。

往证对于 A 而言，存在 A^p 等价于 μ_A^p 的 σ 有限性，也等价于 A_t 局部可积。又由于 μ_A^p 是一个可料测度，所以我们先讨论一般可料测度的等价条件，然后落实到 μ_A^p。为此需要

引理2.11（停时图的分解） 若 σ 是 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，则存在集合 $A\in\mathscr{F}_{\sigma-}$，使

(i) σ_A 为可及时，即存在可料时 τ_n，使

$$[[\sigma_A]]\subset\bigcup_n[[\tau_n]].$$

(ii) σ_{A^c} 为绝不可及时，即对于任意可料时 τ 恒有 $P(\{\sigma_{A^c}=\tau\}\cap\{\sigma_{A^c}<\infty\})=0$（显见 $[[\sigma]]=[[\sigma_A]]\cup[[\sigma_{A^c}]]$，而且不妨假定 $[[\tau_n]]$ 两两不交）。

证明 令

$$\mathscr{H}=\{I_{\bigcup_n\{\sigma_n=\sigma<\infty\}}:\ \sigma_n\ 是可料时\}.$$

由引理2.2可知 $\mathscr{H}\subset\mathscr{F}_{\sigma-}$，而且 $\mathscr{H}$ 对于它的可列个元的上端运算（$\vee$）封闭。如果 $\mathscr{H}=\varnothing$，则取 $A=\varnothing$ 即可。如果 $\mathscr{H}\neq\varnothing$，则取 A 使 $I_A=\text{ess.sup}\,\mathscr{H}\in\mathscr{H}$，那么 σ_A 为可及时，σ_{A^c} 为绝不可及

时。

引理2.12 设$(\mathscr{F}_t)$完备。X为右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程，那么X为可料的充分条件为下面条件同时成立：

1° 对任意$(\mathscr{F}_t)$绝不可及时σ，在$\{\sigma<\infty\}$上总有

$$P(X_\sigma = X_{\sigma-}) = 1;$$

2° 对任意$(\mathscr{F}_t)$可料时τ有：$X_\tau I_{\tau<\infty} \in \mathscr{F}_{\tau-}$。

（此两条件也是必要条件，但本书略去了。）

证明 记$X_- = (X_{t-})_{t\geqslant 0}(X_{0-} \equiv X_0)$。

1° 首先证明$\{X\neq X_-\}$可表成不交严格正的停时图之并$\bigcup\limits_n [\![\tau_n]\!]$。事实上，在命题2.1的证明中我们构造了一列严格正的停时$\tau_k^{(n)}$。我们先来证明

$$\{X\neq X_-\} \subset \bigcup_{n,k} [\![\tau_k^{(n)}]\!].$$

设(t_0,ω)是左边的一个点，则一定有n，使$|X_{t_0}(\omega) - X_{t_0-}(\omega)| \geqslant (3/n)$。对此$n$存在$k$，使$\tau_k^{(n)}(\omega) < t_0 \leqslant \tau_{k+1}^{(n)}(\omega)$。但是按$\tau_{k+1}^{(n)}(\omega)$的定义$t_0 < \tau_{k+1}^{(n)}(\omega)$是不可能的，因此$\tau_{k+1}^{(n)}(\omega) = t_0$，即$(t_0,\omega) \in$右边集合。现在我们要把右边集合中不属于左边集合的点清除掉。注意到$I_{\{X\neq X_-\}}$是循序过程，所以$I_{\{X_{\tau_k^{(n)}}\neq X_{\tau_k^{(n)}-},\, \tau_k^{(n)}<\infty\}} \in \mathscr{F}_{\tau_k^{(n)}}$。定义$\tilde{\tau}_k^{(n)} = (\tau_k^{(n)})_{\{X_{\tau_k^{(n)}}\neq X_{\tau_k^{(n)}-},\, \tau_k^{(n)}<\infty\}}$，便得

$$\{X\neq X_-\} = \bigcup_{n,k} [\![\tilde{\tau}_k^{(n)}]\!].$$

将$\{\tilde{\tau}_k^{(n)}\}_{k,n}$重新赋以足标，就得到所要的$\{\tau_n\}$。

2° 证明本引理如下：由1° 及引理2.11得到

$$\{X\neq X_-\} \subset \bigcup_n [\![\tau_n^{(a)}]\!] \cup [\![\tau_n^{(i)}]\!],$$

其中 $\tau_n^{(a)}$ 为 $(\mathscr{F}_t)$可及时，$\tau_n^{(i)}$ 为绝不可及时。由假定 1° 推出 $P(\tau_n^{(i)}=+\infty)=1$，所以 $I_{[[\tau_n^{(i)},\infty[[}$是右连不足道过程．由命题2.7证明的最后一段可知它是可料过程。因此 $\tau_n^{(i)}$ 是可料时。于是存在可料时列 $\{\sigma_n^\circ\}$，使 $\{X\neq X_-\}\subset\bigcup_n[[\sigma_n^\circ]]$。再利用引理2.2及引理2.3可知

$$\sigma_n \doteq (\sigma_n^\circ)_{\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}(\sigma_k^\circ\neq\sigma_n^\circ)}$$

是可料时，而且 $\{X\neq X_-\}\subset\bigcup_n[[\sigma_n]]$。

于是

$$X=X_-I_{\bigcap\limits_n[[\sigma_n]]^c}+\sum_n X_{\sigma_n}I_{\sigma_n<\infty}(I_{[[\sigma_n,\infty[[}-I_{]]\sigma_n,\infty[[})$$

是可料过程。

引理2.13（时间变换） 设 A_t 为右连$(\mathscr{F}_t)$适应增过程。记

$$C_t\doteq\inf\{s:\ A_s>t\},\quad \tilde{C}_t\doteq\inf\{s:\ A_s\geqslant t\}.$$

它们分别是 A_t的右连续逆与左连续逆，而且 $\tilde{C}_t=C_{t-}$,$C_t=\tilde{C}_{t+}$，C_t 是$(\mathscr{F}_{T+})$停时，$\tilde{C}_t$ 是$(\mathscr{F}_t)$停时。当 A_t 还是可料的时候，$\tilde{C}_t$是$(\mathscr{F}_t)$可料时，而且对于非负有界可测过程 X 有

$$\int_0^\infty X_s\mathrm{d}A_s=\int_0^\infty X_{\tilde{C}_s}I_{\tilde{C}_s<\infty}\mathrm{d}s. \tag{2.11}$$

证明 $\tilde{C}_t$的可料性见命题2.6推论3。(2.11)式可用典型方法先验证 $X=I_{[u,\infty)\times A}$ 情形。

命题2.14 设$(\mathscr{F}_t)$完备，则下面三个叙述彼此等价：

1° μ是 σ 有限的可料测度(等价于：μ是 $\mathscr{P}$上 σ 有限的可料测度)；

2° μ 是右连增过程产生的可料测度；

3° μ 是右连可料增过程产生的测度。

证明 由例 2 和引理2.10推得1°与2°等价。今证3°⇒2°。由3°可知 $\mu=\mu_A$ 且 A_t 可料。利用引理2.13及命题2.13′我们有：对于非负有界可测的 X 有

$$\int X \mathrm{d}\mu_A = E\left(\int_0^\infty X_s \mathrm{d}A_s\right) = E\left(\int_0^\infty X_{\check{C}_s} I_{\check{C}_s<\infty} \mathrm{d}s\right)$$

$$= \int_0^\infty E(X_{\check{C}_s} I_{\check{C}_s<\infty}) \mathrm{d}s = \int_0^\infty E({}^pX_{\check{C}_s} I_{\check{C}_s<\infty}) \mathrm{d}s$$

$$= E\left(\int_0^\infty {}^pX_s \mathrm{d}A_s\right) = \int {}^pX \mathrm{d}\mu_A$$

$$= \int X \mathrm{d}(\mu_A^p).$$

因此 $\mu_A=\mu_A^p$，即 μ_A 可料。最后证明 2°⇒3°。首先我们易验证：对于任意 $A\in\mathscr{F}$，$I_A I_{[\![0,t]\!]}$ 与 $E(I_A|\mathscr{F}_t)I_{[\![0,t]\!]}$ 在任意停时图上都有相同的均值，因此由命题 2.10 推得

$${}^o(I_A I_{[\![0,t]\!]}) = {}^o(E(I_A|\mathscr{F}_t)I_{[\![0,t]\!]}).$$

于是对于可料测度 μ_A 及非负有界可测过程X有

$$\int X \mathrm{d}\mu_A = \int X \mathrm{d}(\mu_A^p) = \int {}^pX \mathrm{d}\mu_A = \int {}^p({}^oX) \mathrm{d}\mu_A$$

$$= \int {}^oX \mathrm{d}(\mu_A^p) = \int {}^oX \mathrm{d}\mu_A.$$

取X为上面的 $I_A I_{[\![0,t]\!]}$，那么

$$E(A_t I_A) = \int I_A I_{[\![0,t]\!]} \mathrm{d}\mu_A = \int {}^o(I_A I_{[\![0,t]\!]}) \mathrm{d}\mu_A$$

$$= \int {}^o(E(I_A|\mathscr{F}_t)I_{[\![0,t]\!]}) \mathrm{d}\mu_A = E(A_t E(I_A|\mathscr{F}_t))$$

$$= E(E(A_t|\mathscr{F}_t)E(I_A|\mathscr{F}_t))$$
$$= E(E(A_t|\mathscr{F}_t)I_A).$$

所以 $P(A_t = E(A_t|\mathscr{F}_t)) = 1$。因此 A_t 是 $(\mathscr{F}_t)$ 适应的。再证明 A_t 满足引理 2.12 的条件。设 σ 为绝不可及时，那么显见 ${}^p(I_{[[\sigma]]}) = 0$。于是

$$E(A_\sigma - A_{\sigma-}) = \int {}^p(I_{[[\sigma]]})\mathrm{d}\mu_A = 0.$$

所以 $P(A_\sigma \neq A_{\sigma-}, \sigma < \infty) = 0$。再则，对于任意 $A \in \mathscr{F}$，及可料时 τ，$I_A I_{[[0,\tau]]}$ 与 $E(I_A|\mathscr{F}_{\tau-})I_{[[0,\tau]]}$ 在任意可料时图上都有相同的均值，因此由命题 2.10 推出 ${}^p(I_A I_{[[0,\tau]]}) = {}^p(E(I_A|\mathscr{F}_{\tau-})I_{[[0,\tau]]})$，与前面证明类似地有

$$E(A_\tau I_A) = \int I_A I_{[[0,\tau]]}\mathrm{d}\mu_A$$
$$= \int E(I_A|\mathscr{F}_{\tau-})I_{[[0,\tau]]}\mathrm{d}\mu_A$$
$$= E(A_\tau E(I_A|\mathscr{F}_{\tau-})) = \cdots$$
$$= E(I_A E(A_\tau|\mathscr{F}_{\tau-})).$$

所以 $A_\tau = E(A_\tau|\mathscr{F}_{\tau-}) \in \mathscr{F}_{\tau-}$。从而由引理 2.1 得 $A_\tau I_{\tau<\infty} \in \mathscr{F}_{\tau-}$。这样就知道 A_t 满足引理 2.12条件，所以 A_t 是可料过程。

命题2.15 右连增过程 A_t 存在可料对偶投影，当且仅当 A_t 是局部可积的，即 A_0 关于 $\mathscr{F}_0$ 为 σ 可积，而且存在停时列 $\tau_n \uparrow \infty$，使 $E(A_{\tau_n} - A_0) < \infty$。

证明 必要性。令 $\Omega_n = \{\tilde{A}_0 \leqslant n\} \uparrow \Omega$，我们有 $\Omega_n \in \mathscr{F}_0$，而且

$$E(A_0 I_{\Omega_n}) = \mu_A(\{0\} \times \Omega_n) = \mu_{\tilde{A}}(\{0\} \times \Omega_n)$$
$$= E(\tilde{A}_0 I_{\Omega_n}) \leqslant n.$$

所以 A_0 关于 $\mathscr{F}_0$ 为 σ- 可积。我们指出 $\tilde{A}_t$ 为局部可积。事实上，不妨设 $\tilde{A}_0 = 0$。令 $\sigma_n = \inf\{t;\ \tilde{A}_t \geqslant n\}$，它是可料时且恒正，因此存

在停时 $\sigma_{n,k}<\tilde{C}_n$，使 $\sigma_{n,k}\uparrow\tilde{C}_n(k\to\infty)$。记 $\tau_n=\bigvee_{k=1}^{n}\sigma_{n,k}$，那么 $\tau_n<\tilde{C}_n$，所以 $\tilde{A}_{\tau_n}\leqslant n$。这说明 $\tilde{A}_t$ 局部可积。现在我们有

$$E(A_{\tau_n}-A_0)=\mu_A(]]0,\tau_n]])=\mu_{\tilde{A}}(]]0,\tau_n]])$$
$$=E(\tilde{A}_{\tau_n}-\tilde{A}_0)<\infty.$$

即 A_t 是局部可积的。

充分性。设 A_t 局部可积。我们只需证明 $\mu_A|_{\mathscr{P}}$ 是 σ 有限的，因为由 $\mu_A|_{\mathscr{P}}$ 的 σ 有限性可推出 μ_A^p 的 σ 有限性。由命题 2.14便知道 μ_A^p 是由某个右连可料过程 $\tilde{A}$ 生成的。为了证明 $\mu_A|_{\mathscr{P}}$ 是 σ 有限的，我们不妨设 $A_0=0$。这样，对于停时 $\tau_n\uparrow\infty$ 且 $EA_{\tau_n}<\infty$，我们有 $\mu_A([[0,\tau_n]])=EA_{\tau_n}<\infty$。这说明 $\mu_A|_{\mathscr{P}}$ 确是 σ 有限的。

注 1 相应于可料对偶投影 $A_t^p=\tilde{A}_t$，我们还有 A_t 的可选对偶投影 A_t^o。叙述与证明完全相仿，只要在命题、定义、证明中把“可料”改为“可选”，“可料时”改为“停时”，“可料增过程”改为“适应增过程”，A_t 的“局部可积性”改为“准局部可积性”(即 $A_0=0$，且存在停时列 $\tau_n\uparrow\infty$，使 $EA_{\tau_n-}<\infty$)。由定义还知道 $A-A^p$ 是局部鞅。

注 2 对于$(\mathscr{F}_t)$过程，可料对偶投影这个概念可以推广到局部可积变差过程（即局部可积的有限变差过程，也即两个局部可积的右连增过程之差），命题 2.14 及 2.15 仍正确。若 A 适应，则 $A-A^p$ 是局部鞅。反之，如果 B 是可料的有限变差过程使 $A-B$ 为局部鞅，那么必有

$$A^p=B.$$

命题2.16 设 A 为局部可积变差$(\mathscr{F}_t)$过程，则

1° 若 Φ 可料，并且 $\int_0^t\Phi_s\mathrm{d}A_s$ 局部可积变差，那么

$$\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}A\right)^p=\int_0^t\Phi\mathrm{d}A^p; \tag{2.12}$$

2° 设 τ 是停时，则对于 τ 停止过程 $A^{\tau}=A_{\tau\wedge t}$ 有

$$(A^{\tau})^{p}=(A^{p})^{\tau};\qquad(2.13)$$

3° 设 τ 是可料时，则对于 τ "预停过程"

$$A^{\tau-}\equiv AI_{[0,\tau)}+A_{\tau-}I_{[\tau,\infty)}$$

有

$$(A^{\tau-})^{p}=(A^{p})^{\tau-}.\qquad(2.14)$$

证明 只须假定 A 是递增的且 $\Phi\geqslant 0$。这时对于任意非负有界可测的X，我们有

$$\begin{aligned}\int X\mathrm{d}\mu_{(\int_0^t\Phi\mathrm{d}A)^p}&=\int X\mathrm{d}\mu^p_{(\int_0^t\Phi\mathrm{d}A)}=\int {}^pX\mathrm{d}\mu_{(\int_0^t\Phi\mathrm{d}A)}\\&=E\int_0^\infty({}^pX)_t\Phi_t\mathrm{d}A_t=E\int_0^\infty {}^p(X\Phi)_t\mathrm{d}A_t\\&=\int {}^p(X\Phi)\mathrm{d}\mu_A=\int X\Phi\mathrm{d}\mu_{A^p}\\&=E\int_0^\infty(X\Phi)_t\mathrm{d}A_t^p\\&=\int X\mathrm{d}\mu_{(\int_0^t\Phi\mathrm{d}A^p)}.\end{aligned}$$

由此便得(2.12)。

令 $\Phi=I_{[0,\tau]}$ 及 $I_{[0,\tau)}$，我们分别得到(2.13)及(2.14)。

定义2.18 零初值右连($\mathscr{F}_t$)适应增过程 A_t 称为可积($\mathscr{F}_t$)增过程，如果对于 $\forall t$ 有 $EA_t<\infty$；称为一致可积($\mathscr{F}_t$)增过程（或简称 Meyer 过程），如果 $EA_\infty<\infty$。

引理2.14 设 A_t 是连续的可积($\mathscr{F}_t$)增过程。对于 $p\geqslant 1$，记

$$\mathscr{L}_p(A)=\left\{\Phi:\ \Phi\text{循序过程，且对 }\forall T,E\int_0^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}A_t<\infty\right\},$$

$$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)=\Big\{\ \Phi:\ \Phi \text{ 循序过程，且对 } \forall T,$$

$$P\left\{\int_0^T|\Phi_t|^p dA_t<\infty\right\}=1\Big\}.$$

在 $\mathscr{L}_p(A)$，$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)$中可定义类似于引理 1.4 及引理 1.5 的准范数，其中 dt 用 dA_t 来代替，那么 $\mathscr{L}_p(A)$ 是 Frechet 空间，$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)$是具有平移不变距离的线性距离空间。而且对于 $\forall\Phi\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)$，必定存在可料过程 $\tilde{\Phi}$，使 $\|\Phi-\tilde{\Phi}\|_{\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)}=0$。此外 $\mathscr{L}_0$ 在 $\mathscr{L}_p(A)$中稠，且 $\overline{\mathscr{L}_0}\supset\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)$（指 $\mathscr{L}_0$ 在 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)$ 距离下之完备）。又对于 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)$中的有界函数 Φ，总可找 $\mathscr{L}_0$ 中一致有界列 $\Phi^{(n)}$，使 $\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)}\to 0$。同时，$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)$ 的元都有可料修正。

如果 A_t 仅是右连续的可积$(\mathscr{F}_t)$增过程，则只要改记

$$\mathscr{L}_p(A)=\Big\{\Phi:\ \Phi \text{ 是}(\mathscr{F}_t)\text{可料过程，且对 } \forall T,$$

$$E\int_0^T|\Phi_t|^p dA_t<\infty\Big\},$$

$$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)=\Big\{\Phi:\ \Phi\text{是}(\mathscr{F}_t)\text{可料过程，且对 } \forall T,$$

$$P\left\{\int_0^T|\Phi_t|^p dA_t<\infty\right\}=1\Big\},$$

则上面的结论仍成立。

证明 证明类似引理 1.4 及 1.5，命题 1.4 及 1.5，不同处在于用 dA_t 代替 dt。这样，当 A_t 连续时为证明 Φ 的可料修正的存在性，(1.9) 应改成

$$\tilde{\Phi}(t,\omega)=\begin{cases}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{A_t-A_{t-\frac{1}{n}}}\displaystyle\int_{t-\frac{1}{n}}^t\Phi_s dA_s\right)\cdot I_{(\bigcup\limits_1^{\infty} A_n)^c}, & \\ \qquad\qquad \omega\in\Omega_0,\text{且极限存在时}, & \\ 0, \qquad \text{其他情形}, & \end{cases}$$

其中

$$\Omega_0=\{\omega: \exists n,\ 使\ A_t-A_{t-\frac{1}{n}}=0\},$$

$$\Lambda_n=\left\{\omega: \int_0^n|\Phi_s|\mathrm{d}A_s=+\infty\right\}.$$

而且这里 Λ_n 是零测集. 同时(1.10)变成

$$\frac{1}{A_t-A_{t-\frac{1}{n}}}\int_{t-\frac{1}{n}}^t\Phi_s\mathrm{d}A_s\xrightarrow{n\to\infty}\Phi_t$$

$\left(固定\ \omega\notin\Omega_0\cup\left(\bigcup\limits_1^\infty\Lambda_n\right)时对\ \mathrm{a.e.d}A_t\ 成立\right)$. 利用这些就能证明本引理.

例 Φ 称局部有界, 如果 $\exists$ 停时 $\tau_n\uparrow\infty$, 使 $\forall n$ 固定后 Φ^{τ_n} 有界. 如果 A_t 连续, Φ 局部有界且 $(\mathscr{F}_t)$ 适应, 则

$$\Phi\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(A)\quad(\forall p\geqslant1).$$

定义2.19 右连左极 $(\mathscr{F}_t)$ 下鞅或上鞅 X 称为正则的, 如果 $\forall a>0$ 及 $(\mathscr{F}_t)$ 停时列 $\tau_n\uparrow\tau$, 恒有

$$EX_{\tau_n\wedge a}\to EX_{\tau\wedge a};$$

称为一致正则的; 如果

$$E(X_{\tau_n}I_{\tau_n<\infty})\to E(X_\tau I_{\tau<\infty}).$$

一般右连左极 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程 X, 如果存在停时 $\sigma_n\uparrow\infty$, 使 X^{σ_n} 都是正则的, 则也称 X 正则. 鞅一定正则, 一致可积鞅一定一致正则.

引理2.15 设 $(\mathscr{F}_t)$ 是完备参考族, 且 A_t 是正则的可积 $(\mathscr{F}_t)$ 增过程, 则对任意可料时 τ 有

$$P(A_\tau I_{\tau<\infty}=A_{\tau-}I_{\tau<\infty})=1.$$

证明 取 τ_n 为预告 τ 的停时列. 因为在 $\{\tau>a\}$ 上

$$A_{\tau_n\wedge a}\to A_a=A_{\tau\wedge a},$$

所以由 A_t 的正则性推出 $E(A_{\tau_n\wedge a}I_{\tau\leqslant a})\to E(A_{\tau\wedge a}I_{\tau\leqslant a})$. 但是

由单调收敛性左边应有极限 $E(A_{(\tau\wedge a)-}I_{\tau<a})$，再由 A_t 的递增性使得 $P(A_{(\tau\wedge a)-}I_{\tau<a}=A_{\tau\wedge a}I_{\tau<a})=1$。令 $a\uparrow\infty$ 就得引理。

命题2.17 设($\mathscr{F}_t$)是完备参考族，则可料的局部可积($\mathscr{F}_t$)增过程（它等价于存在停时列 $\tau_n'\uparrow\infty$ 使它的 τ_n' 停止是 Meyer 过程）与连续过程只差一不足道过程的充要条件是它是正则的。

证明 必要性显然。今证充分性。我们不妨设此过程 A_t 是有界的，因为一般情况可以用 A^{σ_n-} 代替，其中

$$\sigma_n=\inf\{t:\ A_t\geqslant n\}.$$

是可料时，而预停过程 $A^{\sigma_n-}=AI_{[[0,\sigma_n[[}+A_{\sigma_n-}I_{[[\sigma_n,\infty[[}$ 是可料的。易见它仍然是正则的。再则，我们指出利用例 1 对于非负有界鞅 M，我们有

$$E\int_0^t M_s\mathrm{d}A_s=E\int_0^t M_s\mathrm{d}A_s^p=\int MI_{[[0,t]]}\mathrm{d}\mu_{A^p}$$

$$=\int {}^p(MI_{[[0,t]]})\mathrm{d}\mu_A=\int M_-I_{[[0,t]]}\mathrm{d}\mu_A$$

$$=E\int_0^t M_{s-}\mathrm{d}A_s\quad(\forall t\geqslant 0).$$

现在我们要用有界鞅分区间地近似 A_t。为此我们用二分密集采样把$[0,a]$等分：$0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{2^n}^{(n)}=a$。记

$$A_t^{(n)}=\sum_k E(A_{t_{k+1}^{(n)}}\mid\mathscr{F}_t)I_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(t).$$

它在$(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]$上是有界鞅。由此我们可得到

$$E\int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}}A_s^{(n)}\mathrm{d}A_s=E\int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}}A_{s-}^{(n)}\mathrm{d}A_s.$$

因此对于 $t\leqslant a$ 我们有

$$E\int_0^t A_s^{(n)}\mathrm{d}A_s=E\int_0^t A_{s-}^{(n)}\mathrm{d}A_s\qquad(2.15)$$

我们来证明，对于 $t\leqslant a$ 一致地有 $A_t^{(n)}\xrightarrow{p}A_t$。令

$$\sigma_n=\begin{cases}\inf\{t\leqslant a:\ A_t^{(n)}-A_t>\varepsilon\}, & \text{若}\{t\leqslant a:\ A_t^{(n)}-A_t>\varepsilon\}\neq\varnothing,\\ a, & \text{其他情形。}\end{cases}$$

因为$(\mathscr{F}_t)$右连续，所以 σ_n 是$(\mathscr{F}_t)$停时。又因为 $A_a^{(n)}=A_a$，$A_t^{(n)}\geqslant A_t$，所以 $\sigma_n<a$，当且仅当存在 $t<a$ 使 $A_t^{(n)}-A_t>\varepsilon$。另一方面 $A_t^{(n)}$ 对 n 递减，所以 $\sigma_n\uparrow$ 某个$(\mathscr{F}_t)$停时 σ。记

$$\Omega_0=\{\omega:\exists n\ \text{使}\ \sigma_n(\omega)=\sigma(\omega)\}。$$

于是 $A_{\sigma_n}\to A_\sigma I_{\Omega_0}+A_{\sigma-}I_{\Omega\setminus\Omega_0}$。由 A 的正则性，我们有 $EA_{\sigma_n}\to EA_\sigma$，所以 $E[(A_\sigma-A_{\sigma-})I_{\Omega\setminus\Omega_0}]=0$。再由 A_t 的递增性就得到：在 $\Omega\setminus\Omega_0$ 上 A_t 在 $t=\sigma(\omega)$ 处是 a.e. 连续的。记在 σ_n 右边并与 σ_n 最邻近的那个 $t_k^{(n)}$ 为 $\varphi_n(\sigma_n)$。显见 $\varphi_n(x)\in\mathscr{B}(0,\infty))$，而且 $\sigma_n<\varphi_n(\sigma_n)<\sigma_n+(1/2^n)$。于是 $\varphi_n(\sigma_n)\to\sigma$。但是在 Ω_0 上 $A_{\varphi_n(\sigma_n)}\geqslant A_{\sigma_n}=A_\sigma$（$n$ 充分大），所以 $A_{\varphi_n(\sigma_n)}\to A_\sigma$；而在 $\Omega\setminus\Omega_0$ 上 A_t 在 $t=\sigma(\omega)$ 处 a.e.dP连续，从而也有$A_{\varphi_n(\sigma_n)}\to A_\sigma$(a.e.d$P$)。但是 A 有界，由此我们恒有 $EA_{\varphi_n(\sigma_n)}\to EA_\sigma$。利用 A_t 的右连续性我们有

$$P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}(A_t^{(n)}-A_t)>\varepsilon\right)\leqslant P(A_{\sigma_n}^{(n)}-A_{\sigma_n}\geqslant\varepsilon)$$
$$\leqslant\frac{E(A_{\sigma_n}^{(n)}-A_{\sigma_n})}{\varepsilon}.$$

另一方面我们还有（用附录定理 9 推论 2）

$$EA_{\sigma_n}^{(n)}=\sum_k E\,A_{\sigma_n}^{(n)}I_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(\sigma_n)$$
$$=\sum_k E[E(A_{t_{k+1}^{(n)}}|\mathscr{F}_{\sigma_n})I_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(\sigma_n)]$$
$$=\sum_k E\Big(A_{\varphi_n(\sigma_n)}I_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(\sigma_n)\Big)=EA_{\varphi_n(\sigma_n)}.$$

因此 $P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}(A_t^{(n)}-A_t)>\varepsilon\right)\to0$。于是我们可在(2.15)中，令 $n\to$

∞得到

$$E\int_0^t (A_s - A_{s-})\mathrm{d}A_s = 0 \quad (t \leqslant a).$$

从而有 $P(\{A_s = A_{s-}\}s \leqslant a) = 1$. 即 A_t 以概率为1地连续。

定义2.20 $(\mathscr{F}_t)$适应可测过程X，称为是(DL)类过程，如果 $\forall a>0$ 固定，$\{X_{\sigma\wedge a}$: 对任意$(\mathscr{F}_t)$停时 $\sigma\}$ 为一致可积族；称为(D)类过程，如果$\{X_\sigma I_{\sigma<\infty}$: 对任意$(\mathscr{F}_t)$停时 $\sigma\}$ 为一致可积族。

引理2.16 1° 鞅必是(DL)类过程；一致可积鞅必是(D)类过程；

2° 右连续正下鞅必是(DL)类过程；右连续正一致可积下鞅是(D)类过程；

3° 可积$(\mathscr{F}_t)$增过程是(DL)类$(\mathscr{F}_t)$下鞅；一致可积$(\mathscr{F}_t)$增过程是(D)类$(\mathscr{F}_t)$下鞅。

证明 1°的证明。若M是$(\mathscr{F}_t)$鞅，则$|M|$是下鞅。由 Chebyshev 不等式，当 $C\to\infty$ 时

$$\sup_\sigma P(|M_{\sigma\wedge a}|>C) \leqslant \sup_\sigma \frac{E|M_{\sigma\wedge a}|}{C} \leqslant \frac{E|M_a|}{C} \to 0.$$

于是由 Doob 停止定理推出(例如参见附录定理 9)：当 $C\to\infty$时，对 σ 一致地有

$$E(|M_{\sigma\wedge a}|I_{|M_{\sigma\wedge a}|>C}) \leqslant E(|M_a|I_{|M_{\sigma\wedge a}|>C}) \to 0.$$

这就证明了前半部分。后半部分只需用∞代替 a。

2°的证明已包含在上面。

3°的证明。对 $s<t$，我们有

$$A_s = E(A_s|\mathscr{F}_s) \leqslant E(A_t|\mathscr{F}_s) \quad (\text{a.e.d}P).$$

因此不妨认为 A_t 是正下鞅。于是 3° 归结到 2°。

定义2.21 满足 $\lim\limits_{t\to\infty} X_t = 0$ 的右连续非负上鞅称为位势。

例 3 若 A_t 是 Meyer 过程，那么 A_∞存在且$E(A_\infty|\mathscr{F}_t) - A_t$

是(D)类位势，它称为 Meyer 过程生成的位势，记成z_t^A。

证明 直接验证$z_t \equiv E(A_\infty|\mathscr{F}_t) - A_t$满足位势的定义。再由$z_t \leqslant E(A_\infty|\mathscr{F}_t)$可推出$z_t$是(D)类过程。

引理2.17 设A_t是 Meyer 过程，$\widetilde{A}_t$是它的可料对偶投影，则$\widetilde{A}$是满足$A_t - \widetilde{A}_t$是一致可积鞅的唯一可料增过程。

证明 易见$A_t - \widetilde{A}_t = E((A_\infty - \widetilde{A}_\infty)|\mathscr{F}_t)$。唯一性显然。

定义2.22 如果一个鞅同时也是一致可积变差过程（指两个 Meyer 过程的差），则称为一致可积变差鞅。

Meyer 过程与其可料对偶投影的差是一致可积变差鞅。

命题2.18 $(\mathscr{F}_t)$完备参考族，则z_t是(D)类位势等价于它是可料 Meyer 过程生成的位势。

证明 先分析一下，从可料 Meyer 过程A可以得到 Doleans 测度$\mu_A|_{\mathscr{P}}$，它与A生成的位势之间有关系：

$$
\begin{cases}
\mu_A([\![0]\!]) = 0, \\
\mu_A((\!(\sigma,\tau]\!]) = E(A_\tau - A_\sigma) = E(z_\sigma^A - z_\tau^A) \quad (\sigma,\tau \text{ 停时}).
\end{cases}
$$

所以定理的证明就归结于从(D)类位势z_t出发，定义一个 Doleans 测度。令

$\mathscr{C}$ = 有限个形如$[\![0_A]\!](A \in \mathscr{F}_0)$，$(\!(\sigma,\tau]\!]$的随机区间的并（停时$\sigma,\tau,\sigma \leqslant \tau$），那么$\mathscr{C}$是代数，而且$\mathscr{P} = \sigma(\mathscr{C})$。我们不妨假定$\mathscr{C}$中元都具有形式：

$$H = [\![0_A]\!] \cup (\!(\sigma_1,\tau_1]\!] \cup \cdots \cup (\!(\sigma_m,\tau_m]\!]$$

（在$\sigma_i < \infty$上$\sigma_i < \tau_i$，且在$\tau_i < \infty$上$\tau_i < \sigma_{i+1}$），例如可以取$\tau_0 \equiv 0$，$\sigma_k = D_{(\!(\tau_{k-1},\infty)\!)\cap H}$，$\tau_k = D_{(\!(\sigma_k,\infty)\!)\cap H^c}$，其中$D_A$是指$A$的初遇，因为$H, H^c$由不超过有限条随机线所围成，所以$\sigma_k,\tau_k$满足所要求的性质）。定义

$$\mu(H)=\sum_{1}^{m}E(z_{\sigma_k}-z_{\tau_k}),$$

那么 $\mu(H)\leqslant E(z_0)$。我们来证明 μ 是 $\mathscr{C}$ 上测度。首先我们指出：对于任意 $H\in\mathscr{C}$，存在 $K_\varepsilon\in\mathscr{C}$，使 $\bar{K}_\varepsilon\subset H$，而且

$$\mu(K_\varepsilon)\geqslant\mu(H)-\varepsilon.$$

事实上，我们不妨设 $H=((\sigma,\tau]]$（在 $\sigma<\infty$ 上有 $\sigma<\tau$）。令

$$\sigma_n=\left(\sigma+\frac{1}{n}\right)_{\{(\sigma+\frac{1}{n})<\tau\}},\quad \tau_n=\tau_{\{\sigma+\frac{1}{n}<\tau\}}.$$

于是 $\sigma_n\downarrow\sigma$，$\tau_n\downarrow\tau$，而且在 $\sigma_n<\infty$ 上有 $\tau_n=\tau$，因此

$$[[\sigma_n,\tau_n]]\subset((\sigma,\tau]].$$

由于 z_t 是一致可积右连上鞅，所以

$$E(z_{\sigma_n}-z_{\tau_n})\to E(z_\sigma-z_\tau).$$

取 n 充分大，使 $E(z_{\sigma_n}-z_{\tau_n})\geqslant E(z_\sigma-z_\tau)-\varepsilon$。令 $K_\varepsilon=((\sigma_n,\tau_n]]$ 就得到所要的不等式。

现在我们证明 μ 在 $\mathscr{C}$ 的 σ 可加性。由于 μ 是有界的，我们只需验证对于 $H_n\in\mathscr{C}$，$H_n\downarrow\varnothing$ 就必然推出 $\mu(H_n)\downarrow 0$。为此，对于 $\varepsilon>0$ 我们取 $K_n\in\mathscr{C}$，使 $\bar{K}_n\subset H_n$，且 $\mu(K_n)\geqslant\mu(H_n)-(\varepsilon/2^n)$。令 $L_n=\bigcap_{1}^{n}K_j$，那么有 $\bar{L}_n\subset\bigcap_{1}^{n}H_j$，$L_n\in\mathscr{C}$，而且 $\mu(L_n)\geqslant\mu(H_n)-\varepsilon$。但是闭集 $\bar{L}_n\downarrow\varnothing$，我们有 $[[D_{L_n}]]\subset\bar{L}_n$，$D_{L_n}\uparrow\infty$，$L_n\subset((D_{L_n},\infty))$。于是

$$\mu(L_n)\leqslant\mu(((D_{L_n},\infty)))=Ez_{D_{L_n}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此 $\mu(H_n)\to 0$。所以 μ 为 σ-可加，因而可以扩张到 $\mathscr{P}$，成为有界测度。我们还要证明 μ 是由可料 Meyer 过程生成的，而且 z_t 就是它生成的位势。设 H 是 P 不足道集且可料，那么

$$P(D_H=+\infty)=1.$$

因此 $\{D_H<\infty\}$ 是 P 零测集从而属于 $\mathscr{F}_0$，我们有

$$H \subset [[0_{\{D_H<\infty\}}]] \cup ((0_{\{D_H<\infty\}}, \infty)).$$

但是 $P(0_{\{D_H<\infty\}} = +\infty) = 1$，所以

$$\mu(H) = 0.$$

简记

$$\mu \text{ 的可料投影 } \mu^p \text{ 为 } \bar{\mu}.$$

显见

$$\bar{\mu}^p = \bar{\mu},$$

即 $\bar{\mu}$ 是可料测度。又因为 $\bar{\mu}$ 是有界的，由命题 2.14 可知 $\bar{\mu}$ 是由可料 Meyer 过程 A_t 所生成的。最后我们有

$$EA_0 = \bar{\mu}([[0]]) = \mu([[0]]) = 0.$$

所以 $A_0 = 0$；并且对于任意停时 σ，由于$((\sigma, \infty)) \in \mathscr{P}$，我们就有

$$\begin{aligned} E(E(A_\infty | \mathscr{F}_\sigma) - A_\sigma) &= E(A_\infty - A_\sigma) \\ &= \bar{\mu}(((\sigma, \infty))) = \mu(((\sigma, \infty))) = Ez_\sigma. \end{aligned}$$

应用命题 2.10 之 2° 立知 $z_t = E(A_\infty | \mathscr{F}_t) - A_t$，即 $z_t = z_t^A$。

定理2.1(Doob–Meyer 分解)　若($\mathscr{F}_t$)完备参考族，则

1° 右连续(D)类下鞅X能唯一的分解成一致可积鞅 M与可料 Meyer 过程 A 的和：

$$X = M + A \quad (A_0 = 0). \tag{2.16}$$

2° 右连续(DL)类下鞅 X可唯一分解成鞅M与可料的可积($\mathscr{F}_t$)增过程 A的和：

$$X = M + A \quad (A_0 = 0).$$

证明　1° 因 X_t 一致可积，故 X_∞ 存在。令

$$z_t \equiv E(X_\infty | \mathscr{F}_t) - X_t.$$

易验证它是(D)类位势。由命题 2.18 知道存在可料 Meyer 过程 A_t，使 $z_t = z_t^A$，也就是 $X_t = E((X_\infty - A_\infty) | \mathscr{F}_t) + A_t$。这说明 X的分解式存在。现证唯一性。设X有两个分解

$$X = M^{(1)} + A^{(1)} = M^{(2)} + A^{(2)},$$

那么 $A_t = A_t^{(1)} - A_t^{(2)} = M_t^{(2)} - M_t^{(1)}$ 是可料的一致可积变差鞅。因此

$$E(A_\infty|\mathscr{F}_t) - A_t = 0.$$

由 A_t 的右连续性可知对任意停时 σ 恒有：$E(A_\infty|\mathscr{F}_\sigma) - A_\sigma = 0$。再由命题 2.15 注 2 可知对于 A_t 生成的符号测度 μ_A 有

$$\mu_A(((\sigma,\infty))) = EA_\infty - EA_\sigma = 0.$$

又由 $A_0 = 0$ 推出 $\mu_A([[0]]) = 0$。用典型逼近可得 $\mu_A|_{\mathscr{P}} = 0$。因此由命题 2.14 得到 $A_t^p = 0$。但是 A_t 是可料的，故

$$A_t = A_t^p = 0.$$

2° 若 X 是(DL)类右连下鞅，那么它在 n 的停止 $X_{\cdot\wedge n}$ 是(D)类右连下鞅。由 1°，$X_{\cdot\wedge n}$ 有 Doob-Meyer 分解

$$X_{\cdot\wedge n} = M^{(n)} + A^{(n)}.$$

同样地

$$X_{\cdot\wedge(n+1)} = M^{(n+1)} + A^{(n)}.$$

由分解的唯一性推出 $M_{t\wedge n}^{(n+1)} = M_{t\wedge n}^{(n)}$，$A_{t\wedge n}^{(n+1)} = A_{t\wedge n}^{(n)}$。令

$$M_t = M_{t\wedge n}^{(n)},\quad A_t = A_{t\wedge n}^{(n)} \quad (\text{任意 } n).$$

易见 M_t 是鞅，A_t 是可料 Meyer 过程。又因为在 $0 \leqslant t \leqslant n$ 上分解是唯一的，所以分解是唯一的。

定理2.2 在定理 2.1 中的 A_t 是连续的(指概率为 1 地连续轨道)，当且仅当 X 正则。

证明 因为 M 恒为正则，所以 X 正则与 A_t 正则等价。再由命题 2.17 便得定理。

§2.4 局部平方可积鞅的特征与随机积分

命题2.19 对于 $M \in \mathscr{M}_2$，存在唯一零初值可料可积右连增过程 A_t，使 $M_t^2 - A_t$ 是鞅。

证明 右连下鞅 M_t^2 为非负，因此 M_t^2 是右连续(DL)类$(\mathscr{F}_t)$下鞅。由 Doob-Meyer 分解，存在唯一可料的可积 $(\mathscr{F}_t)$增过程

A_t，使 $M_t^2 - A_t$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅。

定义2.23 命题 2.19 中的 A_t 称为平方可积鞅M的特征，记成$\langle M\rangle_t$(或简记成$\langle M\rangle$)。

又若 $M,N\in\mathscr{M}_2(\mathscr{F}_t)$，则我们称

$$\frac{1}{2}[\langle M+N\rangle-(\langle M\rangle+\langle N\rangle)]$$

为 M,N 的互特征，并把它记成$\langle M,N\rangle$。

与定理 2.1 唯一性证明类似地可证明$\langle M,N\rangle$是唯一的右连可料增过程之差，它使 $MN-\langle M,N\rangle$是$(\mathscr{F}_t)$鞅。而且我们有

$$\langle M,M\rangle=\langle M\rangle,\ \langle M\rangle=0，当且仅当 M=0.$$

此外，$\langle M,N\rangle$有类似于内积的性质（但是$\langle M,N\rangle$是$(\mathscr{F}_t)$适应的随机过程而不是数）：

$$\left.\begin{aligned}&\langle M,N\rangle=\langle N,M\rangle;\\&\langle M_1+M_2,N\rangle=\langle M_1,N\rangle+\langle M_2,N\rangle;\\&\text{对实数 }\lambda,\langle M,\lambda N\rangle=\lambda\langle M,N\rangle.\end{aligned}\right\}\tag{2.17}$$

例 1 设X是均值为 0 的随机连续的$(\mathscr{F}_t)$独立增量过程。如果它平方可积，那么 $X\in\mathscr{M}_2(\mathscr{F}_t)$，且有非随机的连续特征：

$$\langle X\rangle_t=EX_t^2.$$

例 2 若 $\Phi,\Psi\in\mathscr{L}_2$，那么

$$\left\langle\int_0^\cdot\Phi\mathrm{d}B\right\rangle_t=\int_0^t\Phi_s^2\mathrm{d}s,$$

$$\left\langle\int_0^\cdot\Phi\mathrm{d}B,\ \int_0^\cdot\Psi\mathrm{d}B\right\rangle_t=\int_0^t\Phi\Psi\mathrm{d}s.$$

这里$\int_0^\cdot\Phi\mathrm{d}B$ 指过程$\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}B\right)_{t\geqslant0}$。

由于特征的性质类似于内积，我们也有

$$|\Delta\langle M,N\rangle_t|\leqslant\sqrt{\Delta\langle M\rangle_t}\ \sqrt{\Delta\langle N\rangle_t}\ ,\tag{2.18}$$

此处 ΔX_t 表示 $X_{t+\Delta}-X_t$。

命题2.20 (Kunita-Watanabe 不等式) 若 $M,N\in\mathscr{M}_2$，$\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle),\Psi\in\mathscr{L}_2(\langle N\rangle)$，则对于符号测度 $\mathrm{d}\langle M,N\rangle_t$ 的全变差测度(记为 $|\mathrm{d}\langle M,N\rangle|_t$)有

$$\int_0^t|\Phi\Psi||\mathrm{d}\langle M,N\rangle|$$

$$\leqslant\left(\int_0^t\Phi^2\mathrm{d}\langle M\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\Psi^2\mathrm{d}\langle N\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P)。\qquad(2.19)$$

证明 当 ω 固定时，由 Φ,Ψ 是可测过程推出 Φ_t,Ψ_t 均是 t 的 Borel 函数。因而对任何 Leebsgue-Stieltjes 测度均可测。特别，取

$$\mu(t)=\int_0^t|\mathrm{d}\langle M,N\rangle|+\langle M\rangle_t+\langle N\rangle_t,$$

于是对 $\forall\lambda$ 有 $\mathrm{d}\langle M+\lambda N\rangle\ll\mathrm{d}\mu$，而且

$$0\leqslant\frac{\mathrm{d}\langle M+\lambda N\rangle}{\mathrm{d}\mu}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\langle M\rangle}{\mathrm{d}\mu}+2\lambda\frac{\mathrm{d}\langle M,N\rangle}{\mathrm{d}\mu}+\lambda^2\frac{\mathrm{d}\langle N\rangle}{\mathrm{d}\mu}.$$

由 Schwarz 不等式得到

$$\left|\frac{\mathrm{d}\langle M,N\rangle}{\mathrm{d}\mu}\right|\leqslant\sqrt{\frac{\mathrm{d}\langle M\rangle}{\mathrm{d}\mu}}\sqrt{\frac{\mathrm{d}\langle N\rangle}{\mathrm{d}\mu}}.$$

这样，我们就有

$$\int_{[0,t]}|\Phi\Psi||\mathrm{d}\langle M,N\rangle|=\int_{[0,t]}|\Phi\Psi|\left|\frac{\mathrm{d}\langle M,N\rangle}{\mathrm{d}\mu}\right|\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant\int_{[0,t]}|\Phi\Psi|\sqrt{\frac{\mathrm{d}\langle M\rangle}{\mathrm{d}\mu}}\sqrt{\frac{\mathrm{d}\langle N\rangle}{\mathrm{d}\mu}}\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant\left(\int_{[0,t]}\Phi^2\frac{\mathrm{d}\langle M\rangle}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{[0,t]}\Psi^2\frac{\mathrm{d}\langle N\rangle}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

所以(2.19)成立。

命题2.21 对于 $M\in\mathscr{M}_2$，其特征 $\langle M\rangle$ 连续，当且仅当

$\forall(\mathscr{F}_t)$停时列 $\sigma_n \uparrow \sigma$ 及 $\forall a > 0$ 恒有

$$M_{\sigma_n \wedge a} \xrightarrow{p} M_{\sigma \wedge a}.$$

特别地，

$1°$　若 $M \in \mathscr{M}_2^c$，则$\langle M \rangle$连续；

$2°$　若$(\mathscr{F}_t)$拟左连续，即$\forall(\mathscr{F}_t)$停时列 $\sigma_n \uparrow \sigma$ 恒有$\mathscr{F}_{\sigma_n} \uparrow \mathscr{F}_\sigma$，则$\langle M \rangle$连续。

今后我们记特征连续的平方可积鞅全体为 $\mathscr{M}_2^T(\mathscr{F}_t)$，或简记成$\mathscr{M}_2^T$。

证明　由定理2.2推出$\langle M \rangle$连续等价于 M^2 正则。但由 Doob 停止定理得到

$$EM_{\sigma \wedge a}^2 - EM_{\sigma_n \wedge a}^2$$

$$= E[E[M_{\sigma \wedge a}^2 + M_{\sigma_n \wedge a}^2 - 2M_{\sigma \wedge a} M_{\sigma_n \wedge a}) | \mathscr{F}_{\sigma_n \wedge a}]]$$

$$= E[M_{\sigma \wedge a} - M_{\sigma_n \wedge a}]^2.$$

因此，M^2 正则，当且仅当$M_{\sigma_n \wedge a} \xrightarrow{L_2} M_{\sigma \wedge a}$。又由 $M_{\sigma_n \wedge a}$的一致可积性，上述条件等价于$M_{\sigma_n \wedge a} \xrightarrow{p} M_{\sigma \wedge a}$。充要条件得证。$1°$显然。今证$2°$。若$(\mathscr{F}_t)$拟左连续，应用 Doob 停止定理

$$M_{\sigma_n \wedge a} = E(M_a | \mathscr{F}_{\sigma_n \wedge a}) \to E(M_a | \mathscr{F}_{\sigma \wedge a})$$
$$= M_{\sigma \wedge a} \quad (\text{a.e.} dP).$$

因此$\langle M \rangle$连续。

命题2.22　对$M \in \mathscr{M}_2^{loc}$，存在唯一的零初值局部可积（$X$称为局部可积，如果存在$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n \uparrow \infty$(a.e.dP)，使得对$\forall t$，$E|X_t^{\tau_n}| < \infty$）的右连可料$(\mathscr{F}_t)$增过程，记成$\langle M \rangle$，使

$$M_t^2 - \langle M \rangle_t \text{ 为}(\mathscr{F}_t)\text{局部鞅。}$$

这个$\langle M \rangle$称为M的特征。

如果$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\sigma_n \uparrow \infty$，使$M^{\sigma_n} \in \mathscr{M}_2$，那么

$$\langle M \rangle^{\sigma_n} = \langle M^{\sigma_n} \rangle. \tag{2.20}$$

此外，$M\in\mathscr{M}_2$，当且仅当对$\forall t$，$E\langle M\rangle_t<\infty$；$M\in\mathfrak{m}_2$，当且仅当$E\langle M\rangle_t$对$t$有界。

证明 因为当$n\geqslant m$时有$M_t^{\sigma_m}=M_{t\wedge\sigma_m}^{\sigma_n}$，所以

$$\langle M^{\sigma_m}\rangle_t=\langle M^{\sigma_n}\rangle_{t\wedge\sigma_m}.$$

定义

$$\langle M\rangle_t=\sum_k\langle M^{\sigma_k}\rangle_t I_{(\sigma_k,\sigma_{k+1}]}(t).$$

于是我们有$\langle M\rangle_t^{\sigma_n}=\langle M^{\sigma_n}\rangle_t$，此即(2.20)，而且(a.e.$dP$地)$\langle M\rangle$与停时列取法无关。$\langle M\rangle^{\sigma_n}$是可料的，因此$\langle M\rangle$是可料的。唯一性由(2.20)保证。

若$E\langle M\rangle_t<\infty$，则

$$\lim_n EM_{t\wedge\sigma_n}^2=\lim_n E\langle M\rangle_{t\wedge\sigma_n}=E\langle M\rangle_t.$$

于是鞅$M_{t\wedge\sigma_n}\xrightarrow{n\to\infty}M_t$ (a.e.且L^2)，从而$M\in\mathscr{M}_2$。反之显然。

推论 对M，$N\in\mathscr{M}_2^{loc}$，定义

$$\langle M,N\rangle=\frac{1}{2}[\langle M+N\rangle-(\langle M\rangle+\langle N\rangle)]. \qquad (2.21)$$

那么

$$M_tN_t-\langle M,N\rangle_t\ \text{是}(\mathscr{F}_t)\text{局部鞅}.$$

而且存在$(\mathscr{F}_t)$停时列$\sigma_n\uparrow\infty$ (a.e.dP)，使

$$\langle M,N\rangle^{\sigma_n}=\langle M^{\sigma_n},N^{\sigma_n}\rangle. \qquad (2.22)$$

显然我们有$\langle M,M\rangle=\langle M\rangle$，同时

$$\langle M\rangle=0\text{，当且仅当 }M=0.$$

而且(2.17)仍保持成立。

特征连续的局部平方可积鞅全体记成$\mathscr{M}_2^{c,loc}(\mathscr{F})$(或简记成$\mathscr{M}_2^{c,loc}$)。

命题2.23 若 $M\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$①，则对 $\forall\varepsilon,\delta>0$ 有

$$P(\sup_{0\leq s\leq t}|M_s|\geq\varepsilon)\leq P(\langle M\rangle_t\geq\delta)+\frac{\delta}{\varepsilon^2}. \qquad (2.23)$$

因此，若 $M^{(n)}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$，而且 $\langle M^{(n)}\rangle_t\xrightarrow{p}0$ $(n\to\infty)$，则对 $s\leq t$ 一致地有 $M_s^{(n)}\xrightarrow{p}0$。

证明 令 M 的 Doob–Meyer 分解为 $M=M^\tau+\langle M\rangle$，及

$$\tau=\inf\{t:\ \langle M\rangle_t\geq\delta\}.$$

我们有：M^τ 是一致平方可积鞅，而且

$$\begin{aligned}
&P(\sup_{s\in[0,t]}|M_s|\geq\varepsilon)\\
&\leq P(\sup_{[0,t]}|M_s-M_s^\tau|>0)+P(\sup_{[0,t]}|M_s^\tau|\geq\varepsilon)\\
&\leq P(\langle M\rangle_t\geq\delta)+P(\sup_{[0,t]}(M_s^\tau)^2\geq\varepsilon^2)\\
&\leq P(\langle M\rangle_t\geq\delta)+\frac{E(M_t^\tau)^2}{\varepsilon^2}\\
&=P(\langle M\rangle_t\geq\delta)+\frac{E\langle M\rangle_{t\wedge\tau}}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

因此(2.23)成立。

下面定义对于局部平方可积鞅的积分。

(一) 对平方可积鞅的积分

假设 $M\in\mathscr{M}_2$。在引理2.14中取 $A_t=\langle M\rangle_t$，我们要对 $\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)$ 定义对 M 的随机积分。首先，若 $\Phi\in\mathscr{L}_0$，我们定义

$$\int_0^t\Big(\Phi_0I_{\{0\}}(s)+\sum_k\Phi_kI_{(t_k,t_{k+1}]}(s)\Big)\mathrm{d}M_s$$

$$=\sum_k\Phi_k(M_{t\wedge t_{k+1}}-M_{t\wedge t_k}). \qquad (2.24)$$

① 这个条件可放宽为 $M\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，而且不必零初值，证明见第七章。

其次，对 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_2(M)}\to0$。我们定义

$$\int_0^t\Phi_s\mathrm{d}M_s=(\mathscr{M}_2)\lim_{n\to\infty}\int_0^t\Phi_s^{(n)}\mathrm{d}M_s,\tag{2.25}$$

其中"$(\mathscr{M}_2)\lim$"指$\mathscr{M}_2$中的极限，而且$\int_s^t$代表$\int_{(s,t]}$（左开右闭）。

这样定义的积分有许多性质与对 Brown 运动的 Ito 积分类似，证明也几乎可以照搬。

引理2.18 设 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)$，则我们有

1° $\int_0^\cdot\Phi\mathrm{d}M\in\mathscr{M}_2$，且 $\left\langle\int_0^\cdot\Phi\mathrm{d}M\right\rangle_t=\int_0^t\Phi_s^2\mathrm{d}\langle M\rangle_s$； (2.26)

2° 若还有 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle N\rangle)$，$N\in\mathscr{M}_2$，则

$$\int_0^t\Phi\mathrm{d}(M+N)=\int_0^t\Phi\mathrm{d}M+\int_0^t\Phi\mathrm{d}N;\tag{2.27}$$

3° 若还有 $\Psi\in\mathscr{L}_2(\langle N\rangle)$，则

$$\left\langle\int_0^\cdot\Phi\mathrm{d}M,\int_0^\cdot\Psi\mathrm{d}N\right\rangle_t=\int_0^t\Phi\Psi\mathrm{d}\langle M,N\rangle.\tag{2.28}$$

证明 1°的证明。仿§1.4的证明就得到

$$\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}M\right)^2-\int_0^t\Phi^2\mathrm{d}\langle M\rangle$$

是$(\mathscr{F}_t)$鞅。但是由命题2.16 $\int_0^t\Phi^2\mathrm{d}\langle M\rangle$是可料的，故它是特征。

2°的证明。因为 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)\cap\mathscr{L}_2(\langle N\rangle)$，所以

$$\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle+\langle N\rangle).$$

如果 $\Phi\in\mathscr{L}_0$，则(2.27)显然成立。对一般

$$\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)\cap\mathscr{L}_2(\langle N\rangle),$$

可取 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使

$$\|\Phi-\Phi^{(n)}\|_{\mathscr{L}_2(M+N)}\to 0.$$

但是

$$\begin{aligned}\langle M+N\rangle&=\langle M\rangle+\langle N\rangle+2\langle M,N\rangle\\&\leqslant\langle M\rangle+\langle N\rangle+2\sqrt{\langle M\rangle}\sqrt{\langle N\rangle}\\&\leqslant 2(\langle M\rangle+\langle N\rangle),\end{aligned}$$

因此 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M+N\rangle)$，而且 $\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_2(M+N)}\to 0$。于是由 $\Phi^{(n)}$满足(2.27)推出 Φ 也满足(2.27)。

3°的证明。由1°及2°可推出：对

$$\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)\cap\mathscr{L}_2(\langle N\rangle)$$

有

$$\left\langle\int_0^{\cdot}\Phi\mathrm{d}M,\ \int_0^{\cdot}\Phi\mathrm{d}N\right\rangle_t=\int_0^t\Phi^2\mathrm{d}\langle M,N\rangle,$$

以及对 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)$，$\Psi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)$有

$$\left\langle\int_0^{\cdot}\Phi\mathrm{d}M,\ \int_0^{\cdot}\Psi\mathrm{d}M\right\rangle_t=\int_0^t\Phi\Psi\mathrm{d}\langle M\rangle.$$

于是对 $\Phi,\Psi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)\cap\mathscr{L}_2(\langle N\rangle)$，展开等式

$$\left\langle\int_0^{\cdot}\Phi\mathrm{d}(M\pm N),\ \int_0^{\cdot}\Psi\mathrm{d}(M\pm N)\right\rangle_t=\int_0^t\Phi\Psi\mathrm{d}\langle M\pm N\rangle$$

的两边就得到

$$\left\langle\int_0^{\cdot}\Phi\mathrm{d}M,\ \int_0^{\cdot}\Psi\mathrm{d}N\right\rangle_t=\int_0^t\Phi\Psi\mathrm{d}\langle M,N\rangle.$$

由于$\mathscr{L}_0\subset\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)\cap\mathscr{L}_2(\langle N\rangle)$，所以对 $\Phi,\Psi\in\mathscr{L}_0$ 等式(2.28)成立，一般 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)$及 $\Psi\in\mathscr{L}_2(\langle N\rangle)$可取 $\Phi^{(n)}$，$\Psi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使

$$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)}\text{ 及 }\|\Psi^{(n)}-\Psi\|_{\mathscr{L}_2(\langle N\rangle)}\to 0.$$

用 Kunita-Watanabe 不等式及(2.18)就能推出此时(2.28)仍成立。

（二） 对局部平方可积鞅的积分

命题2.24 对于零初值的$(\mathscr{F}_t)$适应过程X， 下列叙述彼此等价：

1° X为连续的$(\mathscr{F}_t)$局部鞅；

2° $X\in\mathscr{M}_2^{c,loc}(\mathscr{F}_t)$；

3° X为连续的局部有界$(\mathscr{F}_t)$鞅，即存在$(\mathscr{F}_t)$停时列$\tau_n\uparrow\infty$，使X^{τ_n}为连续的有界$(\mathscr{F}_t)$鞅。

证明 显然由3°⇒2°⇒1°。今证1°⇒3°。由1°，∃停时列$\sigma_n\uparrow\infty$，使X^{σ_n}为$(\mathscr{F}_t)$鞅。令

$$\tau_n=\sigma_n\wedge(\inf\{t:\ |X_t|>n\}),$$

那么$|X_t^{\tau_n}|\leqslant n(\forall t)$，$\tau_n\uparrow\infty$。所以$X^{\tau_n}$为连续的局部有界$(\mathscr{F}_t)$鞅。证毕。

对局部平方可积鞅M作积分时，当$M\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$时被积函数类自然地考虑为$\mathscr{L}_2^{loc}(\langle M\rangle)$。但是当$M\in\mathscr{M}_2^{loc}\backslash\mathscr{M}_2^{c,loc}$时，对$\mathscr{L}_2^{loc}(\langle M\rangle)$没有对应于引理1.6的结论（见引理2.14的陈述）。此时我们改用

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{L}}_p^{loc}(\langle M\rangle)\equiv\{\Phi:\ &\Phi\text{ 为}(\mathscr{F}_t)\text{可料过程，且}\\ &\exists(\mathscr{F}_t)\text{停时列 }\tau_n\uparrow\infty\ (\text{a.e.}\,dP)\\ &\text{使 }\Phi_sI_{(0,\tau_n]}(s)\in\mathscr{L}_p(\langle M\rangle)\}.\end{aligned}$$

一般，我们只有

$$\hat{\mathscr{L}}_p^{loc}(\langle M\rangle)\subset\mathscr{L}_p^{loc}(\langle M\rangle). \tag{2.29}$$

但是当$\langle M\rangle$连续时就有$\hat{\mathscr{L}}_p^{loc}(\langle M\rangle)=\mathscr{L}_p^{loc}(\langle M\rangle)$。

现在我们来定义积分。设$M\in\mathscr{M}_2^{loc}$，$\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$。设$(\mathscr{F}_t)$停时列$\tau_n'$，$\tau_n''\uparrow\infty$，分别使

$$M^{\tau'_n}\in\mathscr{M}_2,\quad \Phi I_{[0,\tau''_n]}(t)\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle).$$

令 $\tau_n=\tau'_n\wedge\tau''_n$，$\Phi^{(n)}=\Phi I_{[0,\tau_n]}$。于是 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_2(\langle M^{\tau_n}\rangle)$，并且对于 $n>m$ 有

$$\int_0^t\Phi^{(n)}\mathrm{d}M^{\tau_m}=\int_0^t\Phi_s I_{[0,\tau_n]}(s)\mathrm{d}M_{s\wedge\tau_m}$$

$$=\int_0^t\Phi_s I_{[0,\tau_m]}(s)\mathrm{d}M_{s\wedge\tau_m}=\int_0^t\Phi^{(m)}\mathrm{d}M^{\tau_m}.$$

因此，我们定义

$$\int_0^t\Phi\mathrm{d}M=\sum_{k=1}^{\infty}I_{(\tau_{k-1},\tau_k]}(t)\int_0^t\Phi^{(k)}\mathrm{d}M^{\tau_k}.\tag{2.30}$$

由此推出

$$\int_0^{t\wedge\tau_n}\Phi\mathrm{d}M=\int_0^{t\wedge\tau_n}\Phi\mathrm{d}M^{\tau_n}.\tag{2.31}$$

于是这积分的定义在实质上不依赖于停时列$\{\tau_n\}$的选取。

显然，局部有界的$(\mathscr{F}_t)$可料过程属于 $\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$。

定理2.3 对 $M\in\mathscr{M}_2^{loc}$，$\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$，我们有

1° 若 $M\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$，则$\int_0^{\cdot}\Phi\mathrm{d}M\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$，且

$$\left\|\int_0^{\cdot}\Phi\mathrm{d}M\right\|_{\mathscr{M}_2^{loc}}=\|\Phi\|_{\mathscr{L}_2^{loc}(\langle M\rangle)}$$

（若还有 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)$，那么“loc”可以去掉）；

2° 对任意$(\mathscr{F}_t)$停时 τ 有

$$\int_0^{t\wedge\tau}\Phi\mathrm{d}M=\int_0^t\Phi I_{[0,\tau]}(s)\mathrm{d}M_s;\tag{2.32}$$

3° 又若 $\Psi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$，则对$(\mathscr{F}_t)$有界停时 τ，σ：$\tau\leqslant\sigma$ 及有界 $\mathscr{F}_\tau$ 随机变量ζ_1,ζ_2 有

$$\int_\tau^\sigma(\zeta_1\Phi+\zeta_2\Psi)\mathrm{d}M=\zeta_1\int_\tau^\sigma\Phi\mathrm{d}M+\zeta_2\int_\tau^\sigma\Psi\mathrm{d}M.\tag{2.33}$$

证明 与对 Brown 运动的 Ito 积分的相应定理的证明相似。

定理2.4 若 $M,N\in\mathscr{M}_2^{loc}$, $\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)\cap\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle N\rangle)$，则 $\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M+N\rangle)$，而且

$$\int_0^t\Phi d(M+N)=\int_0^t\Phi dM+\int_0^t\Phi dN. \qquad (2.34)$$

证明 由(2.27)直接推得。

定理2.5 若$M,N\in\mathscr{M}_2^{loc}$,$\Phi\in\hat{\mathscr{T}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$,$\Psi\in\hat{\mathscr{T}}_2^{loc}(\langle N\rangle)$，则

$$\left\langle\int_0^\cdot\Phi dM,\int_0^\cdot\Psi dN\right\rangle_t=\int_0^t\Phi\Psi d\langle M,N\rangle. \qquad (2.35)$$

证明 由(2.28)及积分定义直接推得。

定理2.6(唯一性性质) 若 $M\in\mathscr{M}_2^{loc}$,$\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$，则

$$X=\int_0^\cdot\Phi dM$$

是 Kunita-Watanabe 方程对 $\forall N\in\mathscr{M}_2^{loc}$

$$\langle X,N\rangle=\int_0^\cdot\Phi d\langle M,N\rangle \qquad (2.36)$$

在 $\mathscr{M}_2^{loc}$ 中的唯一解。

所有的 $\mathscr{M}_2^{loc}$ 也可全改为 $\mathscr{M}_2^{c,loc}$ 或全改为 $\mathscr{M}_2^{\tau,loc}$。当 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)$时，所有的$\mathscr{M}_2^{loc}$ 也可全改为$\mathscr{M}_2$或全改为$\mathscr{M}_2^{\tau}$或全改为$\mathscr{M}_2^{\tau}$。

证明 由定理2.5，我们只需证明唯一性。设 $\tilde{X}$ 也是(2.36)在$\mathscr{M}_2^{loc}$ 中的一个解，那么

$$\langle X-\tilde{X},N\rangle=0 \quad (\forall N\in\mathscr{M}_2^{loc}).$$

取 $N=X-\tilde{X}$ 就得到

$$\langle X-\tilde{X}\rangle=0,\ 即\ X-\tilde{X}=0$$

(在$\mathscr{M}_2^{loc}$ 中的含义)。

注 方程(2.36)是 Kunita-Watanabe 用来作为随机积分的定

义的特征性质。他们称X为Φ对M的随机积分，如果X满足方程(2.36)。

定理2.7 设

$$M\in\mathscr{M}_2^{loc},\ \Phi\in\hat{\mathscr{F}}_2^{loc}(\langle M\rangle),\ N_t=\int_0^t\Phi\mathrm{d}M,$$

那么

$$\Psi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle N\rangle)\Longleftrightarrow\Phi\Psi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle).$$

在条件成立下，我们有

$$\int_0^t\Psi\mathrm{d}N=\int_0^t\Psi\Phi\mathrm{d}M. \tag{2.37}$$

证明 充要条件由定义直接得到.为了证明(2.37)，取$\forall L\in\mathscr{M}_2^{loc}$，应用定理 2.5，我们有

$$\begin{aligned}\left\langle\int_0^\cdot\Psi\mathrm{d}N,L\right\rangle_t&=\int_0^t\Psi\mathrm{d}\langle N,L\rangle\\&=\int_0^t\Psi_s\mathrm{d}\left(\int_0^s\Phi\mathrm{d}\langle M,L\rangle\right)\\&=\int_0^t\Psi\Phi\mathrm{d}\langle M,L\rangle=\int_0^\cdot\Psi\Phi\mathrm{d}\langle M,L\rangle_t.\end{aligned}$$

根据定理2.6，就应有(2.37)。

定理2.8 若$M\in\mathscr{M}_2^{loc}$，$\Phi\in\hat{\mathscr{F}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$，而且存在某个$(\mathscr{F}_t)$停时列$\sigma_n\uparrow\infty$，$\sigma_0=0$，使

$$\Phi=\Phi_0I_{(0)}(t)+\sum_{k=0}^\infty\Phi_kI_{(\sigma_k,\sigma_{k+1}]}(t)\quad(\Phi_k\in\mathscr{F}_{\sigma_k},\Phi_0\in\mathscr{F}_0),$$

则

$$\int_0^t\Phi\mathrm{d}M=(p)\sum_{k=0}^\infty\Phi_k(M_{\sigma_{k+1}\wedge t}-M_{\sigma_k\wedge t}). \tag{2.38}$$

若还有$M\in\mathscr{M}_2^c$，那么对$\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$中任意一个轨道连续的$\Phi$及对$t$连续的有界$(\mathscr{F}_t)$停时族$\sigma_t\uparrow\infty$，有

$$\int_0^{\sigma t} \Phi \mathrm{d}M = (p) \lim_{n\to\infty} \sum_k \Phi_{\sigma_{\frac{k}{2^n}t}} (M_{\sigma_{\frac{k+1}{2^n}t}} - M_{\sigma_{\frac{k}{2^n}t}}). \quad (2.38')$$

证明 由于 $\Phi \in \hat{\mathscr{L}}_2^{loc}$，$\exists (\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n \uparrow \infty$，使

$$\sum_k E \int_0^t \Phi_k^2 I_{(\sigma_k \wedge \tau_n, \sigma_{k+1} \wedge \tau_n]}(s) \mathrm{d}\langle M\rangle_s$$

$$= E \int_0^t \left[\sum_k \Phi_k I_{(\sigma_k \wedge \tau_n, \sigma_{k+1} \wedge \tau_n]}(s)\right]^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty,$$

于是

$$\int_0^t \left|\sum_{m+1}^{\infty} \Phi_k I_{(\sigma_k, \sigma_{k+1})}(s) I_{[0, \tau_n]}(s)\right|^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_s \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

因此由定理2.3

$$\int_0^t \Phi I_{[0,\tau_n]} \mathrm{d}M$$

$$= (\mathscr{M}_2) \lim_{m\to\infty} \sum_0^m \int_0^t \Phi_k I_{(\sigma_k \wedge \tau_n, \sigma_{k+1} \wedge \tau_n]} \mathrm{d}M$$

$$= (p) \lim_{m\to\infty} \sum_0^m \int_0^t \Phi_k I_{(\sigma_k \wedge \tau_n, \sigma_{k+1} \wedge \tau_n]} \mathrm{d}M$$

$$= (p) \lim_{m\to\infty} \sum_0^m (\mathscr{M}_2)$$

$$\times \lim_{T\to\infty} \int_0^t \Phi_k I_{|\Phi_k| < T} I_{(\sigma_k \wedge \tau_n, \sigma_{k+1} \wedge \tau_n]} \mathrm{d}M$$

$$= (p) \lim_{m\to\infty} \sum_0^m (p) \lim_{T\to\infty} \Phi_k I_{|\Phi_k| < T} (M_{\sigma_k \wedge \tau_n \wedge t}$$

$$- M_{\sigma_{k+1} \wedge \tau_n \wedge t})$$

$$= (p) \sum_0^{\infty} \Phi_k (M_{\sigma_k \wedge \tau_n \wedge t} - M_{\sigma_{k+1} \wedge \sigma_n \wedge t}).$$

这样，由定义

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}M = \sum_{n=1}^{\infty} I_{(\tau_{n-1}, \tau_n]}(t) \int_0^t \Phi I_{[0,\tau_n]} \mathrm{d}M$$

$$= \sum_n \sum_k I_{(\tau_{n-1},\tau_n]}(t)\Phi_k(M_{\sigma_{k+1}\wedge\tau_n\wedge t} - M_{\sigma_k\wedge\tau_n\wedge t})$$

$$= \sum_n \left[\sum_k \Phi_k(M_{\sigma_{k+1}\wedge t} - M_{\sigma_k\wedge t}\right] I_{(\tau_{n-1},\tau_n]}(t)$$

$$= (p)\sum_k \Phi_k(M_{\sigma_{k+1}\wedge t} - M_{\sigma_k\wedge t}).$$

此即(2.38)。而(2.38′)是(2.38)及 $\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)$函数的积分的定义的推论。

命题2.25 设$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上有$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动$B$及特征为常函数的$(\mathscr{F}_t)$局部平方可积鞅列$M_t^{(n)}$，它们满足：

(L₁) 对$\forall s\leqslant t$，$M_s^{(n)}\xrightarrow{p} B_s$，$\langle M^{(n)}\rangle_s \to s \quad (n\to\infty)$；

对于$\Phi^{(n)}\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M^{(n)}\rangle)$，$\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}$，还满足

(L₂) 对$\forall s\leqslant t$，$\Phi_s^{(n)}\xrightarrow{p}\Phi_s$；

(L₃) 对$\forall N$，关于n一致地有

$$P(\sup_{[0,t]}|\Phi_s^{(n)}|>N)\to 0 \quad (N\to\infty)；$$

(L₄) $\Phi_s^{(n)}$对s在概率收敛意义下连续，而且

$$\sup_n \sup_{|s_1-s_2|<h;\ s_1,s_2\leqslant t} P(|\Phi_{s_1}^{(n)} - \Phi_{s_2}^{(n)}|>\varepsilon)\to 0 \quad (h\to 0),$$

那么

$$\int_0^t \Phi_s^{(n)}\mathrm{d}M_s^{(n)} \xrightarrow{p} \int_0^t \Phi\mathrm{d}B \quad (n\to\infty).$$

证明 定义连续函数

$$g_N(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant N, \\ N+1-|x|, & N<|x|\leqslant N+1, \\ 0, & |x|>N+1. \end{cases}$$

注意，如果令

$$\sigma_N = \inf\{t: |\Phi_t| > N\},$$

那么 σ_N 是$(\mathscr{F}_t)$停时，而且当 $s \leqslant \sigma_N$ 时有

$$g_N(\Phi_s^{(n)})\Phi_s^{(n)} = \Phi_s^{(n)} I_{[0,\sigma_N]}(s).$$

利用(L_3)及(2.32)，我们有

$$P\left(\left|\int_0^t g_N(\Phi_s^{(n)})\Phi_s^{(n)} \mathrm{d}M_s^{(n)} - \int_0^t \Phi_s^{(n)} \mathrm{d}M_s^{(n)}\right| > \varepsilon\right)$$

$$\leqslant P(\sup_{[0,t]} |\Phi_s^{(n)}| > N) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \quad (\text{对 } n \text{ 一致}). \quad (^{\#}1)$$

类似地还有

$$\int_0^t g_N(\Phi_s)\Phi_s \mathrm{d}B_s \xrightarrow{p} \int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s \quad (N \to \infty). \quad (^{\#}2)$$

对于$[0,t]$的分割

$$0 = t_0^{(m)} < \cdots < t_{l_m}^{(m)} = t, \quad \lambda_m = \max_k (t_{k+1}^{(m)} - t_k^{(m)}) \to 0,$$

我们作 $g_N(\Phi_s^{(n)})\Phi_s^{(n)}$ 的梯形近似 $\Psi_s^{(n,m)}$(与N也有关， 但是我们省去了足标N)：

$$\Psi_s^{(n,m)} = \sum_k g_N(\Phi_{t_k^{(m)}}^{(n)}) \Phi_{t_k^{(m)}}^{(n)} I_{(t_k^{(m)}, t_{k+1}^{(m)}]}(s).$$

由于(L_4)，$\Phi_s^{(n)}$关于n一致地对 s 概率连续，因此 $g_N(\Phi_s^{(n)})\Phi_s^{(n)}$ 也是关于n一致地对 s 概率连续。由有界收敛性便得到

$$\sup_{|s_1 - s_2| \leqslant \lambda_m, s_1, s_2 \leqslant t} E|\Phi_{s_1}^{(n)} g_N(\Phi_{s_1}^{(n)}) - \Phi_{s_2}^{(n)} g_N(\Phi_{s_2}^{(n)})|^2 \to 0$$

$$(\lambda_m \to 0),$$

而且它关于n一致地成立。

又由(L_1)，$\langle M^{(n)}\rangle_t$ 对 n 有界，因此由 $\Psi^{(n,m)}$ 的定义推出

$$E\int_0^t |\Psi_s^{(n,m)} - \Phi_s^{(n)} g_N(\Phi_s^{(n)})|^2 \mathrm{d}\langle M^{(n)}\rangle_s$$

$$\leqslant \sup_{|s_1 - s_2| \leqslant \lambda_m, s_1, s_2 \leqslant t} E|\Phi_{s_1}^{(n)} g_N(\Phi_{s_1}^{(n)}) - \Phi_{s_2}^{(n)} g_N(\Phi_{s_2}^{(n)})|^2$$

$$\times \langle M^{(n)}\rangle_t \to 0 \quad (m \to \infty, \text{对 } n \text{ 一致地成立}).$$

因此

$$\int_0^t \Psi_s^{(n,m)} \mathrm{d}M_s^{(n)} - \int_0^t \Phi_s^{(n)} g_N(\Phi_s^n) \mathrm{d}M_s^{(n)}$$

$$\xrightarrow{p} 0 \quad (m \to \infty). \tag{*3}$$

类似地对 Φ 也可以定义对应的 $\Psi^{(m)}$，并且有

$$\int_0^t \Psi_s^{(m)} \mathrm{d}B_s - \int_0^t \Phi_s g_N(\Phi_s) \mathrm{d}B_s \xrightarrow{p} 0 \quad (m \to \infty). \tag{*4}$$

把(*1),(*2),(*3),(*4)结合起来就得到

$$\int_0^t \Phi_s^{(n)} \mathrm{d}M_s^{(n)} \xrightarrow{p} \int_0^t \Phi_s \mathrm{d}B_s.$$

§2.5 局部平方可积鞅的分解

在$\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$中，互特征$\langle M,N\rangle$有些像内积．但是它不是数而是随机过程．它是一个随机过程值的对称“双线性型”，而且$\langle M\rangle \geq 0$．于是可以用$\langle M,N\rangle$在$\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$中定义一种类似于正交的概念，在本书中我们姑且称之为“强正交”．

定义2.24 M，$N\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，我们称$M$与$N$强正交，如果$\langle M,N\rangle=0$．记成$M \perp\!\!\!\perp N$．

引理2.19 若M，$N\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，则$M \perp\!\!\!\perp N$，当且仅当$MN$是$(\mathscr{F}_t)$局部鞅．

若M，$N\in\mathscr{M}_2$，则下述三种叙述彼此等价：

1° $M \perp\!\!\!\perp N$；

2° MN是$(\mathscr{F}_t)$鞅；

3° $\forall a>0$，$\forall(\mathscr{F}_t)$停时τ有$EM_{\tau\wedge a}N_{\tau\wedge a}=0$．

证明 第一部分及第二部分中的1°等价于2°，均是Doob-Meyer分解的直接推论．

2°$\Rightarrow$3°．由Doob停止定理便得

$$EM_{\tau\wedge a}N_{\tau\wedge a}=EM_0N_0=0.$$

3°$\Rightarrow$2°．记$X=MN$．它是右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程．任取$A\in$

$\mathscr{F}_s$, $s<t$, 令

$$\tau = sI_A + tI_{A^c}.$$

显然 τ 是有界$(\mathscr{F}_t)$停时，而且

$$E(I_A X_s) = EX_\tau - E(I_{A^c} X_t).$$

但是由假定3°,

$$EX_\tau = EX_{\tau\wedge t} = E(M_{\tau\wedge t} N_{\tau\wedge t}) = 0 = E(M_t N_t) = EX_t.$$

因此

$$E(I_A X_s) = EX_t - E(I_{A^c} X_t) = E(I_A X_t).$$

即 $X = MN$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅。

今讨论 $\mathscr{M}_2$ 的子空间

$$\mathscr{M}_2(a) = \{M_{t\wedge a}: M \in \mathscr{M}_2\}.$$

它在内积 $EM_a N_a$ 下构成 Hilbert 空间。如果 $M, N \in \mathscr{M}_2(a)$，而且 $M \perp\!\!\!\perp N$，那么它们一定在这Hilbert 空间的内积下正交(记成 $M \perp N$)。但是强正交毕竟不是一种正交性概念，当然也就谈不上有正交补分解。然而对于 $\mathscr{M}_2(a)$的某种特殊性质的闭子空间，我们可以借助于正交概念(即$\perp$概念)来得到一个“强正交补”。

引理2.20 设$\mathscr{X} \subset \mathscr{M}_2(a)$，$\mathscr{X}$在 $\mathscr{M}_2(a)$中的线性闭包为 $\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$，则我们有：

1° $M \in \mathscr{M}_2(a)$，$M \perp\!\!\!\perp \mathscr{X} \Rightarrow M \perp\!\!\!\perp \overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$；

2° 若$\mathscr{X}$满足稳定条件（即：对于$\forall N \in \mathscr{X}$，$\forall(\mathscr{F}_t)$停时 τ，均有 $N^{\tau\wedge a} \in \mathscr{X}$)，则 $\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$及$\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$在$\mathscr{M}_2(a)$中的正交补 $\mathscr{X}^\perp$ 也满足稳定条件．而且还有

$$\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}^\perp$$

(即不仅正交，而且“强正交”)。

证明 1°的证明．设$\mathscr{X}$的线性包为$\mathscr{L}(\mathscr{X})$。如果$M \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}$，那么 $M \perp\!\!\!\perp \mathscr{L}(\mathscr{X})$。又若 $N \in \overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$，那么存在 $N^{(n)} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$使 $E(N_a - N_a^{(n)})^2 \to 0$。由下鞅性质得 $E(N_t - N_t^{(n)})^2 \to 0 (t \leqslant a)$。因

此我们有 $E|M_tN_t - M_tN_t^{(n)}| \to 0\ (t \leqslant a)$。但是 $MN_t^{(n)}$ 在 $t \leqslant a$ 时是 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅，所以 M_tN_t 在 $t \leqslant a$ 是 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅。也即 $M \perp\!\!\!\perp N$。

2° 的证明。首先证明 $\mathscr{X}^{\perp}$ 满足稳定条件。对于 $N \in \mathscr{X}^{\perp}$ $a > 0$ 及停时 τ，以及 $\forall M \in \mathscr{X}$，由 $\mathscr{X}$ 满足稳定条件，我们有 $M^{a\wedge\tau} \in \mathscr{X}$。因此 $EN_aM_{a\wedge\tau} = 0$。又由

$$EN_{a\wedge\tau}M_a = EN_{a\wedge\tau}M_{a\wedge\tau} + EN_{a\wedge\tau}(M_a - M_{a\wedge\tau}),$$

$$EN_{a\wedge\tau}(M_a - M_{a\wedge\tau}) = E[N_{a\wedge\tau}E((M_a - M_{a\wedge\tau})|\mathscr{F}_{a\wedge\tau})] = 0$$

推出

$$EN_{a\wedge\tau}M_a = EN_{a\wedge\tau}M_{a\wedge\tau} = EN_aM_{a\wedge\tau} = 0.$$

即 $N^{a\wedge\tau} \perp M$。但是 M 是任意的，所以 $N^{a\wedge\tau} \perp \mathscr{X}$。也就是 $N^{a\wedge\tau} \in \mathscr{X}^{\perp}$。故而 $\mathscr{X}^{\perp}$ 满足稳定条件。于是立刻推出

$$\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})} = (\mathscr{X}^{\perp})^{\perp}$$

也满足稳定条件。

最后来证明 $\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}^{\perp}$。由于 $\mathscr{X}, \mathscr{X}^{\perp}$ 均满足稳定条件，对于 $a>0$，$(\mathscr{F}_t)$ 停时 τ，$M \in \mathscr{X}$ 及 $N \in \mathscr{X}^{\perp}$，我们有 $M^{a\wedge\tau} \in \mathscr{X}$，$N^{a\wedge\tau} \in \mathscr{X}^{\perp}$。所以 $EM_{\tau\wedge a}N_{\tau\wedge a} = 0$。应用引理 2.19 就得到 $M \perp\!\!\!\perp N$。从而有 $\mathscr{X} \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}^{\perp}$。再用 1° 得

$$\overline{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}^{\perp}.$$

例1 设 $M \in \mathscr{M}_2$，那么

$$\mathscr{X} = \left\{ \int_0^{t\wedge a} \Phi \mathrm{d}M;\ \Phi \in \mathscr{L}_2(\langle M \rangle) \right\}$$

是 $\mathscr{M}_2(a)$ 的一个满足稳定条件的子空间。

定理2.9 对于 $M \in \mathscr{M}_2^{loc}$，存在唯一的 $M^c \in \mathscr{M}_2^{c,loc}$，使 M 具有分解

$$M = M^c + M^d, \tag{2.39}$$

其中 $M^d = M - M^c$ 满足 $M^d \perp\!\!\!\perp \mathscr{M}_2^{c,loc}$。

如果 $M \in \mathscr{M}_2$，那么还有 $M^c \in \mathscr{M}_2^c$，$M^d \perp\!\!\!\perp \mathscr{M}_2^c$。

记

$$\mathscr{M}_2^d=(\mathscr{M}_2^c)^{\perp\!\!\perp},\quad \mathscr{M}_2^{d,loc}=(\mathscr{M}_2^{c,loc})^{\perp\!\!\perp}$$

($\mathscr{X}^{\perp\!\!\perp}$意即与$\mathscr{X}$中元素均强正交的元素全体)。我们分别称其中的元素为纯断的平方可积鞅与纯断的局部平方可积鞅。

证明 首先，我们设$M\in\mathscr{M}_2$。由于$\mathscr{M}_2^c(a)$满足稳定条件，由引理2.20，在Hilbert空间的正交分解$\mathscr{M}_2(a)=\mathscr{M}_2^c(a)\oplus(\mathscr{M}_2(a))^{\perp}$中还成立$\mathscr{M}_2^c(a)\perp\!\!\perp(\mathscr{M}_2^c(a))^{\perp}$。分别取$a=n$及$n+1$，我们就得到分解

$$M_{t\wedge n}=M_t^{1,n}+M_t^{2,n}(M_t^{1,n}\in\mathscr{M}_2^c(a),\ M_t^{2,n}\in(\mathscr{M}_2^c(a))^{\perp}),$$

$$M_{t\wedge(n+1)}=M_t^{1,n+1}+M_t^{2,n+1}.$$

所以对于任意$N\in\mathscr{M}_2^c(n)(\subset\mathscr{M}_2^c(n+1))$，$M_t^{2,n+1}N_t$是$(\mathscr{F}_t)$鞅。于是有$EM_n^{2,n+1}N_n=0$。也就是$M_{t\wedge n}^{2,n+1}\perp\mathscr{M}_2^c(n)$。因此$M_{t\wedge n}^{2,n+1}\in(\mathscr{M}_2^c(n))^{\perp}$。由正交分解的唯一性，我们得到

$$M_t^{1,n}=M_{t\wedge n}^{1,n+1},\quad M_t^{2,n}=M_{t\wedge n}^{2,n+1}.$$

现在我们定义

$$M_t^c=M_{t\wedge n}^{1,n},\quad M_t^d=M_{t\wedge n}^{2,n}\qquad (t\leqslant n,\forall n).$$

显然$M^c\in\mathscr{M}_2^c$，$M^d\in\mathscr{M}_2$。

今证$M^d\perp\!\!\perp\mathscr{M}_2^c$。事实上由引理2.20对$\forall N\in\mathscr{M}_2^c$应该有$M_{t\wedge n}^d\perp\!\!\perp N_{t\wedge n}$。所以对任意$n$，$M_{t\wedge n}^d N_{t\wedge n}$是$(\mathscr{F}_t)$鞅。由此$M_t^d N_t$是$(\mathscr{F}_t)$鞅。也就是$M^d\perp\!\!\perp N$。这就证明了$M^d\perp\!\!\perp\mathscr{M}_2^c$。显然$M^c,M^d$是唯一的。

最后，我们设$M\in\mathscr{M}_2^{loc}$。这时候必有$(\mathscr{F}_t)$停时列$\tau_n\uparrow\infty$，使$M^{\tau_n}\in\mathscr{M}_2$。于是由上段的证明$M^{\tau_n}$应该有分解

$$M^{\tau_n}=M^{1,n}+M^{2,n}\quad (M^{1,n}\in\mathscr{M}_2^c,M^{2,n}\in\mathscr{M}_2^d).$$

同样$M_t^{\tau_n}=M_{t\wedge\tau_n}^{\tau_{n+1}}$的右边也能写成$M_{t\wedge\tau_n}^{1,n+1}+M_{t\wedge\tau_n}^{2,n+1}$，其中$M_{\cdot\wedge\tau_n}^{1,n+1}\in\mathscr{M}_2^c$，$M_{\cdot\wedge\tau_n}^{2,n+1}\in\mathscr{M}_2^d$。由Hilbert空间中正交分解(Riesz分解)的唯一性便有

$$M_t^{1,n}=M_{t\wedge\tau_n}^{1,n},\quad M_t^{2,n}=M_{t\wedge\tau_n}^{2,n}\quad (t\leqslant\tau_n).$$

对$\forall n$，我们定义

$$M_t^c=M_t^{1,n},\quad M_t^d=M_t^{2,n}\quad(t\leqslant\tau_n).$$

于是$M^c\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$。我们来证明$M^d\in\mathscr{M}_2^{d,loc}$。任取$N\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$，那末必存在$(\mathscr{F}_t)$停时列$\sigma_n\uparrow\infty$，使$N^{\sigma_n}\in\mathscr{M}_2^c$。令$\tau_n^0=\sigma_n\wedge\tau_n\wedge n$。那末$N^{\tau_n^0}\in\mathscr{M}_2^c(n)$。但是$M^d_{\cdot\wedge\tau_n^0}=M^{2,n}_{\cdot\wedge\tau_n^0}\in(\mathscr{M}_2^c(n))^\perp$。

再应用引理2.20一次便得$N^{\tau_n^0}\perp\!\!\!\perp(M^d)^{\tau_n^0}$。这说明对任意$n$，$N_{t\wedge\tau_n^0}M^d_{t\wedge\tau_n^0}$是$(\mathscr{F}_t)$鞅。从而$NM^d$是$(\mathscr{F}_t)$局部鞅。也就是$N\perp\!\!\!\perp M^d$。由$N$的任意性即得$M^d\perp\!\!\!\perp\mathscr{M}_2^{c,loc}$。

§2.6 半鞅及对半鞅的随机积分

定义2.25 右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程A称为有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程，如果在任意有限时间区间上，它的轨道以概率为1地都是有界变差函数。

引理2.21 有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程A可以写成两个$(\mathscr{F}_t)$增过程之差，而且A的全变差过程$\int_0^t|dA|_s$（$|dA|_s$指A_t按轨道的全变差测度），A的离散部分A^d及连续部分A^c，均是$(\mathscr{F}_t)$适应的。如果A还是可料的，那么$\int_0^t|dA|_s$及A^d均为可料的，并且A可表成两个可料增过程之差。

证明 在引理2.12证明的第一段中取$X=A$，同时定义τ_n如引理2.12证明中一样。记

$$\Delta A_t=A_t-A_{t-}.$$

那么ΔA_t是$(\mathscr{F}_t)$循序过程。因此$\Delta A_{\tau_n}\in\mathscr{F}_{\tau_n}$。记$A$在$[0,t]$中的全体跳跃点的跳跃和为$A_t^d$，即

$$A_t^d=\sum_n\Delta A_{\tau_n}I_{(\tau_n<t)}\in\mathscr{F}_t.$$

于是 $A_t^c \equiv A_t - A_t^d$ 是 A 的连续部分，而且也是$(\mathscr{F}_t)$适应的。（当 A 可料时，由命题2.6推论3可知τ_n为可料时，因而$|\Delta A_{\tau_n}|I_{\{\tau_n<t\}}$可料。）此外

$$\int_0^t |dA^d|_s = \sum_n |\Delta A_{\tau_n}| I_{\{\tau_n<t\}} \in \mathscr{F}_t$$

（当 A 可料时，左边可料），

$$\int_0^t |dA^c|_s = \lim_n \sum_{k=0}^{2^n-1} |A^c_{\frac{k+1}{2^n}t} - A^c_{\frac{k}{2^n}t}| \in \mathscr{F}_t.$$

因而

$$\int_0^t |dA|_s = \int_0^t |dA^d|_s + \int_0^t |dA^c|_s \in \mathscr{F}_t,$$

而且 $A = A^{(1)} - A^{(2)}$，其中

$$A_t^{(1)} = \frac{\int_0^t |dA|_s + A_t}{2}, \quad A_t^{(2)} = \frac{\int_0^t |dA|_s - A_t}{2}$$

都是$(\mathscr{F}_t)$适应（相应地：可料增过程）。于是引理得证。

引理2.22 若 A_t 是局部可积右连续$(\mathscr{F}_t)$增过程，$\Delta A_t = A_t - A_{t-}$，则有

$$\Delta(A^p) = {}^p(\Delta A).$$

证明 取停时列 $\tau_n \uparrow \infty$ 使 $A_{t\wedge\tau_n} - A^p_{t\wedge\tau_n}$ 为可积变差鞅。用命题2.13′后例1同样的推理可得它的可料投影为 $A_{t-}^{\tau_n} - (A^p)_{t-}^{\tau_n}$。另一方面由引理2.1知道，对于任意可料时 τ，

$$\Omega_n \equiv \{\tau \leqslant \tau_n\} \cup \{\tau = \infty\} \in \mathscr{F}_{\tau-}.$$

于是在 Ω_n 上 $A_t - A_t^p$ 有可料投影

$$A_{t-} - A^p_{t-}.$$

因此 $A_t - A_t^p$ 的可料投影存在且就是 $A_{t-} - A^p_{t-}$。于是

$${}^pA_- - A^p_- = {}^p(A - A^p) = {}^pA - A^p.$$

这就推出我们所要的结论。

命题2.26（局部鞅分解定理） 对于任给的$\varepsilon>0$，局部鞅X可

作如下的分解：

$$X-X_0=M+G, \qquad (2.40)$$

其中M是零初值局部有界鞅(即存在停时列$\tau_n\uparrow\infty$，使M^{τ_n}为有界鞅(等价于局部有界的局部鞅))，且其跃度$\Delta M=M-M_-$绝对值不超过ε，而G是局部可积变差鞅。

如果X是拟左连续的，即对于任意停时列$\sigma_n\uparrow\sigma$恒有

$$X_{\sigma_n}I_{\sigma<\infty}\to X_\sigma I_{\sigma<\infty},$$

那么M,G也可取成拟左连续，同时$\Delta M\cdot\Delta G=0$。

证明 设停时列$\tau_n^\circ\uparrow\infty$使$X^{\tau_n^\circ}$是一致可积鞅。令

$$A_t=\sum_{s\le t}\Delta X_s I_{\{|\Delta X_s|>\varepsilon/2\}}.$$

则它是有限变差的。记

$$\tau_n=\tau_n^\circ\wedge\inf\left\{t:\ |X_t|\geqslant n\ 或\ \sum_{s\le t}|\Delta A_s|\geqslant n\right\}.$$

我们有

$$\sum_{s\le\tau_n}|\Delta A_s|\leqslant\sum_{s<\tau_n}|\Delta A_s|+|X_{\tau_n}-X_{\tau_n-}|\leqslant 2n+|X_{\tau_n}|.$$

所以A_t是局部可积变差过程。因此$G_t=A_t-\tilde{A}_t$($\tilde{A}\equiv A^p$)是局部可积变差鞅。令$M\equiv X-X_0-G$，$Y\equiv M-\tilde{A}$。于是M是局部鞅，而且$X-X_0=M+G$。用命题2.13后面的例1可得${}^pM=M_-$，即${}^p(\Delta M)=0$。所以${}^p(\Delta Y)=-{}^p(\Delta\tilde{A})$。另一方面由$Y=X-X_0-A$，按$A$的定义可知$|\Delta Y|<\varepsilon/2$。所以由可料投影的定义推出$|{}^p(\Delta Y)|<\varepsilon/2$。因此由引理2.22我们得到：

$$|\Delta\tilde{A}|=|\Delta(\tilde{A})^p|=|{}^p(\Delta\tilde{A})|=|{}^p(\Delta Y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而有

$$|\Delta M|\leqslant|\Delta Y|+|\Delta\tilde{A}|<\varepsilon.$$

再记$\sigma_n=\inf\{t:\ |M_t|\geqslant n\}$。那么

$$|M^{\sigma_n}|\leqslant|M^{\sigma_n-}|+|\Delta M_{\sigma_n}|<n+\varepsilon.$$

所以M是局部有界的。

当X拟左连续时，A也是拟左连续的。因此A是正则的（定义2.19）。$\tilde{A}$与A相差一个局部鞅，所以存在停时列$\tau_n \uparrow \infty$（a.e.dP），使$\tilde{A}^{\tau_n}$是正则的。由命题2.17可知$\tilde{A}^{\tau_n}$连续，于是$\tilde{A}$也连续。从而G与M都拟左连续。同时

$$\begin{aligned}\Delta G \Delta M &= \Delta A(\Delta X - \Delta A) \\ &= \Delta X \cdot I_{\{|\Delta X| > \frac{a}{2}\}} \cdot \Delta X I_{\{|\Delta X| > \frac{a}{2}\}} = 0.\end{aligned}$$

注 分解方式并不唯一。

定义2.26 右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程X称为$(\mathscr{F}_t)$半鞅，如果X_0对$\mathscr{F}_0$为σ可积，而且$X - X_0$可以写成$M + A$：

$$X - X_0 = M + A,$$

其中M是零初值$(\mathscr{F}_t)$局部鞅，而A是（右连左极的）有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程。若存在连续的M, A，则称X为连续半鞅。

注1 由命题2.26可知，局部鞅是半鞅。又在半鞅的定义中，M可以要求属于$\mathscr{M}_2^{loc}$。

注2 半鞅的分解式并不唯一，也就是存在有限变差的局部鞅。有限变差过程一般不能用局部化方法归结为可积变差过程，故不能有可料对偶投影。但是，又是局部鞅的有限变差过程必是局部可积变差的（因此存在可料对偶投影）。事实上，对于这样的过程M，由命题2.26存在分解$M_0 + M' + G$，其中G局部可积变差，M'是局部有界的局部鞅，这里它也应是有限变差的。于是存在停时$\tau_n \uparrow \infty$使$(M')^{\tau_n}$有界。令

$$\sigma_n = \tau_n \wedge \inf\left\{t;\ \int_0^t |\mathrm{d}M'|_s \geqslant n\right\},$$

那么

$$E\int_0^{\sigma_n} |\mathrm{d}M'|_s \leqslant E\left(\int_0^{\sigma_n -} |\mathrm{d}M'|_s + |M'_{\tau_n} - M'_{\tau_n -}|\right)$$

$$\leqslant 2n + \sup_{t,\omega} |M'^{\tau_n}_t|,$$

因此 M' 局部可积变差，从而M局部可积变差。

引理2.23 半鞅分解中按注1所得的局部平方可积鞅的连续部分是唯一的，它称为半鞅的连续局部鞅部分(因此连续半鞅的分解是唯一的)。

证明 设 $X = X_0 + M' + A'$ 及 $X_0 + M + A$，其中 $M, M' \in \mathscr{M}_2^{loc}$，$A, A'$有限变差适应。那么 $L \equiv M' - M = A - A'$是有限变差的局部鞅。应用类似于命题2.14(但是是可选情形)的结论(证明相仿)可知 $L = L^{\circ}$(可选对偶投影)。现在我们先假定L是一致可积的有限变差过程。那么对于任意停时τ，我们必有：

$$E(N_\tau L_\tau) = E\left(\int_0^\tau N_s dL_s\right) \quad (\forall \text{有界连续鞅} N).$$

事实上，由于我们可用 N^τ 代替N，所以不妨设 $\tau = \infty$。这样

$$E(N_\infty L_\infty) = E\int_0^\infty N_\infty dL = E\int_0^\infty N_\infty dL^{\circ}$$

$$= E\int_0^\infty {}^{\circ}(N_\infty)_s dL_s = E\int_0^\infty N_s dL_s.$$

这就得到了上面的等式。我们采用引理2.19的证明中所用的推理就得到：

$$X \equiv NL - \int_0^{\cdot} N_s dL_s \text{是鞅}.$$

但是$\int_0^t N dL$ 是鞅。因此对一切有界鞅N而言，NL也是鞅。

对于一般 $L \in \mathscr{M}_2^{loc}$，及 $\forall N \in \mathscr{M}_2^{c,loc}$，我们可取停时$\tau_n \uparrow \infty$ (a.e. dP)，使 L^{τ_n}, N^{τ_n}满足上面要求。于是$N^{\tau_n} L^{\tau_n}$是鞅，从而NL是局部鞅。这说明$L \perp\!\!\!\perp N$。但是$N \in \mathscr{M}_2^{c,loc}$可以任意地取，所以$L \perp\!\!\!\perp \mathscr{M}_2^{c,loc}$。也就是$L$的连续部分 $L^c = 0$。这样我们就有

$$M'^c - M^c = L^c = 0.$$

引理2.24 设 $M\in\mathscr{M}_2^{loc}$，而且M还是有限变差的。设它的全变差过程为$\|M\|_t$。又若 $\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_1^{loc}(\|M\|)\cap\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$，则

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}M=(\mathrm{D})\int_0^t \Phi \mathrm{d}M, \tag{2.41}$$

其中$(\mathrm{D})\int_0^t \Phi \mathrm{d}M$ 是指按轨道的Lebesgue-Stietjes积分。

证明 首先，若 Φ 有界，那么 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\|M\|+\langle M\rangle)$，而且存在 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使

$$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_2(\|M\|+\langle M\rangle)}\to 0.$$

从而$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_1(\|M\|)}$及$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)}\to 0$。按定义有

$$\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}M=(\mathrm{D})\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}M.$$

令 $n\to\infty$ 即得(2.41)。

其次，若 $\Phi\in\mathscr{L}_1(\|M\|)\cap\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)$，那么置 $\Phi^{(n)}=\Phi I_{|\Phi|<n}$。于是 $\Phi^{(n)}$ 有界，而且$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_1(\|M\|)}$，$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_2(\langle M\rangle)}\to 0$。由前段证明可知对 $\Phi^{(n)}$(2.41)成立。令 $n\to\infty$推出(2.41)对 Φ 也成立。

最后，对一般的 $\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_1^{loc}(\|M\|)\cap\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$，存在$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n^{(1)},\tau_n^{(2)}\uparrow\infty$，使

$$\Phi I_{[0,\tau_n^{(1)}]}\in\mathscr{L}_1(\|M\|),\quad \Phi I_{[0,\tau_n^{(2)}]}\in\mathscr{L}_2(\langle M\rangle).$$

令 $\tau_n=\tau_n^{(1)}\wedge\tau_n^{(2)}$，$\Phi^{(n)}=\Phi I_{[0,\tau_n]}$。那么

$$\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_1(\|M\|)\cap\mathscr{L}_2(\langle M\rangle),$$

而且$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_1^{loc}(\|M\|)}$，$\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_{\mathscr{L}_2^{loc}(\langle M\rangle)}\to 0$。由前段证明(2.41)对 $\Phi^{(n)}$ 成立。对 n 取极限便得(2.41)对 Φ 也成立。

对半鞅的随机积分：设X为$(\mathscr{F}_t)$半鞅：$X=X_0+M+A$。又设 $\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_1^{loc}(|dA|)\cap\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle M\rangle)$，我们定义

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}X = \int_0^t \Phi \mathrm{d}M + \int_0^t \Phi \mathrm{d}A, \qquad (2.42)$$

其中右方第二项是按轨道意义的积分，$M \in \mathscr{M}_2^{loc}$(见注 1)。

由引理2.24可知，按(2.42)定义的积分不依赖于X的分解方式。

例 局部有界的$(\mathscr{F}_t)$适应过程Φ(即存在停时$\tau_n \uparrow \infty$(a.e.dP)，使对于n固定，$\Phi I_{[[0,\tau_n]]}$是有界过程)对于任意半鞅都可积。特别地，左连适应过程或可料的右连左极适应过程都可积。

事实上，如果Φ右连左极适应且可料，那么

$$\tau_n \doteq \inf\{t: \ |\Phi_t| \geq n\}$$

为可料时，因此存在停时列$\sigma_{n,m}(m \geq 1)$预告τ_n。取$\sigma_n \doteq \sigma_{n,n}$，那么就有$|\Phi^{\sigma_n}| \leq n$。因此$\Phi$局部有界。

命题2.27 若M是局部鞅，Φ是局部有界的可料过程，那么$\int_t^{\cdot} \Phi_s \mathrm{d}M_s$也是局部鞅。

证明 按半鞅定义，存在分解$M = M' + A$，其中$M' \in \mathscr{M}_2^{loc}$，$A$为有限变差$(\mathscr{F}_t)$过程。显然$\int_0^{\cdot} \Phi \mathrm{d}M' \in \mathscr{M}_2^{loc}$。另一方面，由定义2.26后面的注 2 可知$A$是局部可积的，因为它是局部鞅。由命题2.15后的注 2，可见 0 是它的可料对偶投影。由于Φ局部有界易见$\int_0^{\cdot} \Phi_s \mathrm{d}A_s$也是局部可积的，由(2.12)我们得到

$$\left(\int_t^{\cdot} \Phi \mathrm{d}A\right)^p = \int_0^{\cdot} \Phi \mathrm{d}A^p = 0.$$

因此$\int_0^{\cdot} \Phi \mathrm{d}A$也是局部鞅。

命题2.28 若M是$(\mathscr{F}_t)$局部鞅，τ是$(\mathscr{F}_t)$可料时，则$M_\tau I_{\tau<\infty}$关于$\mathscr{F}_{\tau-}$为σ可积，而且其推广的数学期望有公式

$$E(M_\tau I_{\tau<\infty} | \mathscr{F}_{\tau-}) = M_{\tau-} I_{\tau<\infty} \quad (\text{即}\ {}^p M = M_-, M_{0-} \doteq M_0).$$

同时 $A\equiv\Delta M_\tau I_{[[\tau,\infty))}$ 是局部鞅，以后将指出它就是

$$\int_0^\cdot I_{\{\tau\}}(s)\mathrm{d}M_s.$$

证明 设 τ_n 为停时列，使 $\tau_n\uparrow\infty$(a.e.dP)，且 M^{τ_n} 为一致可积鞅。用可料停止定理(命题2.12)我们有

$$E(M_\tau^{\tau_n}I_{\tau<\infty}|\mathscr{F}_{\tau-})=M_{\tau-}^{\tau_n}I_{\tau<\infty}.$$

令 $\Omega_n=\{\tau\leqslant\tau_n\}\cup\{\tau=\infty\}$，那么 $\Omega_n\in\mathscr{F}_{\tau-}$ 且 $\Omega_n\uparrow\Omega$。而且 $M_\tau I_{\tau<\infty}I_{\Omega_n}$ 可积，因此 $M_\tau I_{\tau<\infty}$ 对 $\mathscr{F}_{\tau-}$ 为 σ 可积，同时

$$E(M_\tau I_{\tau<\infty}|\mathscr{F}_{\tau-})=M_{\tau-}I_{\tau<\infty}.$$

按可料投影的定义就是

$${}^pM=M_-\quad(M_{0-}\equiv M_0).$$

又 $A\equiv M_\tau I_{[[\tau,\infty))}\equiv(M_\tau^+-M_\tau^-)I_{[[\tau,\infty))}\equiv A^{(1)}-A^{(2)}$ 是有限变差 $(\mathscr{F}_t)$ 过程，它生成的符号测度 $\mu_A\equiv\mu_{A^{(1)}}-\mu_{A^{(2)}}$ 有

$$\mu_{A^{(i)}}([[\tau_{\Omega_n}]])\leqslant E(|M_\tau|I_{\tau<\infty}I_{\Omega_n})<\infty.$$

也就是可料集 $[[\tau]]^c\cup[[\tau_{\Omega_n}]]\uparrow[0,\infty)\times\Omega$，而且

$$\mu_{A^{(i)}}([[\tau]]^c\cup[[\tau_{\Omega_n}]])=\mu_{A^{(i)}}([[\tau_{\Omega_n}]])<\infty.$$

这说明 $\mu_{A^{(i)}}$ 限制在可料 σ 代数 $\mathscr{P}$ 上是 σ 有限测度，由命题2.14及2.15可知 A 局部可积且对偶可料投影 A^p 存在。再由引理2.22得

$$(\Delta M_\tau I_{[[\tau,\infty))})^p=(\Delta A)^p={}^p(\Delta A)={}^p(\Delta M_\tau I_{[[\tau,\infty))})=0.$$

因此 $\Delta M_\tau I_{[[\tau,\infty))}$ 是局部鞅。

定义2.27 半鞅 X 称为特殊半鞅，如果存在一组分解

$$X-X_0=M+A,$$

其中 M 为局部鞅，A 为局部可积变差过程。

注 若 M 为局部鞅，则 $M_t^*\in L^{loc}$(局部可积)，其中

$$M_t^*\equiv\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|M_s|.$$

证明 若 M 为一致可积鞅，则由下鞅 $|M|$ 的 Doob 不等式便得 $M_t^*\in L$。若 M 为局部鞅，则只要用一般局部化方法便得结论。

命题2.29 下列断言彼此等价：

1° X是特殊半鞅；

2° X的任意分解式X_0+M+A(M为局部鞅)中，A都是局部可积的；

3° X存在如上的一组分解式X_0+M+A，使A是可料的；

4° X^*($X_t^*=\sup\limits_{[0,t]}|X_s|$)是局部可积的增过程。

条件成立时3°中的分解式唯一，称其为特殊半鞅的标准分解。

证明 2°⇒1°显然。1°⇒3°：只须对1°中的A取可料对偶投影$\tilde{A}$，它就是3°中的可料有限变差过程。注意到3°中的分解式中的可料有限变差过程反过来也必是$\tilde{A}$，因为，如果有两个不同的分解$X=X_0+M+\tilde{A}=X_0+M'+\tilde{A}'$，那么$N\doteq\tilde{A}-\tilde{A}'$是可料的局部可积变差鞅。由命题2.28可知$N=N^p=N_-$，因此$N$是连续的。利用引理2.23便得$N=0$。所以3°中的分解是唯一的。

3°⇒4°：A可料则由命题2.14及2.15可知A局部可积，即其全变差$\int_0^t|dA|_s$为局部可积，它等价于$A_t^*=\sup\limits_{[0,t]}|A_s|$局部可积。于是$X^*\leqslant M^*+A^*$也局部可积。

4°⇒1°：X^*局部可积，于是$A^*\leqslant X^*+M^*$局部可积。便得1°。

命题2.30 1° 局部特殊半鞅是特殊半鞅，即若停时列$\tau_n\uparrow\infty$ (a.e. dP)，只要X^{τ_n}是特殊半鞅，就有：X是特殊半鞅；

2° 若X与半鞅列$Y^{(n)}$预局部相等(即存在停时列$\tau_n\uparrow\infty$(a.e. dP)，使$XI_{[[0,\tau_n))}=Y^{(n)}I_{[[0,\tau_n))}$)，则$X$是半鞅；

3° 局部半鞅是半鞅。

证明 1° 设X^{τ_n}的标准分解为$X_0+M^{(n)}+A^{(n)}$，$A^{(n)}$为可料的局部可积变差过程。显然，由标准分解的唯一性，我们有$M_{t\wedge\tau_n}^{(n+1)}=M_{t\wedge\tau_n}^{(n)}$，$A_{t\wedge\tau_n}^{(n+1)}=A_{t\wedge\tau_n}^{(n)}$。于是我们可以定义局部鞅$M$及可料的$A$，使$M_{t\wedge\tau_n}=M_{t\wedge\tau_n}^{(n)}$，$A_{t\wedge\tau_n}=A_{t\wedge\tau_n}^{(n)}$。这样$X=$

X_0+M+A便是满足命题2.29中3°的一组分解。

记号 若$X=X(t,\omega)$在ω固定时只取可列个值，则记

$$S(X)=\left(\sum_S X_S\right)I_{\{\sum_S|X_S|<\infty\}}+(+\infty)I_{\{\sum_S|X_S|=\infty\}}.$$

证2°。记

$$X'=X-S(\Delta X\cdot I_{\{|\Delta X|>1\}})\quad(\Delta X=X-X_-),$$

$$Y^{(n)'}=Y^{(n)}-S(\Delta Y^{(n)}\cdot I_{\{|\Delta Y^{(n)}|>1\}}).$$

(因为X右连左极，所以在$[0,t]$上只有有限个S使$|\Delta X_S|>1$。)显然我们仍有$X'I_{[[0,\tau_n]]}=Y^{(n)'}I_{[[0,\tau_n]]}$。因此我们不妨假定$|\Delta X|,|\Delta Y^{(n)}|\leqslant 1$。令$\sigma_m=\inf\{t:\ (Y^{(n)})^*\geqslant m\}$(( )*的含义类似于命题2.29)，那么$Y^{(n)*}_{\sigma_m\wedge t}\leqslant m+1$。所以$Y^{(n)*}$局部可积，从而由命题2.29可知$Y^{(n)}$是特殊半鞅。于是

$$X^{\tau_n}=Y^{(n)}+(\Delta X_{\tau_n}-\Delta Y^{(n)}_{\tau_n})I_{[[\tau_n,\infty))}$$

也是特殊半鞅。由1°便得X是特殊半鞅。一般情形时，X'是特殊半鞅，所以$X=X'+S(\Delta X\cdot I_{\{|\Delta X|>1\}})$是半鞅。

3°是2°的推论。

推论 命题中的"$\tau_n\uparrow\infty$"可改为较弱的条件"$\sup\limits_n\tau_n=\infty$"。

证明 由于$X^{\tau_1\vee\tau_2}=X^{\tau_1}+X^{\tau_2}-(X^{\tau_1})^{\tau_2}$，当$X^{\tau_n}$为半鞅(或特殊半鞅)时，$X^{\tau_1\vee\tau_2},\cdots,X^{\tau_1\vee\cdots\vee\tau_n}$仍是半鞅(或特殊半鞅)，我们可以用$\tau_1\vee\cdots\vee\tau_n$代替$\tau_n$。

命题2.31 1° 上鞅、下鞅都是特殊半鞅；

2° X是特殊半鞅，当且仅当$X-X_0$是两个局部上鞅的差。

证明 1° 设X是上鞅，$\tau_n\equiv n\wedge\inf\{t:\ |X_t|\geqslant n\}$。于是$X^{\tau_n}$是闭上鞅，所以$EX^+_{\tau_n}<\infty$。由停止定理可得

$$E(X_n|\mathscr{F}_t)\leqslant X^{\tau_n}_t\leqslant X_tI_{t<\tau_n}+X_{\tau_n}I_{\tau_n\leqslant t}\leqslant n+X^+_{\tau_n}.$$

当n固定时，$E(X_n|\mathscr{F}_t)$是一致可积鞅，$n+X^+_{\tau_n}$是可积函数，因此X^{τ_n}是(D)类上鞅。由Doob-Meyer分解可知它是特殊半鞅。

再由命题2.30便得X是特殊半鞅。

2° "$\Leftarrow$部分"由1°及命题2.30之1°推得。"$\Rightarrow$部分"：设X如命题2.29中3°的分解为X_0+M+A，且$A=A_1-A_2$，其中A_i是可料($\mathscr{F}_t$)增过程，当然也局部可积。于是

$$X=X_0+(M-A_2)-(-A_1),$$

其中$M-A_2$与$-A_1$都是局部上鞅。

§2.7 连续半鞅的Ito公式与随机微积分计算

连续半鞅是Ito过程的直接推广，它对较光滑的函数作复合具有封闭性。

定理2.10 若$F(x,y)$满足：F''_{xx},F'_y连续，X是一连续半鞅，G是连续的有限变差($\mathscr{F}_t$)适应过程。那么$F(X,G)$仍是连续半鞅，而且

$$\begin{aligned}&F(X_t,G_t)-F(X_0,G_0)\\&=\int_0^t F'_x(X_s,G_s)\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}\int_0^t F''_{xx}(X_s,G_s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s\\&\quad+\int_0^t F'_y(X_s,G_s)\mathrm{d}G_s.\end{aligned}$$

写成微分的形式就是

$$\mathrm{d}F(X,G)=F'_x\mathrm{d}X+\frac{1}{2}F''_{xx}(\mathrm{d}X)^2+F'_y\mathrm{d}G,\quad(2.43)$$

其中$(\mathrm{d}X)^2=\mathrm{d}\langle M\rangle$，$M$是$X$的连续局部鞅部分。

证明 与定理1.3的证明完全类似，只须分别用$M_t,\langle M\rangle_t$及全变差过程$\|A\|_t$(设$X_t=X_0+M_t+A_t$),G_t来代替

$$\int_0^t\sigma\mathrm{d}B,\quad\int_0^t\sigma^2\mathrm{d}s,\quad\int_0^t|b|\mathrm{d}s,\quad t$$

即可。

定理2.10′ 若$F(x_1,\cdots,x_n;\ y_1,\cdots,y_m)$满足：$F''_{x_ix_j}$，$F'_{y_k}$

连续($1\leqslant i,j\leqslant n,k\leqslant m$)，$X^{(1)},\cdots,X^{(n)}$都是连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅。$X^{(i)}=X_0^{(i)}+M^{(i)}+A^{(i)}$，$M^{(i)}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$，$G^{(1)},\cdots,G^{(m)}$都是连续的有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程。那么$F(X^{(1)},\cdots,X^{(n)};\ G^{(1)},\cdots,G^{(m)})$仍为连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅，而且

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}F(X^{(1)},\cdots,X^{(n)};\ G^{(1)},\cdots,G^{(m)})\\&=\sum_i F'_{x_i}\mathrm{d}X^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}F''_{x_ix_j}\mathrm{d}X^{(i)}\mathrm{d}X^{(j)}\\&\quad+\sum_k F'_{y_k}\mathrm{d}G^{(k)},\end{aligned}\tag{2.44}$$

其中

$$\mathrm{d}X^{(i)}\mathrm{d}X^{(j)}=\mathrm{d}\langle M^{(i)},M^{(j)}\rangle.\tag{2.45}$$

有时我们也把$\langle M^{(i)},M^{(j)}\rangle$写成$\langle X^{(i)},X^{(j)}\rangle$。

推论 对连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅X,Y,Z，恒有$\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z=0$。

Ito公式有许多应用。以下的1°—4°，其证明完全与§1.8中对应的1°—4°的证明一样，所以我们略去证明。

1° 计算积分。例如，若$f\in C^1$，X为连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅，F为f的某个原函数，那么

$$\int_s^t f(X_u)\mathrm{d}X_u=F(X_t)-F(X_s)-\frac{1}{2}\int_s^t f'(X_u)\mathrm{d}\langle M\rangle_u.$$

2° 指数半鞅。设X是连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅，$X=X_0+M+A$，$\langle X\rangle$定义为$\langle M\rangle$。那么$\mathrm{e}^{X-\frac{1}{2}\langle X\rangle}$是满足方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y=Y\mathrm{d}X,\\Y_0=\mathrm{e}^{X_0}\end{cases}$$

的唯一连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅。

特别，当$X=M\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$时，$\mathrm{e}^{M-\frac{1}{2}\langle M\rangle}$是$(\mathscr{F}_t)$上鞅，而且

$$\mathrm{e}^{M-\frac{1}{2}\langle M\rangle}=\int_0^{\cdot}\mathrm{e}^{M-\frac{1}{2}\langle M\rangle}\mathrm{d}M\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$$

(它是连续的非负$(\mathscr{F}_t)$局部鞅，所以是$(\mathscr{F}_t)$上鞅)。此外，它是$(\mathscr{F}_t)$鞅，当且仅当$E\mathrm{e}^{M_t-\frac{1}{2}\langle M\rangle_t}\equiv1$。当$E\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_T}<\infty$时，

$e^{M_t-\frac{1}{2}\langle M\rangle_t}$在 $0\leqslant t\leqslant T$ 是鞅。

3° 平方变差与二次互变差。对于半鞅

$$X=X_0+M^X+A^X,\quad Y=Y_0+M^Y+A^Y,$$

我们有

$$[X]_t\equiv(p)\lim_{\lambda_n\to0}\sum_{k=0}^{N_n-1}(\Delta X_{t_k^{(n)}})^2$$

$$=\langle M^X\rangle_t=\int_0^t(\mathrm{d}X)^2,$$

$$[X,Y]\equiv(p)\lim_{\lambda_n\to0}\sum_{k=0}^{N_n-1}\Delta X_{t_k^{(n)}}\Delta Y_{t_k^{(n)}}$$

$$=\langle M^X,M^Y\rangle_t=\int_0^t(\mathrm{d}X\mathrm{d}Y),$$

其中 $t_0^{(n)}=0<t_1^{(n)}<\cdots<t_{N_n}^{(n)}=t,\lambda_n=\max\limits_k\Delta t_k^{(n)}$。

4° 对称积分。对连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅 X,Y，存在

$$\int_0^t Y\circ\mathrm{d}X\equiv(p)\lim_{\lambda_n\to0}\sum_{k=0}^{N_n-1}\frac{Y_{t_k^{(n)}}+Y_{t_{k+1}^{(n)}}}{2}\Delta X_{t_k^{(n)}},$$

而且(1.63)—(1.65)仍成立。

定理 2.11(Brown 运动的鞅特征) 若 d 维$(\mathscr{F}_t)$适应过程 $X=X_0+M$，$M\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$，而且

$$\langle M^{(i)},M^{(j)}\rangle=\delta_{ij}t$$

$(i,j\leqslant d$，这里 $M^T=(M^{(1)},\cdots,M^{(d)}))$，则$X$是$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动。

证明 对 R^d 上函数 $F(x)=e^{i\lambda^Tx}$ (其中λ^T为 R^d 中常向量$(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)$)应用Ito 公式，我们得到

$$e^{i\lambda^TX_t}-e^{i\lambda^TX_s}=\sum_k\int_s^t i\lambda_k\, e^{i\lambda^TX_u}\mathrm{d}M_u^{(k)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_k\int_t^t(-\lambda_k^2)\,e^{i\lambda^TX_u}\mathrm{d}u.$$

于是，对 $A\in\mathscr{F}_s$

$$(e^{i\lambda^T(X_t-X_s)}-1)I_A$$
$$=\sum_k\int_s^t i\lambda_k e^{i\lambda^T(X_u-X_s)}I_A dM_u^{(k)}-\frac{|\lambda|^2}{2}\int_s^t e^{i\lambda^T(X_u-X_s)}I_A du.$$

但是 $E\langle M^{(k)}\rangle_t=t<\infty$，所以 $M\in\mathscr{M}_2^C$. 对上面的式子两边分别取数学期望，就有

$$E(e^{i\lambda^T(X_t-X_s)}I_A)-P(A)$$
$$=-\frac{|\lambda|^2}{2}\int_s^t e^{i\lambda^T(X_u-X_s)}I_A du.$$

这说明 $E(e^{i\lambda^T(X_t-X_t)}I_A)$ 是积分方程

$$\begin{cases} y(t)-P(A)=-\dfrac{|\lambda|^2}{2}\displaystyle\int_s^t y(u)du \\ \qquad\left(\text{等价于 } y'=-\dfrac{|\lambda|^2}{2}y\right), \\ y(s)=P(A) \end{cases}$$

在 $t\geqslant s$ 时的解. 因此

$$E(e^{i\lambda^T(X_t-X_s)}I_A)=P(A)e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}(t-s)}.$$

所以 X 是 $(\mathscr{F}_t)$Brown 运动.

推论(Levy 特征性质) 连续过程 X 是 Brown 运动，当且仅当 X_t, X_t^2-t 都是鞅.

注 过程对不同的参考族具有不同的鞅性和半鞅性. 例如：若 $B_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ 上 $(\mathscr{F}_t^B)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ Brown 运动. 记

$$\widetilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_t^B\vee\sigma(B_1).$$

这时 $B_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 不再是 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动而只是一个 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 连续半鞅. 我们来证明它，并求它的分解式.

我们注意对 $s<1$ 有：B_1-B_s 与 $\mathscr{F}_s^B$ 独立，

$$\widetilde{\mathscr{F}}_s = \mathscr{F}_s^B \vee \sigma(B_1 - B_s).$$

所以由 B_t 的 Gauss 性，对 $s<t<1$ 有

$$E(B_t | \widetilde{\mathscr{F}}_s) = E(B_t | \mathscr{F}_s^B) + E(B_t | B_1 - B_s)$$
$$= B_s + \lambda(B_1 - B_s).$$

我们确定常数 λ：

$$\lambda = \frac{E[B_t(B_1 - B_s)]}{E(B_1 - B_s)^2} = \frac{t-s}{1-s}.$$

另一方面，

$$E\left(\int_s^t \frac{B_1 - B_u}{1-u} \mathrm{d}u | \widetilde{\mathscr{F}}_s\right) = E\left(\int_s^t \frac{B_1 - B_u}{1-u} \mathrm{d}u | \mathscr{F}_s^B\right)$$
$$+ E\left(\int_s^t \frac{B_1 - B_u}{1-u} \mathrm{d}u | B_1 - B_s\right)$$
$$= E\left(\int_s^t \frac{B_1 - B_u}{1-u} \mathrm{d}u | B_1 - B_s\right)$$
$$= \left(\int_s^t \frac{1}{1-u} \cdot \frac{1-u}{1-s} \mathrm{d}u\right)(B_1 - B_s)$$
$$= \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s)$$
$$= E[(B_t - B_s) | \widetilde{\mathscr{F}}_s].$$

因而

$$\tilde{B}_t \equiv B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_u}{1-u} \mathrm{d}u$$

是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Gauss 鞅。易验证 $E\tilde{B}_t = 0$ 及

$$E\tilde{B}_t \tilde{B}_s = t \wedge s.$$

即 $\tilde{B} \in \mathscr{M}_2^c(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$，且$\langle \tilde{B} \rangle_t = t$。由 Levy 特征性质立即推出 $\tilde{B}$ 是 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ Brown 运动。于是 B 有分解式

$$B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \frac{B_1 - B_u}{1-u} \mathrm{d}u,$$

因而是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$半鞅。

由此，我们可以定义 $\int_0^t B_1 \mathrm{d}B_s$。注意在 $t<1$ 时 B_1 并不$(\mathscr{F}_t)$适应，因此按原来的意义下的 Ito 积分不存在，但是取参考族$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$后，按半鞅意义下的随机积分存在，而且

$$\begin{aligned}\int_0^t B_1 \mathrm{d}B_s &= \int_0^t B_1 \mathrm{d}\tilde{B}_s + \int_0^t \frac{B_1(B_1 - B_u)}{1-u} \mathrm{d}u \\ &= B_1(\tilde{B}_t - \tilde{B}_0) + \int_0^t \frac{B_1(B_1 - B_u)}{1-u} \mathrm{d}u \\ &= B_1(B_t - B_0).\end{aligned}$$

这与直观的结果是相容的。

关于 $E\tilde{B}_s\tilde{B}_t$ 的计算，我们补充如下：当 $s<t$ 时

$$\begin{aligned}E\tilde{B}_s\tilde{B}_t &= E\left(B_s - \int_0^s \frac{B_u - B_1}{u-1} \mathrm{d}u\right) \\ &\quad \times \left(B_t - \int_0^t \frac{B_v - B_1}{v-1} \mathrm{d}v\right) \\ &= s - \int_0^s \frac{u-t}{u-1} \mathrm{d}u - \int_0^s \frac{v-s}{v-1} \mathrm{d}v \\ &\quad + \int_0^s \int_0^t \frac{u \wedge v - u - v + 1}{(u-1)(v-1)} \mathrm{d}v \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

但是右边的最后一项为

$$\begin{aligned}&\int_0^s \mathrm{d}u \left[\left(\int_0^u + \int_u^t\right) \frac{u \wedge v - u - v + 1}{(u-1)(v-1)} \mathrm{d}v\right] \\ &= -\int_0^s \int_0^u \frac{\mathrm{d}v}{v-1} \mathrm{d}u - \int_0^s \int_u^t \frac{\mathrm{d}v}{u-1} \mathrm{d}u \\ &= -\int_0^s \int_v^s \frac{\mathrm{d}u}{v-1} \mathrm{d}v - \int_0^s \frac{t-u}{u-1} \mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$= -\int_0^s \frac{s-v}{v-1}\mathrm{d}v - \int_0^s \frac{t-u}{u-1}\mathrm{d}u.$$

所以 $E\tilde{B}_s\tilde{B}_t = s$.

下面要把 Girsanov 定理推广到鞅的情形．为此 先 叙 述一个引理．

引理2.25 设$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$为完 备 概 率空间，$\tau$ 为有界$(\mathscr{F}_t)$停 时，$\eta\in\mathscr{F}_\tau$，$M\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$，$z_t = \mathrm{e}^{M_t-\frac{1}{2}\langle M\rangle_t}$，而且 z_t 是$(\mathscr{F}_t)$ 鞅．又设在测度

$$\hat{P}(A)|_{A\in\mathscr{F}_t} = E(z_t I_A) \tag{2.46}$$

下的期望 $\hat{E}\eta<\infty$。那么

$$\hat{E}(\eta|\mathscr{F}_{s\wedge\tau}) = E\left(\eta\frac{z_\tau}{z_{s\wedge\tau}}|\mathscr{F}_{s\wedge\tau}\right). \tag{2.47}$$

证明 设 $A\in\mathscr{F}_\tau$，则 $A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t\wedge\tau}$．由(2.46)推得

$$\begin{aligned}\hat{P}(A\cap\{\tau\leqslant t\}) &= E(I_{A\cap(\tau\leqslant t)}z_t)\\ &= E(I_{A\cap(\tau\leqslant t)}z_\tau) + E[I_{A\cap(\tau\leqslant t)}(z_t-z_\tau)]\\ &= E(I_{A\cap(\tau\leqslant t)}z_\tau).\end{aligned}$$

令 $t\to\infty$，得

$$\hat{P}(A) = E(I_A z_\tau).$$

由典型逼近，我们推出

$$\hat{E}\eta = E(\eta z_\tau). \tag{2.48}$$

现在,任取 $A\in\mathscr{F}_{s\wedge\tau}$，那么 $I_A\eta\in\mathscr{F}_\tau$.我们应用(2.48) 得到

$$\begin{aligned}\hat{E}(I_A\eta) &= E(I_A\eta z_\tau) = E[I_A E(z_\tau\eta|\mathscr{F}_{s\wedge\tau})]\\ &= E\left[I_A z_{s\wedge\tau}E\left(\eta\frac{z_\tau}{z_{s\wedge\tau}}\middle|\mathscr{F}_{s\wedge\tau}\right)\right]\\ &= \hat{E}\left[I_A E\left(\eta\frac{z_\tau}{z_{s\wedge\tau}}\middle|\mathscr{F}_{s\wedge\tau}\right)\right].\end{aligned}$$

这就立刻导出(2.47)。

定理2.12（鞅的 Girsanov 定理） 设引理 2.25 的 假 设成立．

对 $\forall N\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$ 定义

$$\hat{N}=N-\langle N,M\rangle. \tag{2.49}$$

那么变换 $N\to\hat{N}$ 是 $\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t,P)$到 $\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t,\hat{P})$的一个保持互特征不变的变换：$N_i\to\hat{N}_i\,(i=1,2)$，

$$\langle\hat{N}_1,\hat{N}_2\rangle=\langle N_1,N_2\rangle\quad \text{a.e.}\,\mathrm{d}P\ (\text{也 a.e.}\,\mathrm{d}\hat{P}). \tag{2.50}$$

这个变换称为 Girsanov 变换，而且具有反变换

$$N=\hat{N}+\langle\hat{N},\hat{M}\rangle, \tag{2.51}$$

其中 $\hat{M}=M-\langle M\rangle$。

此外，对 $\forall\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}(\langle N\rangle)$恒有

$$\left(\widehat{\int_0^\cdot\Phi\mathrm{d}N}\right)=\int_0^\cdot\Phi\mathrm{d}\hat{N}. \tag{2.52}$$

因此，Girsanov 变换在实质上就是 $\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t,P)$到 $\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t,\hat{P})$的一个"同构"。

证明 由于 z_t 是$(\mathscr{F}_t)$鞅，(2.46)含义确切，从而由测度的Kolmogorov 定理可知 $\hat{P}$ 是$(\Omega,\mathscr{F}_\infty)$上测度。

首先证明：$\hat{N}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\hat{P})$。为此我们应用Ito 公式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(z\hat{N})&=z\mathrm{d}\hat{N}+\hat{N}\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}\hat{N}\\&=z\mathrm{d}(N-\langle N,M\rangle)+\hat{N}\mathrm{d}z+z\mathrm{d}M\mathrm{d}(N-\langle N,M\rangle)\\&=z\mathrm{d}N+\hat{N}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

因此 $z\hat{N}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(P)$。由此存在$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n\uparrow\infty$，使$(z\hat{N})^{\tau_n}\in\mathscr{M}_2^c(P)$。于是利用(2.47)我们就得到：对 $s<t$ 有

$$\begin{aligned}\hat{E}(\hat{N}_{t\wedge\tau_n}|\mathscr{F}_{s\wedge\tau_n})&=E\left(\hat{N}_{t\wedge\tau_n}\frac{z_{t\wedge\tau_n}}{z_{s\wedge\tau_n}}\Big|\mathscr{F}_{s\wedge\tau_n}\right)\\&=\frac{1}{z_{s\wedge\tau_n}}(\hat{N}_{s\wedge\tau_n}z_{s\wedge\tau_n})=\hat{N}_{s\wedge\tau_n}.\end{aligned}$$

即 $\hat{N}_{t\wedge\tau_n}$是$(\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n},\hat{P})$鞅。再用Doob 停止定理推出它也是$(\mathscr{F}_t,\hat{P})$鞅。所以 $\hat{N}_t$ 是$(\mathscr{F}_t,\hat{P})$局部鞅。但是它是轨道连续的，因此 $\hat{N}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\hat{P})$。

其次，我们证明(2.50)：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\langle\hat{N}_1,\hat{N}_2\rangle &= \mathrm{d}(N_1-\langle N_1,M\rangle)\mathrm{d}(N_2-\langle N_2,M\rangle) \\
&= \mathrm{d}N_1\mathrm{d}N_2=\mathrm{d}\langle N_1,N_2\rangle.
\end{aligned}
$$

最后，(2.51)与(2.52)是(2.50)的直接推论。

注 同样的变换与结论适用于零初值的连续半鞅，只要指数半鞅 z_t 也是鞅(即与定理 2.12 同样的条件)。

与 Brown 运动的积分类似，对 $M\in\mathscr{M}^{c,loc}(\mathscr{F}_t)$，我们也有

定理(指数鞅的 Nouikov 条件) 如果

$$Ee^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_T}<\infty,$$

则

$$z_t(M)\equiv e^{M_t-\frac{1}{2}\langle M\rangle_t}$$

在 $0\leqslant t\leqslant T$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅。同时，

$$\tilde{z}_t(M)\equiv e^{iM_t+\frac{1}{2}\langle M\rangle_t}$$

在 $0\leqslant t\leqslant T$ 也是$(\mathscr{F})$鞅(复指数鞅)。

Dambis-Dubins-Schwarz 定理 存在某个概率空间$(\tilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},(\widetilde{\mathscr{F}}_t),\tilde{P})$及$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动 B，使

$$M_t=B_{\langle M\rangle_t}.$$

这两个定理的证明与定理 1.5 及定理 1.6 类似，只需作相应的必要改动即可。

Dambis-Dubins-Schwarz 定理的多维情形是如下的不显然推广。

Knight 定理 设 $M=(M^{(1)},\cdots,M^{(d)})\in\mathscr{M}^{c,loc}$，而且满足

$$\langle M^{(k)},M^{(l)}\rangle=0\quad(k\neq l).\tag{2.53}$$

那么存在一个与M独立的 d 维 Brown 运动 $\tilde{B}$，使得在乘积概率空间上定义的如下过程 $B=(B^{(1)},\cdots,B^{(d)})$是 Brown 运动，其中

$$
B_t^{(k)}=\begin{cases}
M_{\tau_t^{(k)}}^{(k)}, & t<\langle M\rangle_\infty, \\
M_\infty^{(k)}+\tilde{B}_{t-\langle M^{(k)}\rangle_\infty}^{(k)}, & t\geqslant\langle M\rangle_\infty,
\end{cases}
$$

而 $\tau_t^{(k)}$ 是$\langle M^{(k)}\rangle_t$ 的右连续逆：

$$\tau_t^{(k)}=\inf\{\zeta:\ \langle M^{(k)}\rangle_s>t\}.$$

证明 只需证 $B^{(1)},\cdots,B^{(d)}$ 相互独立(这是不显然的)。为此我们只需证明：对于$\forall n$，$\forall\, 0=t_0<t_1<\cdots<t_n$，$\forall$ 实数 $\lambda_1^{(k)},\cdots,\lambda_n^{(k)}$ 及如下定义的 f_k

$$f_k(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(k)}I_{(t_{j-1},t_j]}(t)\quad(1\leqslant k\leqslant d),$$

恒有

$$E\tilde{z}_\infty^f=1,$$

其中

$$\tilde{z}_t^f=\mathrm{e}^{i\sum\limits_{k=1}^{d}\int_0^t f_k(s)\mathrm{d}B_s^{(k)}+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{d}\int_0^t f_k^2(s)\mathrm{d}s}.$$

首先，运用典型逼近可得

$$\int_0^{\langle M^{(k)}\rangle_\infty} f_k(s)\mathrm{d}M_{\tau_s^{(k)}}^{(k)}=\int_0^\infty f_k(\langle M^{(k)}\rangle_s)\mathrm{d}M_s^{(k)}.$$

因而

$$\int_0^\infty f_k(s)\mathrm{d}B_s^{(k)}=\int_0^\infty f_k(\langle M^{(k)}\rangle_s)\mathrm{d}M_s^{(k)}+\int_0^\infty f_k(s+\langle M^{(k)}\rangle_s)\mathrm{d}\tilde{B}_s^{(k)}.$$

由于M与 $\tilde{B}$ 是独立的，于是

$$\int_0^\infty f_k^2(s)\mathrm{d}s=\int_0^\infty f_k^2(\langle M^{(k)}\rangle_s)\mathrm{d}\langle M^{(k)}\rangle_s+\int_0^\infty f_k^2(s+\langle M^{(k)}\rangle_s)\mathrm{d}s.$$

记

$$X_t=\sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k(\langle M^{(k)}\rangle_s)\mathrm{d}M_s^{(k)},$$

则 $X\in\mathscr{M}^{c,\mathrm{loc}}$。由(2.53)

$$\langle X\rangle_t=\sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k^2(\langle M^{(k)}\rangle_s)\mathrm{d}\langle M^{(k)}\rangle_s=\sum_{k=1}^{d}\int_0^{\langle M^{(k)}\rangle_t} f_k^2(s)\mathrm{d}s.$$

由 Ito 公式可推得 $I_t\equiv\mathrm{e}^{iX_t+\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}$ 是局部鞅。显然X在$[0,\infty]$满足 Novikov 条件，所以 I_t 是鞅(f_k 有紧支集，故 I_t 应是有界鞅)。同样，在M已知条件下，

$$J_t \equiv e^{\sum_k i\int_0^t f_k(s+\langle M^{(k)}\rangle_s)\mathrm{d}\tilde{B}_s^{(k)}+\frac{1}{2}\int_0^t f_k^2(s+\langle M^{(k)}\rangle_s)\mathrm{d}s}$$

也是有界鞅，而且我们有

$$Ez_\infty^f = E(I_\infty J_\infty) = E(I_\infty E(J_\infty \mid \mathscr{F}_\infty^M)) = 1.$$

Knight 定理得证。

定理2.13(Burkholder-Davis-Gundy 不等式) 对于 $p>0$，存在正普适常数 C_p 及 C_p'，使对于 $\forall M\in\mathscr{M}^{c,loc}(\mathscr{F}_t)$，恒有

(1) $C_p' E\langle M\rangle_\infty^{p/2} \leqslant E(M_\infty^*)^p \leqslant C_p E\langle M\rangle_\infty^{p/2}$. (2.54)

(2) 对任意$(\mathscr{F}_t)$停时 τ

$$C_p' E\langle M\rangle_\tau^{p/2} \leqslant E(M_\tau^*)^p \leqslant C_p E\langle M\rangle_\tau^{p/2}, \qquad (2.54')$$

其中

$$M_t^* \equiv \sup_{s\leqslant t} |M_s|.$$

注 对于 $M\in\mathscr{M}^{c,loc}$，定义

$$M_\infty = \begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} M_t, & \text{如果} \lim\limits_{t\to\infty} M_t \text{存在,有限,} \\ +\infty, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

我们恒有

$$P\{\{M_\infty < +\infty\}\triangle\{\langle M\rangle_\infty < \infty\}\} = 0,$$

其中$\triangle$是集合的对称差运算.

事实上，$\langle M\rangle_\infty$ 总有含义。令 $\tau_n = \inf\{t:\ \langle M\rangle_t \geqslant n\}$。那么 $\langle M^{\tau_n}\rangle_\infty$ 可积，因此由命题 2.22 推知 M^{τ_n} 为一致平方可积鞅。于是 M_{τ_n} 有意义。但是在$\{\langle M\rangle_\infty<\infty\}$ 上只要 n 充分大就有 $\tau_n=\infty$，从而 M_∞ 在$\{\langle M\rangle_\infty<\infty\}$上 a.e.d$P$ 地有限。另一方面，由连续局部鞅的 Dambis-Dubins-Schwarz 定理，存在 Brown 运动 B，使 $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$，可见在$\{\langle M\rangle_\infty=\infty\}$上，$M_\infty$ 不会存在。这就证明了我们的断言、因而定义在 a.e.dP 意义下是合理的。

由此可知为了证明定理，不妨假定

$$\langle M\rangle_\infty < \infty,\quad M_\infty < \infty \quad (\text{a.e.d}P).$$

这是因为在相反的情形下，定理等式两边均为 $+\infty$，自然成立。

定理的证明 1° 先假定M有界。这时 M 一致可积，当然 $M_\infty<\infty$(a.e.dP)。

情形 1 $p\geqslant 2$ 时证明 C_p 的存在性。

这时候$|x|^p\in C^2$。用 Ito 公式

$$|M_\infty|^p=\int_0^\infty p|M_s|^{p-1}\mathrm{sgn}M_s\mathrm{d}M_s$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty p(p-1)|M_s|^{p-2}\mathrm{d}\langle M\rangle_s,$$

右边第一项为一致可积鞅$\int_0^t p|M_s|^{p-1}\mathrm{sgn}M_s\mathrm{d}M_s$在 $t=\infty$ 的值，所以期望为 0 。取期望后再用 Hölder 不等式，我们有

$$E|M_\infty|^p=\frac{1}{2}p(p-1)E\int_0^\infty|M_s|^{p-2}\mathrm{d}\langle M\rangle_s$$

$$\leqslant\frac{1}{2}p(p-1)E((M_\infty^*)^{p-2}\langle M\rangle_\infty)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}p(p-1)(E(M_\infty^*)^p)^{\frac{p-2}{p}}(E\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}})^{\frac{2}{p}}.$$

再结合 Doob 极值不等式便得

$$E(M_\infty^*)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p EM_\infty^p$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\frac{1}{2}p(p-1)(E(M_\infty^*)^p)^{\frac{p-2}{p}}(E\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}})^{\frac{2}{p}},$$

由此解出 $E(M_\infty^*)^p$ 便得到 C_p。

情形 2 $p\geqslant 4$ 时 C'_p 的存在性。

先假定$\langle M\rangle_t$ 也有界。由

$$M_t^2=2\int_0^t M_s\mathrm{d}M_s+\langle M\rangle_t$$

我们得到

$$|M_t|^p \leqslant 2^{(p/2)}\left(\left|\int_0^t 2M_s \mathrm{d}M_s\right|^{p/2} + \langle M\rangle_t^{p/2}\right).$$

于是存在常数 a_p 使

$$x^2 = E\langle M\rangle_\infty^{p/2} \leqslant a_p\left(E(M_\infty^*)^p + E\left|\int_0^\infty M_s \mathrm{d}M_s\right|^{p/2}\right)$$

$$\leqslant a_p\left(E(M_\infty^*)^p + E\left(\int_0^\infty M_s^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)^{p/4}\right)$$

$$\leqslant a_p(E(M_\infty^*)^p + E((M_\infty^*)^{p/2}\langle M\rangle_\infty^{p/4}))$$

$$\leqslant a_p(E(M_\infty^*)^p + (E(M_\infty^*)^p E\langle M\rangle_\infty^{p/2})^{\frac{1}{2}})$$

$$= a_p(y^2 + yx).$$

x 的这个不等式在 $0, a_p y$ 处取等号， 所以不等式的解为 $0 \leqslant x \leqslant a_p y$。于是可取 $C_p' = \dfrac{1}{a_p}$。

若$\langle M\rangle$无界，但是$\langle M\rangle_\infty < \infty$(a.e.d$P$)，则令

$$\tau_n = \inf\{t: \langle M\rangle_t \geqslant n\}.$$

这时候有

$$E\langle M^{\tau_n}\rangle_\infty^{p/2} \leqslant C_p' E((M^{\tau_n})_\infty^*)^p.$$

令 $n \to \infty$ 便得 C_p' 的存在性。

2° 证明一个引理。

引理A(Yor) 设 X 为非负连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程，A 为连续$(\mathscr{F}_t)$增过程，$A_0 \geqslant 0$。又如果满足：对任意有界停时 τ 恒有

$$EX_\tau \leqslant EA_\tau,$$

则有

(A.1) $P(X_\infty^* \geqslant a, A_\infty < b) \leqslant \dfrac{E(A_\infty \wedge b)}{a} \quad (a, b > 0)$;

(A.2) 对于 $0 < q < 1$，

$$E(X_\infty^*)^q \leqslant \frac{2-q}{1-q} EA_\infty^q.$$

(A.1)的证明　令

$$\sigma=\inf\{t:\ A_t\geqslant b\},\ \ \tau^{(a)}=\inf\{t:\ X_t\geqslant a\},$$

$$\tau_n=\tau\wedge n\wedge\tau^{(a)},$$

其中 τ 为任意$(\mathscr{F}_t)$停时(不假定有界)。我们有

$$aP(X^*_{\tau_n}\geqslant a)\leqslant E(X_{\tau_n}I_{X^*_{\tau_n}\geqslant a})\leqslant EX_{\tau_n}$$
$$\leqslant EA_{\tau_n}\leqslant EA_{\tau}.$$

令 $n\to\infty$，我们得到

$$aP(X^*_\tau\geqslant a)\leqslant EA_\tau.$$

取 $\tau=m\wedge\sigma$，我们有

$$P(X^*_m\geqslant a,A_m<b)\leqslant P(X^*_{m\wedge\sigma}\geqslant a)\leqslant\frac{1}{a}EA_{m\wedge\sigma}$$

$$\leqslant\frac{E(b\wedge A_m)}{a}\leqslant\frac{1}{a}E(b\wedge A_\infty).$$

令 $m\to\infty$ 即得(A.1)。

(A.2)的证明　用(A.1)。

$$E(X^*_\infty)^q=E\int_0^\infty I_{[0,X^*_\infty]}(a)\mathrm{d}a^q=\int_0^\infty P(X^*_\infty\geqslant a)\mathrm{d}a^q$$

$$\leqslant\int_0^\infty[P(X^*_\infty\geqslant a,\ A_\infty<a)+P(A_\infty\geqslant a)]\mathrm{d}a^q$$

$$\leqslant\int_0^\infty\left[\frac{1}{a}E(a\wedge A_\infty)+P(A_\infty\geqslant a)\right]\mathrm{d}a^q$$

$$\leqslant\int_0^\infty\left[2P(A_\infty\geqslant a)+\frac{1}{a}E(A_\infty I_{A_\infty<a})\right]\mathrm{d}a^q$$

$$=2EA^q_\infty+E\left(A_\infty\int_{A_\infty}^\infty\frac{1}{a}\mathrm{d}a^q\right)$$

$$= 2EA_\infty^q + \frac{q}{1-q}EA_\infty^q = \frac{2-q}{1-q}EA_\infty^q.$$

3° $p<2$ 时 C_p 的存在性。

取

$$X=(M^*)^2,\quad A=C_2\langle M\rangle, q=\frac{p}{2}.$$

用 Yor 引理便得

$$C_p=\frac{2-q}{1-q}\ (C_2)^{\frac{p}{2}}.$$

4° $p<4$ 时 C_p' 的存在性。

取

$$X=C_4'\langle M\rangle^2,\quad A=(M^*)^4,\quad q=\frac{p}{4},$$

用 Yor 引理便得

$$C_p'=(C_4')^{\frac{p}{4}}\left(\frac{1-q}{2-q}\right).$$

5° 取消M的有界性。

令 $\sigma_n=\inf\{t:\ |M_t|\geqslant n\}$。由前面所证

$$C_p'E\langle M\rangle_{\sigma_n}^{p/2}\leqslant E(M_{\sigma_n}^*)^p\leqslant C_pE\langle M\rangle_{\sigma_n}^{p/2}.$$

让 $n\to\infty$，由单调性便得

$$C_p'E\langle M\rangle_\infty^{p/2}\leqslant E(M_\infty^*)^p\leqslant C_pE\langle M\rangle_\infty^{p/2}.$$

这就证明了(1)。

用 M^τ 代替M便得(2)。

注 多维情形也对，这只要注意在 R^d 中欧氏模与 l^1 模是等价的即可。

§2.8 连续半鞅的局部时

引理2.26 (Fubini 型定理) 假设 $M\in\mathscr{M}_2^{loc}$，μ 为 $(R^1,$

$\mathscr{B}(R^1)$)上的有限测度。又 $\Phi_t(x)\equiv\Phi((t,\omega),x)$ 是一族依赖于参数 x 的随机过程，且满足：

(F_1) $\Phi((t,\omega),x)\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(R^1)$；

(F_2) 存在一个 $L(\mathrm{d}\mu)$ 控制函数

$$f(x):\ |\Phi((t,\omega),x)|\leqslant f(x)\in L(\mathrm{d}\mu);$$

(F_3) 对 $\forall t$ 固定，$\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s$ 关于 (ω,x) 二元可测，那么

$$\int_{R^1}\Phi_s(x)\mu(\mathrm{d}x)\in\widehat{\mathscr{L}}_2^{\mathrm{loc}}(\langle M\rangle),$$

同时

$$\int_0^t\left(\int_{R^1}\Phi_s(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}M_s=\int_{R^1}\left(\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\right)\mu(\mathrm{d}x). \tag{2.55}$$

证明 只须证明(2.55)两边的项均属 $\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，而且它们相对 $\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$ 中任意元素都有相同的互特征。

由(F_1)，$\int_{R^1}\Phi_s(x)\mu(\mathrm{d}x)$ 可料。但是由(F_2)，它被

$$\int_{R^1}f(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

所控制，因此它是有界过程。从而

$$\int_0^t\left(\int_{R^1}\Phi_s(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}M_s\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}.$$

为了证明 $\int_{R^1}\left(\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\right)\mu(\mathrm{d}x)$ 有意义且属于 $\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，我们先假定 $M\in\mathscr{M}_2$。这时候由 Schwarz 不等式及定理 2.13

$$E\left[\int_{R^1}\sup_{[0,T]}\left|\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\right|\mu(\mathrm{d}x)\right]$$

$$\leqslant\int_{R^1}\left[E\sup_{[0,T]}\left(\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mu(\mathrm{d}x)$$

$$\leqslant C^{\frac{1}{2}}\int_{R^1}\left(E\left\langle\int_0^{\cdot}\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\right\rangle_T\right)^{\frac{1}{2}}\mu(\mathrm{d}x)$$

$$=C^{\frac{1}{2}}\int_{R^1}\left(E\int_0^T\Phi_s^2(x)\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\mu(\mathrm{d}x)$$

$$\leqslant C^{\frac{1}{2}}\int_{R^1}f(x)\mu(\mathrm{d}x)(E\langle M\rangle_T)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

因此$\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\in L(\mathrm{d}P\times\mathrm{d}\mu)$。从而

$$\int_{R^1}\left(\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\right)\mu(\mathrm{d}x)$$

按轨道积分含义存在。又由于$\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s$按轨道地有控制函数

$\sup\limits_{[0,T]}\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s$，所以

$$E\int_{R^1}\lim_{h\to0}\int_0^{t+h}\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\mu(\mathrm{d}x)$$

$$=\lim_{h\to0}E\int_{R^1}\int_0^{t+h}\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\mu(\mathrm{d}x).$$

于是$\int_{R^1}\left(\int_0^t\Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\right)\mu(\mathrm{d}x)$是右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程，而且取$E$与对$\mu(\mathrm{d}x)$的积分可以交换。这样对于$s<t$及$\forall A\in\mathscr{F}_s$有

$$E\left[I_A\int_{R^1}\left(\int_s^t\Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\right)\mu(\mathrm{d}x)\right]$$

$$=\int_{R^1}E\left[I_A\int_s^t\Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\right]\mu(\mathrm{d}x)=0.$$

所以$\int_{R^1}\left(\int_0^t\Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\right)\mu(\mathrm{d}x)$是$(\mathscr{F}_t)$鞅。而且

$$E\left(\int_{R^1}\int_0^t\Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\mu(\mathrm{d}x)\right)^2$$

$$=\int_{R^1}\int_{R^1}E\left(\int_0^t \Phi_u(x)\Phi_u(y)\mathrm{d}\langle M\rangle_u\right)\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y)$$

$$\leqslant\left(\int_{R^1}f(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)^2 E\langle M\rangle_t<\infty.$$

因此$\int_{R^1}\int_0^t \Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\mu(\mathrm{d}x)\in\mathscr{M}_2$。此外，对$\forall N\in\mathscr{M}_2, A\in\mathscr{F}_s$，$s<t$，我们有

$$E\left[\left(N_t\int_{R^1}\int_0^t \Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\mu(\mathrm{d}x)\right.\right.$$

$$\left.\left.-N_s\int_{R^1}\int_0^s \Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\mu(\mathrm{d}x)\right)I_A\right]$$

$$=E\left[I_A\int_{R^1}\left(\int_s^t \Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\right)(N_t-N_s)\mu(\mathrm{d}x)\right]$$

$$=\int_{R^1}E\left[I_A\left(\int_s^t \Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\right)(N_t-N_s)\right]\mu(\mathrm{d}x)$$

$$=\int_{R^1}E\left[I_A\int_s^t \Phi_u(x)\mathrm{d}\langle M,N\rangle_u\right]\mu(\mathrm{d}x)$$

$$=E\left[I_A\int_s^t\left(\int_{R^1}\Phi_u(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}\langle M,N\rangle_u\right]$$

$$=E\left[I_A\left(\left\langle\int_0^\cdot\left(\int_{R^1}\Phi_u(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}M_u,N\right\rangle_t\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left\langle\int_0^\cdot\int_{R^1}\Phi_u(x)\mu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}M_u,N\right\rangle_s\right)\right].$$

所以

$$N_t\int_{R^1}\int_0^t \Phi_u(x)\mathrm{d}M_u\mu(\mathrm{d}x)$$

$$-\left\langle\int_0^\cdot\int_{R^1}\Phi_u(x)\mu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}M_u,N\right\rangle_t$$

是$(\mathscr{F}_t)$鞅。由 Doob-Meyer 分解之唯一性便得

$$\left\langle \int_{R^1}\int_0^{\cdot} \Phi_s(x) \mathrm{d}M_s \mu(\mathrm{d}x), N \right\rangle$$

$$= \left\langle \int_0^{\cdot}\int_{R^1} \Phi_s(x)\mu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}M_s, N \right\rangle.$$

由于 $N \in \mathscr{M}_2$ 可以任意取，我们便在 $M \in \mathscr{M}_2$ 情形下验证了(2.55)。

一般当 $M \in \mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$ 时，可取$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n \uparrow \infty$，使 $M^{\tau_n} \in \mathscr{M}_2$。于是

$$\int_0^{t\wedge\tau_n}\int_{R^1} \Phi_s(x)\mu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}M_s$$

$$= \int_0^t\int_{R^1} \Phi_s(x)\mu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}M_s^{\tau_n}$$

$$= \int_{R^1}\int_0^t \Phi_s(x)\mathrm{d}M_s^{\tau_n}\mu(\mathrm{d}x)$$

$$= \int_{R^1}\int_0^{t\wedge\tau_n} \Phi_s(x)\mathrm{d}M_s\mu(\mathrm{d}x).$$

令 $n\to\infty$，便得(2.55)。引理证毕。

引理 2.27(Kolmogorov-Censov) 设在 $x\in R^1$ 固定时，Y_x 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于 Banach 空间(看成 Polish空间)的随机元。如果它满足 Kolmogorov 矩条件：对任意实区间$[a,b]$，存在正数α,β,C，使对 $\forall\, x,x'\in[a,b]$，恒有

$$E\|Y_x - Y_{x'}\|^\alpha \leqslant C|x-x'|^{1+\beta}. \qquad (2.56)$$

那么存在 Y_x 的一个"连续修正"$\hat{Y}_x$，即

$$P(\omega:\ \|\hat{Y}_{x+\Delta x} - \hat{Y}_x\|\to 0,\ \Delta x\to 0(\forall\, x)) = 1,$$

且对 $\forall\, x$

$$P(Y_x = \hat{Y}_x) = 1.$$

$\hat{Y}_x$ 还可以取得对 x 是 Hölder 连续的，即对任意正数 ε,δ，存在常数 C_1（依赖于 ε,δ,a,b），使

$$P(\|\hat{Y}_x - \hat{Y}_{x'}\| \leqslant C_1 |x - x'|^{\frac{\beta}{\alpha} - \varepsilon}, \qquad \forall x, x' \in [a, b]) \geqslant 1 - \delta. \tag{2.57}$$

也就是参变随机元 $\hat{Y}_x$ 的"轨道"在 $x \in [a,b]$ 时对不同的"轨道"以接近于 1 的概率一致地是 $(\beta/\alpha) - \varepsilon$ 阶 Hölder 连续的。因此它也概率为 1 地 $(\beta/\alpha) - \varepsilon$ 阶 Hölder 连续。

又如果有一列 $Y_x^{(n)}$ 对同一个 P（或有一列 $P^{(n)}$ 对同一个 Y_x），(2.56)对 n 一致成立（即 α，β，C 与 n 无关），那么(2.57)中的 C_1 也与 n 无关。

证明 不妨设 $a=0$，$b=1$。定义 $Y \equiv (Y_x)_{0 \leqslant x \leqslant 1}$ 的"折线近似" $Y^{(n)}$ 如下：

$$\begin{cases} Y^{(n)}_{\frac{j}{2^n}} = Y_{\frac{j}{2^n}}, \\ Y^{(n)}_x = \text{用折线连结 } Y^{(n)}_{\frac{j-1}{2^n}} \text{ 与 } Y^{(n)}_{\frac{j}{2^n}} \left(\frac{j-1}{2^n} < x < \frac{j}{2^n}\right). \end{cases}$$

记

$$D_x^{(n)} = Y_x^{(n)} - Y_x^{(n-1)}, \quad D_x^{(0)} = Y_x^{(0)}.$$

于是对任意 $x, x' \in [0,1]$，由 Chebyshev 不等式及(2.56)，我们有

$$\|D_x^{(n)} - D_{x'}^{(n)}\| \leqslant 2 \sup_{0 \leqslant j \leqslant 2^n - 1} \left\| D^{(n)}_{\frac{j}{2^n}} \right\| \overset{\text{记}}{=} \xi_n.$$

我们首先证明：对 $\lambda > 0$ 有

$$\frac{\|D_x^{(n)} - D_{x'}^{(n)}\|}{|x - x'|^{\lambda}} \leqslant 2^{n\lambda} \xi_n \quad (n \geqslant 0). \tag{2.58}$$

事实上，当 $|x - x'| \geqslant 1/2^n$ 时(2.58)显然成立；而当 $|x - x'| < 1/2^n$ 时我们有

$$\frac{\|D_x^{(n)} - D_{x'}^{(n)}\|}{|x - x'|^{\lambda}} = \left\| \frac{D_x^{(n)} - D_{x'}^{(n)}}{x - x'} \right\| |x - x'|^{1-\lambda}$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant j \leqslant 2^n - 1} \left\| \frac{D^{(n)}_{\frac{j+1}{2^n}} - D^{(n)}_{\frac{j}{2^n}}}{\frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n}} \right\| \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1-\lambda}$$

$$\leqslant 2^n \cdot \xi_n \cdot (2^n)^{\lambda-1} = 2^{n\lambda}\xi_n.$$

因此(2.58)成立。这样，对 $r>0$，由(2.58)我们得到

$$P\left(\|D_x^{(n)} - D_{x'}^{(n)}\| \geqslant \frac{A}{2^{nr}}|x-x'|^\lambda,\ \text{对某些}x,x'\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{\|D_x^{(n)} - D_{x'}^{(n)}\|}{|x-x'|^\lambda} < \frac{A}{2^{nr}},\ \text{对一切}x,x'\right)$$

$$< 1 - P\left(2^{n\lambda}\xi_n < \frac{A}{2^{nr}}\right)$$

$$= P\left(\xi_n \geqslant \frac{A}{2^{n(r+\lambda)}}\right)$$

$$= P\left(\sup_{0\leqslant j\leqslant 2^n-1}\left\|D^{(n)}_{\frac{j}{2^n}}\right\| \geqslant \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2^{n(r+\lambda)}}\right)$$

$$\leqslant P\left(\sup_{0\leqslant j\leqslant 2^n-1}\left\|Y_{\frac{j+1}{2^n}} - Y_{\frac{j}{2^n}}\right\| > \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2^{n(r+\lambda)}}\right)$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left(\left\|Y_{\frac{j+1}{2^n}} - Y_{\frac{j}{2^n}}\right\| > \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2^{n(r+\lambda)}}\right)$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{E\left\|Y_{\frac{j+1}{2^n}} - Y_{\frac{j}{2^n}}\right\|^\alpha}{\left[\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2^{n(r+\lambda)}}\right]^\alpha}$$

$$\leqslant 2^n \cdot \frac{C\left(\frac{1}{2^n}\right)^{1+\beta}}{\left(\frac{A}{2}\right)^\alpha \frac{1}{2^{n(r+\lambda)\alpha}}} = \frac{C\cdot 2^\alpha}{A^\alpha}\cdot\frac{1}{2^{n[\beta-(r+\lambda)\alpha]}}.$$

注意到

$$\beta - (r+\lambda)\alpha = \alpha\left[\frac{\beta}{\alpha} - (r+\lambda)\right],$$

对充分小的正数 ε，我们取定

$$\begin{cases} r = \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ \lambda = \dfrac{\beta}{\alpha} - \varepsilon. \end{cases}$$

于是我们有

$$P\left(\|D_x^{(n)}-D_{x'}^{(n)}\|\geqslant\frac{A}{2^{\frac{n\varepsilon}{2}}}|x-x'|^{\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon},\ \text{对某些}x,x'\right)$$

$$\leqslant C\frac{2^{\alpha}}{A^{\alpha}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n\varepsilon}{2}\alpha}}.$$

因此

$$P\left(\sum_0^{\infty}\|D_x^{(n)}-D_{x'}^{(n)}\|\leqslant A|x-x'|^{\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon}\sum_0^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{n\varepsilon}{2}}},\quad\forall x,x'\right)$$

$$\geqslant P\left(\forall x,x',n,\|D_x^{(n)}-D_{x'}^{(n)}\|\leqslant\frac{A}{2^{\frac{n\varepsilon}{2}}}|x-x'|^{\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon}\right)$$

$$\geqslant 1-\frac{C2^{\alpha}}{A^{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{n\varepsilon}{2}\alpha}}$$

$$=1-\frac{C2^{\alpha}}{A^{\alpha}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\frac{\varepsilon}{2}\alpha}}}.\tag{2.59}$$

因为A可以取得任意大，所以

$$P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|D_x^{(n)}-D_{x'}^{(n)}\|<\infty\right)=1.$$

但是 $D_0^{(0)}=Y_0$，$D_0^{(n)}=0$ （$n\geqslant1$），从而

$$P\left(\sum_{n=0}^{\infty}D_x^{(n)}\ \text{在 Banach 空间中收敛}\right)=1.$$

现在我们定义

$$\hat{Y}_x=\sum_{n=0}^{\infty}D_x^{(n)}.$$

显然在一切 $x=j/2^n$ 上有 $\hat{Y}_x=Y_x$，于是由(2.59)推出

$$P\left(\|\hat{Y}_x-\hat{Y}_{x'}\|\leqslant A|x-x'|^{\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon}\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\varepsilon/2}}}\right)$$

$$\geqslant P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|D_x^{(n)}-D_{x'}^{(n)}\|\leqslant A|x-x'|^{\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^{n\varepsilon/2}}\right)$$

$$\geqslant 1-C\frac{2^\alpha}{A^\alpha}\cdot(1-2^{-\frac{\varepsilon\alpha}{2}})^{-1}.$$

对于给定的$\delta>0$，我们取A使

$$C\frac{2^\alpha}{A^\alpha}\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\varepsilon\alpha/2}}}=\delta,$$

即
$$A=2\left(\frac{C}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{(1-2^{-\frac{\varepsilon\alpha}{2}})^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

令$C_1=A\frac{1}{1-2^{-\varepsilon/2}}$。于是

$$P(\|\hat{Y}_x-\hat{Y}_{x'}\|\leqslant C_1|x-x'|^{\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon})\geqslant 1-\delta.$$

这就证明了(2.57)。从而概率为1地$\hat{Y}_x$对x是“轨道”连续的。显然由定义应有$\hat{Y}_{\frac{j}{2^n}}=Y_{\frac{j}{2^n}}$。由(2.56)立刻得到，对$\forall x$

$$P(\hat{Y}_x=Y_x)=1.$$

引理证毕。

我们先给出一个命题，它是定理7.3的特殊情形。

命题2.32 设X为连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅，$\Phi^{(n)}$与Φ为局部有界$(\mathscr{F}_t)$适应过程，它满足

(D₁) $\forall s$，$\Phi_s^{(n)}\xrightarrow{p}0$；

(D₂) $|\Phi_s^{(n)}|\leqslant\Phi_s(\forall n)$，

则

$$\int_0^t\Phi_s^{(n)}\mathrm{d}X_s\xrightarrow{p}0$$

对 $t \leqslant T$ 一致地成立。

证明 设 X 对应于引理2.23的唯一分解为

$$X_t = X_0 + M_t + A_t.$$

由引理2.14后面的例及控制收敛定理，我们有

$$\int_0^t |\Phi_s^{(n)}| \, |dA|_s + \int_0^t |\Phi_s^{(n)}|^2 d\langle M\rangle_s \longrightarrow 0 \quad (\text{a.e.}\, dP).$$

再由命题2.23便得命题。

推论 设 $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{l_n}^{(n)} = t$，$\lambda_n = \max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \to 0$ $(n \to \infty)$，Φ 为左连 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程，则

$$(p)\lim_{n\to\infty} \sum_i \Phi_{t_i^{(n)}} (X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}}) = \int_0^t \Phi_s dX_s,$$

其中 X 为连续 $(\mathscr{F}_t)$ 半鞅，而且收敛对 $t \leqslant T$ 一致。

证明 令

$$\tau_m = \inf\{t: \ |\Phi_t| \geqslant m\},$$

$$\Phi_s^{(n)} = \sum_i (\Phi_{t_i^{(n)}} - \Phi_s) I_{(t_i^{(n)}, t_i^{(n+1)}]}(s),$$

则

$$|\Phi_s^{(n)}| \leqslant 2 \sum_m m I_{[(\tau_m, \tau_{m+1}])},$$

且右边的过程是局部有界的。

引理2.28 设 X 为连续 $(\mathscr{F}_t)$ 半鞅，F 为凸函数，则

$$F(X_t) - F(X_0) - \int_0^t F'_-(X_s) dX_s (= A_t^F)$$

是增过程，其中 F'_- 是 F 的左导数。从而 $F(X)$ 是半鞅。

证明 取 $[s,t]$ 的类似命题2.32推论中的划分。由 $F(X)$ 是凸函数，在附录中所列的性质可推出对左导数 $F'_l(x)$ 有

$$F(y) - F(x) \geqslant F'_l(x)(y - x).$$

于是

$$F(X_{t_{i+1}^{(n)}}) - F(X_{t_i^{(n)}}) \geqslant F'_l(X_{t_i^{(n)}})(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}}).$$

对 i 取和后再让 $n \to \infty$，利用命题2.32的推论及 $F(x)$ 的左连续性

使得

$$F(X_t)-F(X_s)\geqslant\int_s^t F'_l(X_s)\mathrm{d}X_s$$

对于 $s,t\leqslant T^*$ 一致地成立。因此 A_t^F 是增过程。

推论 1 令

$$L_t^a\equiv 2\left((X_t-a)^+-(X_0-a)^+-\int_0^t I_{(a,\infty)}(X_s)\mathrm{d}X_s\right),$$

则 L_t^a 对 t 为增过程，而且有 Tanaka-Meyer 公式(当 $X=B$ 时称为 Tanaka 公式)

$$(X_t-a)^+=(X_0-a)^++\int_0^t I_{(a,\infty)}(X_s)\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}L_t^a,\quad(2.60)$$

$$(X_t-a)^-=(X_0-a)^--\int_0^t I_{(-\infty,a]}(X_s)dX_s+\frac{1}{2}L_t^a,\quad(2.61)$$

$$|X_t-a|=|X_0-a|+\int_0^t \mathrm{sgn}(X_s-a)\mathrm{d}X_s+L_t^a,\quad(2.62)$$

这里 $\mathrm{sgn}\,x\equiv I_{(0,\infty)}(x)-I_{(-\infty,0)}(x)$。

证明 注意 $F^+(x)\equiv(x-a)^+$ 为凸函数。用引理得

$$A_t^{F^+}-A_t^{F^-}=X_t-X_0-\int_0^t\mathrm{d}X_s=0$$

以及 $L_t^a=2A_t^{F^+}$。推论得证。

推论 2 L_t^a 作为参数 (a,t) 的随机场对于 (a,t,ω) 为 $\mathscr{B}(R)\times\mathscr{P}$ 可测的，其中 $\mathscr{P}$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 可料 σ 代数。

证明 由 L_t^a 的表达式即得。

定义2.28 L_t^a 称为连续半鞅 X 在 a 点的局部时。

推论 3 a 固定，测度 $\mathrm{d}L_t^a$ a.e.dP 地负荷于集合 $\{t:\ X_t=a\}$ 上。

证明 由 Tanaka-Meyer 公式(2.62)，我们有

$$\langle X-a\rangle=\langle X\rangle。$$

还是由(2.62)的半鞅$|X-a|$的表达式，用 Ito 公式求它的平方：

$$(X_t-a)^2=(|X_t-a|)^2$$

$$=|X_0-a|^2+2\int_0^t|X_s-a|\mathrm{d}|X_s-a|+\langle X-a\rangle_t$$

$$=(X_0-a)^2+2\int_0^t|X_s-a|(\operatorname{sgn}(X_s-a)\mathrm{d}X_s$$

$$+\mathrm{d}L_s^a)+\langle X\rangle_t$$

$$=(X_0-a)^2+2\int_0^t(X_s-a)\mathrm{d}X_s+\langle X\rangle_t$$

$$+2\int_0^t|X_s-a|\mathrm{d}L_s^a.$$

另一方面，对$(X_t-a)^2$用普通的 Ito 公式，它恰应等于上式右方的前三项和。因此

$$\int_0^t|X_s-a|\mathrm{d}L_s^a=0\quad(\text{a.e. d}P).$$

由X_s的连续性得

$$\int_0^t I_{(X_s\neq a)}\mathrm{d}L_s^a=0\quad(\text{a.e.d}P).$$

定理2.14(凸函数的 Ito–Tanaka 公式) 若X为连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅，L_t^a为它的局部时，则对于任意凸函数F有

$$F(X_t)=F(X_0)+\int_0^t F_l'(X_s)\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}\int_R L_t^a F_l'(\mathrm{d}a).\tag{2.63}$$

证明 不妨设X为有界过程，因为一般情形可用与定理1.3的证明中第二步的局部化方法归结为有界情形。现在我们设$|X_t|\leqslant C$。令μ为

$$\mathrm{d}\mu\equiv I_{[-c,c]}F_l'(\mathrm{d}x).$$

考虑二阶 Schwarz 导数为μ的凸函数，它在$[-c,c]$上只能与F差一个线性函数。因此存在α，β使

$$F(x)=\alpha x+\beta+\frac{1}{2}\int_{[-c,c]}|x-a|F_l'(\mathrm{d}a).\tag{2.64}$$

于是

$$F_l'(x)=\alpha+\frac{1}{2}\int_{[-c,c]}\operatorname{sgn}(x-a)F_l'(\mathrm{d}a). \qquad (2.65)$$

用(2.64),(2.62)，Fibini 定理(引理2.26)及(2.65),我们有

$$F(X_t)=\alpha X_t+\beta+\frac{1}{2}\int_{[-c,c]}|X_t-a|F_l'(\mathrm{d}a)$$

$$=\alpha X_t+\beta+\frac{1}{2}\int_{[-c,c]}\Big(|X_0-a|+\int_0^t\operatorname{sgn}(X_s-a)\mathrm{d}X_s$$

$$+L_t^a\Big)F_l'(\mathrm{d}a)$$

$$=\alpha(X_t-X_0)+F(X_0)+\int_0^t\Big(\frac{1}{2}\int_{[-c,c]}\operatorname{sgn}(X_s-a)$$

$$\cdot F_l'(\mathrm{d}a)\Big)\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}\int_{[-c,c]}L_t^aF_l'(\mathrm{d}a)$$

$$=F(X_0)+\int_0^tF_l'(X_s)\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}\int_{[-c,c]}L_t^aF_l'(\mathrm{d}a).$$

定理证毕。

推论1(占位时公式)　a.e. $\mathrm{d}P$ 地有

$$\int_0^tf(X_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s=\int_{-\infty}^{\infty}f(a)L_t^a\mathrm{d}a\quad(\forall t>0), \qquad (2.66)$$

这里 $f\in\mathscr{B}(R)$，且非负。

证明　如果 $f=F''$ 且 $F\in C^2$，则由比较 $F(X_t)$的Ito公式与Ito-Tanaka 公式(此时 F 为两个凸函数之差)就得到(2.66)。因此对 $f\in C(R)$推论成立。一般$\mathscr{B}(R)$中的非负函数可由典型逼近得到(2.66)。

推论2　若 F' 凸，则$\mathrm{d}F(X_t)=F'(X_t)\circ\mathrm{d}X_t$。

引理2.29　设连续半鞅X的分解为

$$X-X_0=M+A,$$

$M\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$, A为连续的有限变差($\mathscr{F}_t$)适应过程。那么对于

$$\bar{M}_t^a\equiv\int_0^t I_{(a,\infty)}(X_s)\mathrm{d}M_s,$$

$$\bar{A}_t^a\equiv\int_0^t I_{(a,\infty)}(X_s)\mathrm{d}A_s,$$

有

$$P(\omega:\ \bar{M}_t^a\text{为}(a,t)\text{连续函数})=1, \tag{2.67}$$

$$P\{\omega:\ \bar{A}_t^a\text{关于}(a,t)\text{对}t\text{连续且对}a\text{右连左极}\}=1. \tag{2.68}$$

证明 与证明定理2.14类似，我们不妨假定 X, $\int_0^t|\mathrm{d}A|$, $\langle M\rangle$ 均为有界过程。

对于 $T>0$, $\bar{M}_t^a$ 在 $t\leqslant T$ 可看成 a 为参量的取值于 Banach 空间 $C[0,T]$的随机元。我们来验证它满足引理2.27的 Kolmogorov 矩条件。事实上由 $p=2$时的不等式(2.54)及(2.66)，我们有：对 $a<b$,

$$\begin{aligned}
E\|\bar{M}^a-\bar{M}^b\|^4&=E\left[\sup_{[0,T]}\int_0^t I_{(a,b]}(X_s)\mathrm{d}M_s\right]^4\\
&\leqslant CE\left(\int_0^T I_{(a,b]}(X_s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)^2\\
&=CE\left(\int_a^b L_T^x\mathrm{d}x\right)^2\\
&=C(b-a)^2E\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b L_T^x\mathrm{d}x\right)^2\\
&\leqslant C(b-a)^2E\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b (L_T^x)^2\mathrm{d}x\right)\\
&\leqslant C(b-a)^2\sup_x(L_T^x)^2.
\end{aligned}$$

另一方面，由(2.60)

$$L_T^x = 2\left[(X_T - x)^+ - (X_0 - x)^+ - \int_0^T I_{(x,\infty)}(X_s)(\mathrm{d}M_s + \mathrm{d}A_s)\right]$$

得到

$$E(L_T^x)^2 \leqslant 32\left[E\left|(X_T - x)^+ - (X_0 - x)^+\right|^2\right.$$

$$+ E\left(\int_0^T I_{(x,\infty)}(X_s)\ \mathrm{d}M_s\right)^2$$

$$\left.+ E\left(\int_0^T I_{(x,\infty)}(X_s)\mathrm{d}A_s\right)^2\right]$$

$$\leqslant 32\left(E|X_T - X_0|^2 + E\left(\int_0^T |\mathrm{d}A|_s\right)^2 + E\langle M\rangle_T\right)$$

$\leqslant$常数。

因此(2.56)型的条件是满足的。由引理 2.27 可知$\tilde{M}^a$ 作为$C[0, T]$值过程存在对 a 连续的修正，我们就取这个修正过程作为$\tilde{M}^a$。这样，利用二元连与单变量连续间的关系，我们有

$$P\{\omega:\ \tilde{M}_t^a \text{对}(a,t)\text{连续}\}$$

$$= P\{\omega:\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{M}_t^{a+\Delta a} - \tilde{M}_t^a| \to 0 \quad (\Delta a \to 0)\}$$

$$= P\{\omega:\ \|\tilde{M}^{a+\Delta a} - \tilde{M}^a\| \to 0 \quad (\Delta a \to 0)\}$$

$$= P\{\omega:\ \tilde{M}^a \text{对 } a \text{ “轨道” 连续}\} = 1.$$

这就证明了(2.67)。

另一方面，由控制收敛定理

$$\tilde{A}_t^{a-} = \lim_{x\uparrow a}\int_0^t I_{(x,\infty)}(X_s)\mathrm{d}A_s = \int_0^t I_{[a,\infty)}(X_s)\mathrm{d}A_s.$$

由 Tanaka-Meyer 公式(2.60)及(2.67)，我们得到

$$L_t^a - L_t^{a-} = 2(\tilde{A}_t^{a-} - \tilde{A}_t^a) = 2\int_0^t I_{\{a\}}(X_s)\mathrm{d}A_s.$$

类似地，

$$\tilde{A}_t^{a+} = \lim_{x\downarrow a}\int_0^t I_{(x,\infty)}(X_s)\mathrm{d}A_s = \int_0^t I_{(a,\infty)}(X_s)\mathrm{d}A_s = \tilde{A}_t^a.$$

从而 $L_t^{a+}=L_t^a$.

推论 $L_t^a-L_t^{a-}=2\int_0^t I_{\{a\}}(X_s)\mathrm{d}X_s$.

证明 由占有时公式(2.66)

$$E\left(\int_0^t I_{\{a\}}(X_s)\mathrm{d}M_s\right)^2=\int_0^t I_{\{a\}}(X_s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s$$

$$=\int_0^t I_{\{a\}}(X_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} I_{\{a\}}(x)L_t^x\mathrm{d}x=0.$$

所以 $\int_0^t I_{\{a\}}(X_s)\mathrm{d}M_s=0$. 因而推论成立.

定理2.15 连续半鞅 X 的局部时 L_t^a 可以取得满足

$P\{\omega$: L_t^a 是 t 的连续函数、是 a 的右连左极函数$\}=1$.

证明 由 Tanaka-Meyer 公式(2.60)及引理2.29立得.

注 连续局部鞅 M 的局部时 L_t^a 满足

$$P\{\omega:\ L_t^a \text{ 为}(a,t)\text{连续函数}\}=1.$$

推论1 连续半鞅 X 的局部时有

$$P\left\{\omega:\ L_t^a=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t I_{[a,a+\varepsilon)}(X_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s\right\}=1.$$

对连续局部鞅 M 的局部时，则

$$P\left\{\omega:\ L_t^a=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t I_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(M_s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right\}=1.$$

证明 对连续半鞅 X，由占有时公式(2.66)，a.e.$\mathrm{d}P$ 地有

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t I_{(a,a+\varepsilon)}(X_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s=\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} L_t^x\mathrm{d}x\to L_t^a\quad(\varepsilon\to 0),$$

这里用了 L_t^a 对 a 的右连续性.

推论2 (Trotter) $(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B 存在局部时 $l(t,x)$,

它是一个依赖位置参数 $x(\in \mathbf{R})$ 的非负($\mathscr{F}_t$)适应过程，满足

(L₁) $P\{\omega: l(t,x)$是(t,x)连续函数$\}=1$;

(L₂) 对任意非负 $B(R)$函数 f 有

$$\int_0^t f(B_s)\mathrm{d}s = 2\int l(t,x)f(x)\mathrm{d}x \quad (\mathrm{a.e.\,d}P);$$

(L₃) $P\left\{\omega: l(t,x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t I_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(B_s)\mathrm{d}s\right\} = 1$;

(L₄) $l(t,x) = (B_t - x)^+ - (B_0 - x)^+$

$$-\int_0^t I_{(x,\infty)}(B_s)\mathrm{d}B_s \text{（}l(t,x)\text{即}\frac{1}{2}L_t^x\text{）}.$$

推论3（局部时的可加泛函性质）

$$L_{t+s}^a(\omega) = L_s^a(\omega) + L_t^a(\theta_s\omega) \quad (\mathrm{a.e.\,d}P),$$

其中 θ_s 为推移算子：$(\theta_s\omega)_\cdot \equiv \omega_{\cdot+s}$.

证明 由 Tanaka-Meyer 公式立得.

§2.9 Brown 局部时的 Engelbert-Schmidt 零一律

设 $l(t,a)$为 Brown 运动局部时，记 $P_x = P(\ \mid B_0 = x)$. 显见

$$P_a(l(t,a)\in\Gamma) = P_0(l(t,0)\in\Gamma).$$

命题2.33 (1) 对任意 $t(\omega)>0$，$P_0(l(t(\omega),0)=0)=0$;

(2) $P_x\{\omega: \{t: B_t = a\}$的点都是 $l(t,a)$的严增点$\} = 1$.

证明 (1) 当 $B_0 = 0$时 Tanaka 公式为

$$2l(t,0) = |B_t| + \int_0^t \mathrm{sgn}B_s\mathrm{d}B_s.$$

如果 $l(t(\omega),0)=0$，则 $l(t,0)=0 \quad t\leqslant t(\omega)$. 但在$[0,t(\omega)]$上 $|B_t|$非负，而$\int_0^t \mathrm{sgn}B_s\mathrm{d}B_s$ 也是一个 Brown 运动，它不管$t(\omega)$如

何小，总能以概率为1地变号无限多次，这就引起了矛盾.

(2) 设 $B_t=a$，我们来证明对任意满足 $r<t<r'$ 的有理数对 r,r'，恒有

$$P_x(l(r,a)<l(r',a))=1.$$

记 $\tau=\inf\{t>r,B_t=a\}$. 由强马氏性

$$P_x(L_s^a(\theta,\omega)>0)=E_xP_x(L_s^a(\theta_\tau\omega)>0|B_\tau)$$
$$=E_xP_a(L_s^a>0)=P_0(L_s^0>0)=1.$$

于是利用上节推论3就有

$$P_X(L_{\tau+s}^a>L_\tau^a)=1\quad(\forall s>0).$$

取 $s=r'-\tau$，我们得到

$$l(r,a)\leqslant l(\tau,a)<l(\tau+s,a)=l(r',a)\quad(\text{a.e.}\,dP_x).$$

一个非负 Borel 函数 f 沿 x 出发的足够多 Brown 运动局部轨道上的可积性，可以推出 f 在 x 附近的可积性. 这就是

引理2.30 如果存在随机变量 $t(\omega)$满足

(1) $P_0(0<t(\omega)<\infty)=1$;

(2) $P_0\left(\int_0^{t(\omega)}f(x+B_s)\mathrm{d}s<\infty\right)$,

则存在 $\varepsilon>0$，使 $f\in L(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. 这里 f 是任意非负 Borel 函数(以后我们称 x 为 f 的可积点).

证明 设 $l(t,a)(\omega)=l(t,a)$. 由占位时公式、命题2.33及引理假设可知存在 ω 使

$$l(t(\omega),0)(\omega)>0,$$

$$2\int_{-\infty}^{\infty}f(x+a)l(t(\omega),a)(\omega)\mathrm{d}a=\int_0^{t(\omega)}f(x+B_s(\omega))\mathrm{d}s<\infty.$$

利用 $l(t,a)$的轨道二元连续性及 $l(t(\omega),0)>0$，我们可找 $\delta,\varepsilon>0$，使对一切$|a|\leqslant\varepsilon$ 有 $l(t(\omega),a)(\omega)\geqslant\delta$. 这样

$$\infty>\int_0^{t(\omega)}f(x+B_s(\omega))\mathrm{d}s=2\int_{-\infty}^{\infty}f(x+a)l(t(\omega),a)(\omega)\mathrm{d}a$$

$$\geq 2\delta\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+a)\mathrm{d}a.$$

因此 $f\in L(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$。

命题2.34(Engelbert-Schmiat 零一律) 对非负 Borel 函数，下列三个叙述彼此等价：

(1) $P_0\left(\int_0^t f(B_s)\mathrm{d}s<\infty,\ \forall t\geq 0\right)>0$；

(2) (1)的概率为 1；

(3) f 局部可积，即在任意紧集上可积。

证明 (1)⇒(3)。令

$$\tau_x=\inf\{t:\ B_t=x\},\quad \tilde{B}_t=B_{t+\tau_x}-B_{\tau_x},$$

则 $\tilde{B}_t$ 也是 Brown 运动。于是由(1)及

$$\int_0^{t+\tau_x} f(B_s)\mathrm{d}s\geq\int_{\tau_x}^{t+\tau_x} f(B_s)\mathrm{d}s=\int_0^t f(x+\tilde{B}_s)\mathrm{d}s,$$

f 满足引理2.30条件($t(\omega)=t$)。因此 $f\in L(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$。但 x 可任意取，所以 f 局部可积。

(3)⇒(2)。取 $K=[B_{*,t}(\omega),\ B_t^*(\omega)]$，其中

$$B_{*,t}=\min_{s\leq t}B_s,\qquad B_t^*=\max_{s\leq t}B_s.$$

在(3)条件下，由引理2.28推论3我们有

$$\int_0^t f(B_s)\mathrm{d}s=2\int_{-\infty}^{\infty} f(a)l(t,a)\mathrm{d}a$$

$$=2\int_{B_{*,t}}^{B_t^*} f(a)l(t,a)da$$

$$\leq 2\max_{B_{*,t}\leq a\leq B_t^*} l(t,a)\int_K f(a)\mathrm{d}a<\infty.$$

推论 $$P_0\left(\int_0^t \frac{1}{|B_s|^{\alpha}}\mathrm{d}s<\infty,\ \forall t\geq 0\right)=\begin{cases}1, & 0<\alpha<1,\\ 0, & \alpha\geq 1.\end{cases}$$

习　题

1. $X\in\mathscr{M}_2^{loc}(\mathscr{F}_t)$，$B$ 为$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，求证$\langle X,B\rangle$具有连续轨道，并求它的 Doleans 测度。

2. 设 B 为 Brown 运动，则$\mathscr{M}_2^{loc}(\mathscr{F}_t^B)$中过程必能表成对于 B_t 的 Ito 积分(提示：相对于$\mathscr{B}$的全体积分作强正交分解)。

3. 设 B 为 Brown 运动，则$(\mathscr{F}_t^B)$局部鞅必是连续的。

4. 若 B 为 Brown 运动，(ξ,B)联合正态，则存在非随机的 L_2 函数 $f(t)$，使$\xi=E\xi+\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}B_s$。

5. 若 B 为$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，τ 为$(\mathscr{F}_t)$停时，$E\tau<\infty$，证明 Wald 等式：$EB_\tau=0$，$EB_\tau^2=E\tau$。

6. 已知$\langle M,N\rangle$，求$\langle E(M|\mathscr{G}_t),E(N|\mathscr{G}_t)\rangle(\mathscr{G}_t\subset\mathscr{F}_t)$。

7. 证明：局部鞅是鞅，当且仅当它是(DL)类的。

8. 证明：若X是可料的局部可积变差鞅，则 $X_t=X_0$。

9. 证明：若$\xi\in L_1(\mathscr{F}_\sigma)$，$\sigma$ 是停时，则$\xi I_{[\![\sigma,\infty[\![}$是鞅，当且仅当在$0<\sigma<\infty$有 $E(\xi|\mathscr{F}_{\sigma-})=0$。

10. 若 A 是局部可积$(\mathscr{F}_t)$增过程，那么 $A=A'+A''$，其中 A' 是拟左连续增过程，

$$A_t''=\sum_n\Delta A_{\tau_n}I_{\tau_n\leqslant t}，$$

τ_n 为可料时，而且 A'' 的可料对偶投影为

$$(A'')_t^p=\sum_n E(\Delta A_{\tau_n}|\mathscr{F}_{\tau_n-})I_{\tau_n\leqslant t}。$$

11. A,A' 为适应(或可料)右连增过程，$P(\omega:\ \mathrm{d}A_t\ll\mathrm{d}A_t')=1$，则存在可选(或可料)过程$X$，使

$$A_t=\int_0^t X_s\mathrm{d}A_s'。$$

12. 右连续下鞅有 Meyer 分解则必须为(DL)类的。

13. φ 有界，Lebesgue 可测，则有

$$E_x\int_0^t \varphi(B_s)\mathrm{d}l(s,y) = 2\int_0^t \varphi(y)b(s,x,y)\mathrm{d}s,$$

其中 $b(s,x,y)$ 是 Brown 运动 B 的转移密度。

14. 求 Shiryaev-Robert 方程

$$\mathrm{d}X_t = \alpha X_t \mathrm{d}B_t + (1+\alpha\beta X_t)\mathrm{d}t$$

的解。

15. 设 $F\in C^2(R\backslash\{x_1,\cdots, x_n\})$, 且 $F'(a_k\pm)$ 及 $F''(a_k\pm)$ $(k=1,\cdots,n)$ 都存在且有限, X 为连续半鞅, 证明

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s$$

$$+\sum_{k=1}^{n} L_t^{a_k}(F'(a_k+) - F'(a_k-)).$$

16. 若 X 为连续半鞅, f 为 $[0,\infty)\times R$ 上非负 Borel 函数, 求证

$$\int_0^t f(s,X_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t f(s,a)\mathrm{d}L_s^a\right)\mathrm{d}a.$$

17. 设 X 为连续半鞅, 又

$$\mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

求证存在唯一增过程 $\tilde{L}^a$, 使

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sg}n(X_s - a)\mathrm{d}X_s + \tilde{L}_t^a,$$

而且它满足

$(\tilde{\mathrm{L}}_1)$ $\tilde{L}^a = \frac{1}{2}(L^a + L^{a-})$;

$(\tilde{\mathrm{L}}_2)$ $\tilde{L}_t^a = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(X_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s$;

$(\tilde{\mathrm{L}}_3)$ 对凸函数 F 有

$$F(X_t) = F(X_0) + \frac{1}{2}\int_0^t (F_r' + F_l')(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int \tilde{L}_t^a(F_l')(\mathrm{d}a),$$

这里 F'_r 是 F 的右导数。

这个 $\tilde{L}^a$ 称为X的对称局部时。

18. 记连续半鞅X的局部时为 $L^a(X)$。设 τ_t 为时间变换，证明

$$L_t^a(X_{\tau_\cdot}) = L_{\tau_t}^a(X).$$

再证明对于连续局部鞅M有

$$L_t^a(M) = L_{\langle M \rangle_t}^a(B),$$

其中 B 为 Brown 运动。

19. 若 f 为紧支集非负$\mathscr{B}(\boldsymbol{R})$函数，且$\int f(x)\mathrm{d}x>0$。记

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nt} f(B_s)\mathrm{d}s,$$

其中 B 为初值为0的 Brown 运动，求证

$$X_t^{(n)} \xrightarrow{d} 2\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)L_t^0.$$

20. 求连续有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程的局部时。

21. X,Y 均为连续半鞅，求证$X\wedge Y,X\vee Y$也是连续半鞅。求 $X\wedge Y$ 的局部时 $L_t^a(X\wedge Y)$。证明

$$L_t^a(X\wedge Y) + L_t^a(X\vee Y) = L_t^a(X) + L_t^a(Y).$$

22. 若 F' 绝对连续，X为连续半鞅，则有 Ito 公式

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\mathrm{d}s,$$

其中 F'' 为F' 在 Lebesgue 意义下 a.e. 导数。

23. 证明凸函数 g 关于对称局部时的 Ito 公式：对连续半鞅X有

$$\int_0^t \mathrm{d}g(X_s) = \int_0^t \tilde{g}'(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int \tilde{L}_t^a \tilde{g}'(\mathrm{d}a),$$

其中 $\tilde{g}'$ 是 g 的对称导数：$\tilde{g}' = \frac{1}{2}(g'_r + g'_l)$（$g_r, g_l$ 分别为 g 的右、左导数）。

第三章　随机微分方程的一般概念

§3.1　连续半鞅的随机微分方程

定义3.1　设$(\mathscr{F}_t)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的完备参考族，$\sigma^{ij}(x)$ $(i\leq d, j\leq r)$是$\mathscr{B}(R^d)$函数，$Y^{(j)}(j\leq r)$为$(\mathscr{F}_t)$连续半鞅。我们称d维连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程

$$X=\begin{pmatrix}X^{(1)}\\ \vdots\\ X^{(d)}\end{pmatrix}$$

为无记忆型随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t=\sigma(X_t)\mathrm{d}Y_t \tag{3.1}$$

的以$\hat{X}_0$为初值的解，如果对$\forall t>0$恒有

$$X_t=\hat{X}_0+\int_0^t\sigma(X_s)\mathrm{d}Y_s\quad(\text{a.e.d}P), \tag{3.2}$$

其中

$$\sigma=(\sigma^{ij}), Y=\begin{pmatrix}Y^{(1)}\\ \vdots\\ Y^{(r)}\end{pmatrix},\quad \hat{X}_0\in\mathscr{F}_0.$$

随机微分方程的解称为(轨道)唯一的，如果对于任意的两个解X,X'，它们必须在下述意义下无区别：

$$P(\forall t, X_t=X'_t)=1.$$

引理3.1(时间变换的停时引理)　设φ_t是右连续、严格递增的$(\mathscr{F}_t)$适应过程，$\varphi_t\uparrow\infty(t\uparrow\infty)$，则$\varphi_t$的“右连续逆”$\tau_t$：

$$\tau_t\equiv\inf\{s:\ \varphi_s>t\}$$

是一族连续的、递增($\mathscr{F}_t$)停时，而且$\tau_t\uparrow\infty(t\uparrow\infty)$。

如果定义

$$\tilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{\tau_t},$$

那么$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$右连续，$\widetilde{\mathscr{F}}_\infty(\equiv\bigvee_t\widetilde{\mathscr{F}}_t)=\mathscr{F}_\infty$，而且$\varphi_t$是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$停时，同时$\widetilde{\mathscr{F}}_{\varphi_t}=\mathscr{F}_t$。

如果($\mathscr{F}_t$)为P完备，那么$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$也是$P$完备的。

此外，我们有$M\in\mathscr{M}_2^{loc}(\mathscr{F}_t)$，当且仅当$M_{\tau\cdot}\in\mathscr{M}_2^{loc}(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$。在条件成立下，我们还有$\langle M_{\tau\cdot}\rangle_t=\langle M\rangle_{\tau_t}$。

证明 首先，对于任意($\mathscr{F}_t$)停时τ，利用($\mathscr{F}_t$)的右连续性，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\tau+}&=\{A:\ A\in\mathscr{F}_\infty,A\cap\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t\}\\&=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\ A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t+}\}\\&=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\ A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t\}=\mathscr{F}_\tau.\end{aligned}$$

由定义1.14可知τ_t是右连续的。它显然递增，而且$\{\tau_t<s\}\in\mathscr{F}_s$，因此是($\mathscr{F}_t$)停时。但是它同时也是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$适应过程，所以$\varphi_t$作为它的右连续逆是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$停时。此外，$\tau_t$作为$t$的函数在$\omega$固定时能取到一切实数值。$\tau_t$与($\mathscr{F}_t$)之右连续性立刻导致$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$之右连续性。事实上，如果$A\in\widetilde{\mathscr{F}}_{t+}$，即

$$A\in\bigcap_n\mathscr{F}_{\tau_{t+\frac{1}{n}}},$$

那么

$$A\cap\{\tau_t<s\}=\bigcup_n\left(A\cap\{\tau_{t+\frac{1}{n}}<s\}\right)\in\mathscr{F}_s.$$

因此$A\in\mathscr{F}_{(\tau_t)+}=\mathscr{F}_{\tau_t}=\widetilde{\mathscr{F}}_t$，即$\widetilde{\mathscr{F}}_{t+}=\widetilde{\mathscr{F}}_t$。

其次，$\mathscr{F}_t\cap\{t\leqslant\tau_s\}\subset\mathscr{F}_{\tau_s}=\widetilde{\mathscr{F}}_s\subset\widetilde{\mathscr{F}}_\infty$，因此$\mathscr{F}_t\subset\widetilde{\mathscr{F}}_\infty$。而且进而有$\mathscr{F}_\infty=\widetilde{\mathscr{F}}_\infty$。

最后我们来证明$\widetilde{\mathscr{F}}_{\varphi_t}=\mathscr{F}_t$。一般地，我们有

$$\tau_{\varphi_t}\geqslant t.$$

但是φ_t严格增，故

$$\tau_{\varphi_t}=t$$

（此时τ_t连续）。由此

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{\varphi_t}=\mathscr{F}_t.$$

引理的其余结论容易证明。

引理3.2 设$(\mathscr{F}_t)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上完备参考族，$a(x),b(x)$是R^1上连续函数，$X_0\in\mathscr{F}_0$，$M\in\mathscr{M}_2^{c,loc}(\mathscr{F}_t)$，$A$为连续有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程。那么方程

$$X_t=X_0+\int_0^t a(X_s)\mathrm{d}M_s+\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}A_s \quad (\text{a.e.d}P) \quad (3.3)$$

等价于对某个参考族$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$的方程

$$\widetilde{X}_t=X_0+\int_0^t a(\widetilde{X}_s)\mathrm{d}\widetilde{M}_s+\int_0^t b(\widetilde{X}_s)\mathrm{d}\widetilde{A}_s \quad (\text{a.e.d}P), \quad (3.4)$$

其中$\widetilde{A}$是连续有限变差$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$适应过程，其全变差测度$|\mathrm{d}\widetilde{A}|_t\leqslant \mathrm{d}t$，$\widetilde{M}\in\mathscr{M}_2^{c,loc}(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$，$\mathrm{d}\langle\widetilde{M}\rangle_t\leqslant\mathrm{d}t$。

注 记号$\mathrm{d}\mu_t\leqslant\mathrm{d}\nu_t$表示对任意$\mathscr{B}([0,\infty))$集合$A$，恒有$\mu_t(A)\leqslant\nu_t(A)$。

证明 令

$$\varphi_t=t+\langle M\rangle_t+\int_0^t|\mathrm{d}A|_s.$$

于是它满足引理3.1的条件，而且还是连续的。定义

$$\widetilde{M}_t=M_{\tau_t},\ \widetilde{A}_t=A_{\tau_t},\quad \widetilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{\tau_t}.$$

设X为(3.3)的解。定义$\widetilde{X}_t=X_{\tau_t}$。我们有$\langle\widetilde{M}\rangle_t=\langle M\rangle_{\tau_t}$，而且$a(X)\in\mathscr{L}_2^{loc}(\langle M\rangle)$，当且仅当$a(\widetilde{X})\in\mathscr{L}_2^{loc}(\langle\widetilde{M}\rangle)$时成立。我们注意到$\tau_t\leqslant t$，即知$\tau_t$是有界的。当$M\in\mathscr{M}_2^c$时，我们用

(2.38′)得到

$$\int_0^{\tau_t} a(X_s)\mathrm{d}M_s$$

$$= (p)\lim_{n\to\infty}\sum_k a(X_{\tau_{\frac{k}{2^n}t}})(M_{\tau_{\frac{k+1}{2^n}t}} - M_{\tau_{\frac{k}{2^n}t}})$$

$$= (p)\lim_{n\to\infty}\sum_k a(\tilde{X}_{\frac{k}{2^n}t})(\tilde{M}_{\frac{k+1}{2^n}t} - \tilde{M}_{\frac{k}{2^n}t})$$

$$= \int_0^t a(\tilde{X})\mathrm{d}\tilde{M}.$$

而当一般 $M \in \mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$ 时，我们取 $(\mathscr{F}_t)$ 停时列 $\sigma_n \uparrow \infty$，使 $M^{\sigma_n} \in \mathscr{M}_2^c$。这时我们有：对 $\forall s$

$$\{\varphi_{\sigma_n} < s\} = \{\sigma_n < \tau_s\} \in \mathscr{F}_{\tau_s +} = \mathscr{F}_{\tau_s} = \tilde{\mathscr{F}}_s.$$

即 φ_{σ_n} 是 $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$ 停时列，而且 $\varphi_{\sigma_n} \uparrow \infty$。同时

$$(\tilde{M}^{\sigma_n})_t = M_{\tau_t \wedge \sigma_n} = M_{\tau_{t \wedge \varphi_{\sigma_n}}} = (\tilde{M})_t^{\varphi_{\sigma_n}}.$$

因此由上段得到的事实，

$$\int_0^{\tau_t} a(X)\mathrm{d}M^{\sigma_n} = \int_0^t a(\tilde{X})\mathrm{d}(\tilde{M})^{\varphi_{\sigma_n}}.$$

令 $\sigma_n \to \infty$，我们得到

$$\int_0^{\tau_t} a(X)\mathrm{d}M = \int_0^t a(\tilde{X})\mathrm{d}\tilde{M}. \tag{3.5}$$

另一方面，显然有

$$\int_0^{\tau_t} b(X)\mathrm{d}A = \int_0^t b(\tilde{X})\mathrm{d}\tilde{A}.$$

所以由 X 满足(3.3)立刻推出 $\tilde{X}$ 满足(3.4)。

反之，若 $\tilde{X}$ 满足(3.4)，我们可定义 $X_t = \tilde{X}_{\varphi_t}$。由引理3.1推出 $X_t \in \mathscr{F}_t$。这个 X 必然满足(3.4)。

由于 τ_t 是 φ_t 之逆，所以 $t = \tau_t + \langle M\rangle_{\tau_t} + \int_0^{\tau_t}|\mathrm{d}A|_s$。于是其增量满足

$$\Delta t = \Delta \tau_t + \Delta\langle M\rangle_{\tau_t} + \Delta\left(\int_0^{\tau_t} |\mathrm{d}A|_s\right)$$

$$\geqslant \Delta\langle M\rangle_{\tau_t} + \Delta\left(\int_0^{\tau_t} |\mathrm{d}A|_s\right)$$

$$= \Delta\langle \tilde{M}\rangle_t + \Delta\left(\int_0^t |\mathrm{d}\tilde{A}|_s\right).$$

这说明 $\mathrm{d}\langle\tilde{M}\rangle_t + |\mathrm{d}\tilde{A}|_t \leqslant \mathrm{d}t$。引理证毕。

一般还可以考虑有记忆型随机微分方程。

定义3.2 $(W^d, \mathscr{B}(W^d))$上的可测$(\mathscr{B}_t(W^d))$适应过程$\alpha_t \equiv \alpha(t,w)$简称为因果函数。

显然，因果函数有

$$\alpha(t, w_{\cdot\wedge t}) = \alpha(t, w).$$

定义3.3 在定义3.1中如果用因果函数$\sigma^{ij}(t,w)$代替$\mathscr{B}(R^d)$函数$\sigma^{ij}(x)$，那么我们称

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(t, X)\mathrm{d}Y \quad (\sigma \equiv (\sigma^{ij})) \tag{3.6}$$

为(有记忆型)随机微分方程。而(3.2)相应地应该改变为

$$X_t = \hat{X}_0 + \int_0^t \sigma(s, X)\mathrm{d}Y_s. \tag{3.7}$$

显然，如果随机微分方程(3.7)的解存在，它必是$(\mathscr{F}_t)$连续半鞅。

相应于引理3.2，我们有

引理3.2′ 在引理3.2中分别把$a(x), b(x)$改为因果函数$\alpha(t, w), \beta(t,w)$，那么方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s, X)\,\mathrm{d}M_s + \int_0^t \beta(s, X)\mathrm{d}A_s \quad (\mathrm{a.e.\,d}P)$$

等价于对某个参考族$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$的方程

$$\widetilde{X}_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s, \widetilde{X}) \mathrm{d} \widetilde{M}_s$$

$$+ \int_0^t \beta(s, \widetilde{X}) \mathrm{d} \widetilde{A}_s \quad (\text{a.e.} \mathrm{d}P).$$

而且满足

$$\mathrm{d}\langle \widetilde{M} \rangle_t \leqslant \mathrm{d}t, \quad |\mathrm{d}\widetilde{A}|_t \leqslant \mathrm{d}t. \tag{3.8}$$

（证示：由积分的定义，存在 $\Phi_k^{(n)} \in \mathscr{F}_{t_k^{(n)}}$，使

$$\sum_k \Phi_k^{(n)} I_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(s) \xrightarrow{\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}(\langle M \rangle)} \alpha(t, X).$$

于是 $\Phi_k^{(n)} \in \mathscr{F}_{t_k^{(n)}} = \widetilde{\mathscr{F}}_{\varphi_{t_k^{(n)}}}$，而且

$$\sum_k \Phi_k^{(n)} I_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(\tau_s) = \sum_k \Phi_k^{(n)} I_{(\varphi_{t_k^{(n)}}, \varphi_{t_{k+1}^{(n)}}]}(s)$$

按 $\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}(\langle \widetilde{M} \rangle)$ 趋于 $\alpha(t, \widetilde{X})$（$\widetilde{M}, \widetilde{X}$ 含义如引理3.2）。由(2.38)得到

$$\int_0^{\tau_t} \sum_k \Phi_k^{(n)} I_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(s) \mathrm{d}M_s$$

$$= \sum_k \Phi_k^{(n)} (M_{t_{k+1}^{(n)} \wedge \tau_t} - M_{t_k^{(n)} \wedge \tau_t})$$

$$= \sum_k \Phi_k^{(n)} (\widetilde{M}_{\varphi_{t_{k+1}^{(n)}} \wedge t} - \widetilde{M}_{\varphi_{t_k^{(n)}} \wedge t})$$

$$= \int_0^t \sum_k \Phi_k^{(n)} I_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(\tau_s) \mathrm{d} \widetilde{M}_s.$$

令 $n \to \infty$，我们有

$$\int_0^{\tau_t} \alpha(t, X) \mathrm{d}M_s = \int_0^t \alpha(t, \widetilde{X}) \mathrm{d}\widetilde{M}_s.$$

沿用引理3.2证明中其他的一切推理，就得到引理3.2′。）

在用逐次逼近法讨论随机微分方程的解的存在唯一性时，维数的差异不是本质的。所以以下我们不妨假定 $d=1$。于是引理

3.2与引理3.2′就适用于我们的情形。

定理3.1 若 $a(x),b(x)$ 满足 Lipschitz 条件：$\exists K$ 使

$$|a(x)-a(y)|+|b(x)-b(y)|\leqslant K|x-y|$$
$$(\forall x,y\in R^1)$$

（简记成 $a,b\in \text{Lip}$），则方程(3.3)存在唯一解 X。

为了唯一性证明的需要，我们先证引理：

引理3.3(Gronwall 型不等式) 设 $g(t)$是不减的非负函数，$F(t)$是右连续不减函数。如果非负 Borel 函数 $f(t)$满足

$$f(t)\leqslant g(t)+\int_0^t f(s)\mathrm{d}F(s), \tag{3.9}$$

那么

$$f(t)\leqslant g(t)\mathrm{e}^{F(t)}. \tag{3.10}$$

证明 不妨设 f 关于 F 可积。把(3.9)迭代一次，我们有

$$f(t)\leqslant g(t)+\int_0^t g(s)\mathrm{d}F(s)+\int_0^t\int_0^s f(s_1)\mathrm{d}F(s_1)\mathrm{d}F(s)$$
$$\leqslant g(t)+g(t)F(t)+\int_0^t f(s_1)\frac{(F(t)-F(s_1))}{1!}\mathrm{d}F(s_1).$$

继续迭代，就得到

$$f(t)\leqslant g(t)\left(1+F(t)+\frac{F(t)^2}{2!}+\cdots+\frac{F(t)^n}{n!}\right)$$
$$+\int_0^t f(s)\frac{(F(t)-F(s))^n}{n!}\mathrm{d}F(s).$$

令$n\to\infty$，便得(3,10)。

定理3.1的证明 首先，由引理3.2可知，我们不妨假定(3.8)成立。

第一步，在附加假定 $EX_0^2<\infty$下证明(3.3)存在解。注意到由 $a(x),b(x)$满足 Lip 条件，我们可推出对任何X应有：

$$a(X_s)^2\leqslant 2K^2X_s^2+2a(0)^2,$$
$$b(X_s)^2\leqslant 2K^2X_s^2+2b(0)^2.$$

我们用逐次逼近法构造解．令

$$X_t^{(0)} = X_0,$$

$$X_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t a(X_s^{(n)})\mathrm{d}M_s + \int_0^t b(X_s^{(n)})\mathrm{d}A_s. \quad (3.11)$$

于是当 $t \leqslant T$ 时由(3.8)我们得到

$$\begin{aligned} E(X_t^{(n+1)})^2 &\leqslant 3\left[EX_0^2 + E\int_0^t a^2(X_s^{(n)})\mathrm{d}\langle M\rangle_s \right.\\ &\quad \left. + E\left(A_t\int_0^t b^2(X_s^{(n)})\mathrm{d}A_s\right)\right] \\ &\leqslant 3\left[EX_0^2 + E\int_0^t [2K^2X_s^{(n)} + 2a(0)^2]\mathrm{d}s \right.\\ &\quad \left. + E\left(t\int_0^t [2K^2X_s^{(n)} + 2b(0)^2]\mathrm{d}s\right)\right] \\ &= 3(EX_0^2 + 2a(0)^2T + 2b(0)^2T^2) \\ &\quad + 2K^2(1+T)\int_0^t E(X_s^{(n)})^2\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由归纳法可得

$$\begin{aligned} E(X_t^{(n)})^2 &\leqslant 3(EX_0^2 + 2a(0)^2T + 2b(0)^2T^2)\mathrm{e}^{2K^2(1+T)} \\ &\quad + [2K^2(1+T)]^n EX_0^2 \cdot \frac{t^n}{n!} < \infty. \end{aligned}$$

类似地，用 $a(x), b(x)$ 的 Lip 性质及(3.8)，我们还有

$$\begin{aligned} &E(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)})^2 \\ &\quad\leqslant 2\left[E\int_0^t (a(X_s^{(n)}) - a(X_s^{(n-1)}))^2\mathrm{d}\langle M\rangle_s \right.\\ &\quad\quad \left. + E\left(A_t\int_0^t (b(X_s^{(n)}) - b(X_s^{(n-1)}))^2\mathrm{d}A_s\right)\right] \\ &\quad\leqslant 2K^2(1+T)\int_0^t E(X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)})^2\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

但是当 $t\leqslant T$ 时

$$E(X_t^{(1)}-X_t^{(0)})^2$$

$$\leqslant 2\left[E\int_0^t a(X_0)^2\mathrm{d}\langle M_s\rangle+E\left(A_t\int_0^t b(X_0)^2\mathrm{d}A_s\right)\right]$$

$$\leqslant 2\left[E\int_0^t(2K^2X_0^2+2a(0)^2)\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.+TE\int_0^t(2K^2X_0^2+2b(0)^2)\mathrm{d}s\right]$$

$$\leqslant(4a(0)^2T+4b(0)^2T^2)+4K^2(1+T)\int_0^t EX_0^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C_T\quad（常数 C_T 只与 T 有关）。$$

因此，由迭代可得：在 $t\leqslant T$ 时

$$E|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|^2\leqslant C_T\frac{[2K^2(1+T)t]^n}{n!}.$$

利用下鞅的 Doob 不等式及与上面类似的推导，我们有

$$E(\sup_{[0,T]}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|^2)$$

$$\leqslant 2E\left\{\sup_{[0,T]}\left[\int_0^T(a(X_s^{(n)})-a(X_s^{(n-1)}))\mathrm{d}M_s\right]^2\right\}$$

$$+2E\left\{\sup_{[0,T]}\left[A_T\int_0^t(b(X_s^{(n)})-b(X_s^{(n-1)}))^2\mathrm{d}A_s\right]\right\}$$

$$\leqslant 8E\int_0^t(a(X_s^{(n)})-a(X_s^{(n-1)}))^2\mathrm{d}\langle M\rangle_s$$

$$+2TE\int_0^T(b(X_s^{(n)})-b(X_s^{(n-1)}))^2\mathrm{d}A_s$$

$$\leqslant 8K^2(1+T)\int_0^T E|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant 8K^2(1+T)\int_0^T C_T\frac{[2K^2(1+T)t]^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t$$

$$= 4C_T \frac{(2K^2(1+T)T)^n}{n!}.$$

再由 Chebyshev 不等式推出

$$P\left(\sup_{[0,T]}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{2^n}\right) \leqslant 4^n E(\sup_{[0,T]}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2)$$

$$\leqslant 4C_T \frac{[8K^2(1+T)T]^n}{n!}.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sup_{[0,T]}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{2^n}\right) < \infty.$$

根据 Borel-Cantelli 引理，我们可知在$[0,T]$上 $X_t^{(n)}$概率为 1 地一致收敛。记这个极限为 X_t（在极限不存在的 ω 上 $X_t(\omega)$ 定义为 0）。显然 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$有定义而且是连续的$(\mathscr{F}_t)$适应过程。在(3.11)两边令$n\to\infty$，因为有

$$a(X_t^{(n)}) \to a(X_t) \quad (\mathscr{L}_2^{loc}(\langle M\rangle)),$$

$$b(X_t^{(n)}) \to b(X_t) \quad (\mathscr{L}_1^{loc}(A)).$$

我们得证X是(3.3)的一个解。唯一性的证明同下面第三步。

第二步。取消关于 $EX_0^2<\infty$的限制，令

$$X_0^{(n)} = \left(1 \wedge \frac{n}{|X_0|}\right) X_0.$$

于是(3.3)在初值 $X_0^{(n)}$下存在唯一解 $X^{(n)}$。记

$$\tau_n = \inf\{t: |X_t^{(n)}| \geqslant n\},$$

$$\tau'_n = \inf\{t: |X_t^{(n+1)}| \geqslant n\}.$$

它们都是$(\mathscr{F}_t)$停时，由于 $I_{|X_0|\leqslant n} X_0^{(n+1)} = I_{|X_0|\leqslant n} X_0^{(n)}$，所以

$$(X_{t\wedge\tau_n\wedge\tau'_n}^{(n+1)} - X_{t\wedge\tau_n\wedge\tau'_n}^{(n)}) I_{|X_0|\leqslant n}$$

$$= I_{|X_0|\leqslant n}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau'_n} [a(X_{s\wedge\tau_n\wedge\tau'_n}^{(n+1)}) - a(X_{s\wedge\tau_n\wedge\tau'_n}^{(n)})] \mathrm{d}M_s$$

$$+ I_{|X_0|\leqslant n}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau'_n} [b(X_{s\wedge\tau_n\wedge\tau'_n}^{(n+1)})$$

$$-b(X^{(n)}_{s\wedge\tau_n\wedge\tau'_n})]\mathrm{d}A_s.$$

于是与第一步中类似，当 $t\leqslant T$ 时有

$$E|(X^{(n+1)}_{t\wedge\tau_n\wedge\tau'_n}-X^{(n)}_{t\wedge\tau_n\wedge\tau'_n})I_{|X_0|\leqslant n}|^2$$

$$\leqslant 2K^2(1+T)\int_0^t E|(X^{(n+1)}_{s\wedge\tau_n\wedge\tau'_n}-X^{(n)}_{s\wedge\tau_n\wedge\tau'_n})I_{|X_0|\leqslant n}|^2\mathrm{d}s.$$

再由引理 3.3 便得

$$X^{(n+1)}_{t\wedge\tau_n\wedge\tau'_n}I_{|X_0|\leqslant n}=X^{(n)}_{t\wedge\tau_n\wedge\tau'_n}I_{|X_0|\leqslant n}\quad(0\leqslant t\leqslant T)\quad(\text{a.e.d}P).$$

另一方面，$X^{(n+1)},X^{(n)}$ 均有连续轨道，所以在 $|X_0|\leqslant n$ 上应有

$$|X^{(n+1)}_{\tau_n\wedge\tau'_n}|=n=|X^{(n)}_{\tau_n\wedge\tau'_n}|.$$

从而我们必须有

$$P(I_{|X_0|\leqslant n}(\tau_n-\tau'_n)=0)=1,$$

也即

$$I_{|X_0|\leqslant n}X^{(n+1)}_{t\wedge\tau_n}=I_{|X_0|\leqslant n}X^{(n)}_{t\wedge\tau_n}\quad(\text{a.e.d}P).$$

也就是说 $X^{(n+1)}$是在$(X^{(n)}_t)_{0\leqslant t\leqslant\tau_n}I_{|X_0|\leqslant n}$ 上接上一段新的。令ζ为 τ_n当 $n\to\infty$时的递增极限。定义

$$X_t=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\left\{\substack{n-1<|X_0|\leqslant n\\ \tau_{n-1}<t\leqslant\tau_n}\right\}}X^{(n)}_t\quad(0\leqslant t<\zeta).$$

最后我们来证明 $P(\zeta=\infty)=1$。由于 $P(\zeta\leqslant T)\leqslant P(\tau_n\leqslant T)$，所以我们只需证明：对 $\forall T>0$，有

$$P(\tau_n\leqslant T)\to 0\quad(n\to\infty).$$

记

$$f_n(t)=E\left[\frac{(X^{(n)}_t)^2}{1+X_0^2}\right]\qquad(E(X^{(n)}_t)^2<\infty).$$

我们有

$$f_n(t)\leqslant 3+3E\int_0^t\frac{a^2(X^{(n)}_s)}{1+X_0^2}\mathrm{d}\langle M\rangle_s$$

$$+3E\left(\int_0^t\frac{b(X^{(n)}_s)}{\sqrt{1+X_0^2}}\mathrm{d}A_s\right)^2$$

$$\leqslant 3+3E\int_0^t \frac{a^2(X_s^{(n)})+tb^2(X_s^{(n)})}{1+X_0^2}\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant 3+6E\int_0^t \frac{K^2(1+t)(X_s^{(n)})^2+a^2(0)+tb^2(0)}{1+X_0^2}\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C_1+C_2\int_0^t f_n(s)\,\mathrm{d}s.$$

应用引理3.3，我们得到

$$f_n(t)\leqslant C_1\mathrm{e}^{C_2 t}.$$

因此在 $0\leqslant t\leqslant T$ 时 $f_n(t)$ 一致有界：$f_n(t)\leqslant C_1\mathrm{e}^{C_2 T}\equiv C'$. 再用 Doob 不等式及(3.8)推得

$$E\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{(X_t^{(n)})^2}{1+X_0^2}\right)$$

$$\leqslant 3E\left[\frac{(X_0^{(n)})^2}{1+X_0^2}\right]+3E\left[\frac{\left(\sup\limits_{[0,T]}\int_0^t a(X_s^{(n)})\mathrm{d}M_s\right)^2}{1+X_0^2}\right]$$

$$+3E\left[\frac{\left(\sup\limits_{[0,T]}\int_0^t b(X_s^{(n)})\mathrm{d}A_s\right)^2}{1+X_0^2}\right]$$

$$\leqslant 3+12E\int_0^T\frac{a^2(X_s^{(n)})}{1+X_0^2}\mathrm{d}\langle M\rangle_s$$

$$+3TE\int_0^T\frac{b^2(X_s^{(n)})}{1+X_0^2}\mathrm{d}A_s$$

$$\leqslant 3+2(12+3T)\left[\int_0^T K^2 f_n(s)\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.+(a^2(0)+b^2(0))\int_0^T\mathrm{d}s\right]$$

$\leqslant$ 常数 C.

于是由 Chebyshev 不等式，我们有

$$P(\tau_n\leqslant T)=P(\sup_{[0,T]}|X_t^{(n)}|\geqslant n)$$

$$= P\left(\frac{\sup\limits_{[0,T]}|X_t^{(n)}|^2}{1+X_0^2} \geqslant \frac{n^2}{1+X_0^2}\right)$$

$$\leqslant P\left(\frac{1}{1+X_0^2} \leqslant \delta\right) + P\left(\frac{\sup\limits_{[0,T]}|X_t^{(n)}|^2}{1+X_0^2} \geqslant n^2\delta\right)$$

$$\leqslant P\left(\frac{1}{1+X_0^2} \leqslant \delta\right) + \frac{C}{n^2\delta}.$$

因此 $P(\tau_n \leqslant T) \to 0 (n \to \infty)$。

既然 $\zeta = \infty$(a.e.dP)，那么 X_t 在$[0,\infty)$有定义。易见它是(3.3)的解。

第三步．证明解的唯一性．设 $X^{(1)}, X^{(2)}$ 为(3.3)的具有相同初值的两个解。仿第一步可以证明

$$E|X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^2 \leqslant 常数\int_0^t E|X_s^{(1)} - X_s^{(2)}|^2 ds.$$

于是 $E|X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^2 < \infty$。由引理3.3立得 $E|X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^2 = 0$。由此推出

$$P(\forall t, X_t^{(1)} = X_t^{(2)}) = 1.$$

注1　系数还可以显含 t．也就是当 $a(x), b(x)$ 改为 $a(t,x)$，$b(t,x)$时，如果假定

1° $a(t,x), b(t,x)$二元可测，且对 t 局部一致地满足对 x 的 Lip 条件：$\forall T > 0$，当 $t \leqslant T$ 时

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leqslant K_T|x-y|;$$

2° $a(t,0), b(t,0)$ 对 $t \leqslant T$ 有界，那么相应于定理3.1的结论仍然成立。

（证明相仿．）

注2　系数还可以是因果函数 $\alpha(t,w), \beta(t,w)$。我们有：

定理3.1′　若$(\mathscr{F}_t)$右连续完备，Y 为连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅，f 为因果函数，满足 Lipschitz 条件：

$$|f(t,w)-f(t,w')|\leqslant K\sup_{s\leqslant t}|w_s-w'_s| \qquad (\forall t\geqslant 0),$$

及对于 $\forall t$ 及某个 $y\in R$ 有

$$E\left[\sup_{s\leqslant t}\left(\int_0^t f(u,y)\mathrm{d}u\right)^2\right]<\infty,$$

则

$$X_t=x+\int_0^t f(s,X)\mathrm{d}Y_s$$

存在唯一解，且为$(\mathscr{F}_t^Y)$适应的。

证明 设Y的分解为$M+A$。考虑对于作用在某些连续$(\mathscr{F}_t^Y)$适应过程U上的以下算子：

$$(TU)_\cdot=x+\int_0^\cdot f(s,U)\mathrm{d}Y_s,$$

并定义

$$\rho_t(U,V)=E[\sup_{s\leqslant t}|U_s-V_s|]^2.$$

我们由 Doob 不等式有

$$\rho_t(TU,TV)\leqslant 2E\left(\left[\sup_{s\leqslant t}\int_0^s(f(u,U)-f(u,V))\mathrm{d}M_u\right)^2\right.$$

$$\left.+\sup_{s\leqslant t}\left(\int_0^s(f(u,U)-f(v,V))|\mathrm{d}A|_u\right)^2\right]$$

$$\leqslant 8E\left(\int_0^t(f(u,U)-f(u,V))^2\mathrm{d}\langle M\rangle_u\right)$$

$$+2E\left[\left(\int_0^t|\mathrm{d}A|_u\right)\cdot\left(\int_0^t|f(u,U)-f(u,V)|^2|\mathrm{d}A|_u\right)\right]$$

$$\leqslant 2K^2(4+t)E\int_0^t\sup_{s\leqslant u}|U_s-V_s|^2\mathrm{d}u$$

$$\leqslant 2K^2(4+t)\int_0^t\rho_u(U,V)\mathrm{d}u,$$

这里我们用了引理3.2，即不妨假定

$$d\langle M\rangle_t, \quad |dA|_t \leqslant dt.$$

定义逐次逼近列：

$$X^{(0)}=x, \qquad X^{(n+1)}=TX^{(n)}.$$

取 $T_0\geqslant 0$，令 $C=2K^2(4+T_0)$。由定理假定可推出 $\rho_T(X^{(1)},X^{(0)})<\infty$。记它为 a。利用上面关于 ρ_t 的微分不等式，我们得到

$$\rho_t(X^{(n)},X^{(n-1)})\leqslant a\frac{(CT_0)^n}{n!} \qquad (\forall n, \forall t\leqslant T_0).$$

于是

$$\sum_n E(\sup_{s\leqslant t}|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}|^2)<\infty.$$

令

$$A=\left\{\sum_n \sup_{s\leqslant t}|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}|=\infty\right\},$$

则 $P(A)=0$。所以 $X_t^{(n)}$ 在 $(\forall T_0)t\leqslant T_0$ 上一致收敛于某个连续过程。又由于每个 $X^{(n)}\in\mathscr{F}_t^Y$，就有 $X\in\mathscr{F}_t^Y$。此外，由Fatou 引理推出

$$E(\sup_{s\leqslant t}|X_s^{(n)}-X_s|^2)\to 0 \qquad (\forall t\geqslant 0).$$

这样再利用 f 的 Lipschitz 性可得到

$$f(s,X^{(n)})\xrightarrow{\mathscr{S}_2}f(s,X).$$

从而可在 $X_t^{(n+1)}=x+\int_0^t f(s,X^{(n)})dY_s$ 中积分号下取极限，$n\to\infty$，我们得到的 X 确实是解。

验证唯一性。如果有两个解 X,X'，令

$$\tau_n=\inf\{t: |X_t|\vee|X'_t|\geqslant n\}.$$

记

$$\tilde{T}U=(TU)^{\tau_n}.$$

另一方面，还是由 f 的 Lipschitz 性易见

$$f(s, X^{\tau_n}) = f(s, X) \quad (s \leqslant \tau_n),$$

因此我们有

$$\tilde{T}X^{\tau_n} = X^{\tau_n}, \quad \tilde{T}Y^{\tau_n} = Y^{\tau_n}.$$

于是对于 $t \leqslant T_0$ 有

$$\rho_t(X^{\tau_n}, Y^{\tau_n}) = \rho_t(\tilde{T}X^{\tau_n}, \tilde{T}Y^{\tau_n})$$

$$\leqslant 常数 \cdot \int_0^t \rho_s(X^{\tau_n}, Y^{\tau_n}) \mathrm{d}s.$$

由 $\rho_t(X^{\tau_n}, Y^{\tau_n}) < \infty$，用 Gronwall 不等式便得

$$\rho_\cdot(X^{\tau_n}, Y^{\tau_n}) = 0.$$

从而

$$X_t = Y_t \quad (t \leqslant \tau_n \wedge T_0).$$

令 $n \to \infty$，由 T_0的任意性就得到 $X = Y$.

注 多维情形也有定理3.1′，证明完全相仿。

定义3.4 设 ζ 是$(\mathscr{F}_t)$停时，$X = (X_t)_{t<\zeta}$称为是方程(3.3)的一个以 X_0为初值，以 ζ 为爆炸时间的局部解，如果

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s) \mathrm{d}M_s + \int_0^t b(X_s) \mathrm{d}A_s \tag{3.12}$$

对于 $t < \zeta$ 恒成立，其中

$$\int_0^t a(X_s) \mathrm{d}M_s = \int_0^t a(X_s) I_{[0, \tau_n]}(s) \mathrm{d}M_s \quad (t \leqslant \tau_n 时),$$

而 τ_n定义如前，而且(X_t)在$(\zeta - \varepsilon, \zeta)$上 a.e.d$P$地无界。

对比地，按定义 3.1 的解也可以称为整体解。显然，局部解是整体解当且仅当 $\tau_n \to \infty$(a.e.dP) (即 $P(\zeta = \infty) = 1$)。

定理3.2 若 $a(x), b(x)$ 满足局部 Lipschitz 条件：对任意 n 存在 K_n，使对 $\forall x, y \in R^1$ 有

$$(|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)|) I_{\{|x| \leqslant n, |y| \leqslant n\}} \leqslant K_n |x - y| \tag{3.13}$$

(记成 $a, b \in \mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$)，那么方程(3.3)存在唯一的局部解$(X_t)_{t<\zeta}$.

如果 $a(x), b(x)$ 还满足线性增长条件

$$|a(x)|+|b(x)|\leqslant C(1+|x|), \tag{3.14}$$

那么这个局部解必是整体解。

证明 我们仍不妨假定(3.8)成立。我们定义

$$a_n(x)=a\left(\left(1\wedge\frac{n}{|x|}\right)x\right),\quad b_n(x)=b\left(\left(1\wedge\frac{n}{|x|}\right)x\right),$$

那么 $a_n, b_n\in \mathrm{Lip}$。因此由定理3.1存在连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程 $X^{(n)}$，使

$$X_t^{(n)}=X_0+\int_0^t a_n(X_s^{(n)})\mathrm{d}M_s$$

$$+\int_0^t b_n(X_s^{(n)})\mathrm{d}A_s \quad (\mathrm{a.e.d}P).$$

与定理3.1证明中的第二步类似地定义 τ_n, τ'_n，并可以证明

$$X_{t\wedge\tau_n}^{(n+1)}=X_{t\wedge\tau_n}^{(n)} \quad (\mathrm{a.e.d}P).$$

同样地定义

$$\zeta=\lim_{n\to\infty}\tau_n,\quad X_t=X_t^{(n)} \quad (t\leqslant\tau_n,\ \forall n),$$

于是 $(X_t)_{t<\zeta}$ 是(3.3)的局部解。

在线性增长条件(3.14)下，也与定理3.1证明中第二步类似地可证 $P(\zeta=\infty)=1$。定理证毕。

注 系数也可以显含 t，此时条件要改成：

① $a(t,x), b(t,x)$ 二元可测，且对任意 T，n 当 $t\leqslant T$ 时有

$$(|a(t,x)-a(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)|)I_{(|x|\leqslant n,|y|\leqslant n)}$$
$$\leqslant K_{n,T}|x-y|;$$

② 对任意 $t\leqslant T$ 存在 C_T 使

$$|a(t,x)|+|b(x,x)|\leqslant C_T(1+|x|). \tag{3.14'}$$

对应于定理3.2的关于整体解的结论仍成立(证明完全类似)。

定理3.1′也可以局部化，系数也可以是因果函数 $\alpha(t,w)$，$\beta(t,w)$。我们有：如果

① 对 $\forall T$ 及 $\forall n$，存在常数 $K_{1,T}^{(n)}$，$K_{2,T}^{(n)}$ 及单调有界函数 $F_T(s)$，对 $t \leqslant T$ 及 $\forall w^{(1)}$，$w^{(2)} \in C[0, \infty)$，只要 $\| w^{(1)} \|_{C[0,T]} \leqslant n$，$\| w^{(2)} \|_{C[0,T]} \leqslant n$，就恒有

$$|\alpha(t,w^{(1)}) - \alpha(t,w^{(2)})|^2 + |\beta(t,w^{(1)}) - \beta(t,w^{(2)})|^2$$

$$\leqslant K_{1,T}^{(n)} \int_0^t |w_s^{(1)} - w_s^{(2)}|^2 \mathrm{d}F_T(s) + K_{2,T}^{(n)} |w_t^{(1)} - w_t^{(2)}|^2;$$

② 对 $\forall T > 0$，存在 $K_{1,T}, K_{2,T}$，使对于 $\forall w \in C[0,\infty)$，有

$$\alpha^2(t,w) + \beta^2(t,w)$$

$$\leqslant K_{1,T} \int_0^t (1 + w_s^2) \mathrm{d}F_T(s) + K_{2,T}(1 + w_t^2) \quad (t \leqslant T);$$

那么方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s,X) \mathrm{d}M_s + \int_0^t \beta(s,X) \mathrm{d}A_s \quad (\text{a.e.}\ \mathrm{d}P)$$

存在唯一的整体解 X。

（证明完全类似。）

定理3.2′ 对于连续半鞅 Y 的 Stratonovich 型方程

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t) \circ \mathrm{d}Y_t$$

及任意初值 $X_0 \in \mathscr{F}_0$，我们有：

如果 $\sigma^{ij}(x) \in C_b^2(R^d)(i \leqslant d, j \leqslant r)$，则存在唯一整体解。

如果 $\sigma^{ij}(x) \in C^2(R^d)(i \leqslant d, j \leqslant r)$，则存在唯一局部解。

当 $\sigma^{ij}(x)$ 还满足线性增长条件时，这个局部解就是整体解。

证明 化为 Ito 方程，再利用定理3.1与定理3.2。

§3.2 简单的例子

例1（连续半鞅的指数半鞅的级数表示） 设 X 是零初值连续 $(\mathscr{F}_t)$ 半鞅，Y 是它的指数半鞅：

$$Y = e^{X-\frac{1}{2}X}.$$

由于 Y 是方程

$$dY = Y dX, \qquad Y_0 = 1$$

的唯一解，它就可以由§3.1中的迭代过程得到. 因此 Y 就能表成这个迭代过程所得到的级数

$$Y = \sum_0^\infty Z^{(n)},$$

其中

$$Z^{(0)} = 1, \qquad Z_t^{(n)} = \int_0^t dX_{t_1}\int_0^{t_1} dX_{t_2}\cdots\int_0^{t_{n-1}} dX_{t_n}.$$

我们引入一个实参数 λ，并定义一族过程

$$Y(\lambda) = \exp\left[\lambda X - \frac{\lambda^2}{2}\langle X\rangle\right] = \sum_0^\infty \lambda^n H_n(\langle X\rangle, X),$$

其中 $H_n(t,x)$是 n 阶 Hermite 多项式.

同样 $Y(\lambda)$可表成迭代过程求解所得的级数:

$$Y(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n Z^{(n)}.$$

比较系数，我们就得到,

$$\int_0^t dX_{t_1}\int_0^{t_1} dX_{t_2}\cdots\int_0^{t_{n-1}} dX_{t_n} = H_n(\langle X\rangle, X).$$

如果我们回忆普通单调函数 $F(t)$的累次积分的公式

$$\int_0^t dF(t_1)\int_0^{t_1} dF(t_2)\cdots\int_0^{t_{n-1}} dF(t_n) = \frac{F(t)^n}{n!},$$

及上面的事实：常数1对于半鞅 X 的 n 重 Ito 积分是 $H_n(\langle X\rangle, X)$,我们就能发现 $H_n(\langle X\rangle, X)$是 $\frac{F(t)^n}{n!}$的自然推广.

例2(一维线性随机微分方程) 设 $M\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$，$A$ 是连续的有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为常数。求解

$$\mathrm{d}X_t=(\alpha X_t+\beta)\mathrm{d}M_t+(rX_t+\delta)\mathrm{d}A_t.$$

解 首先，我们要把它化成 Stratonovich 型随机微分方程：

$$\mathrm{d}X=\alpha X\circ\mathrm{d}M-\frac{1}{2}\mathrm{d}(\alpha X)\mathrm{d}M+\beta\mathrm{d}M+rX\mathrm{d}A+\delta\mathrm{d}A$$

$$=X\circ\left(\alpha\mathrm{d}M+r\mathrm{d}A-\frac{\alpha^2}{2}\mathrm{d}\langle M\rangle\right)$$

$$+\left(\beta\mathrm{d}M-\frac{\alpha\beta}{2}\mathrm{d}\langle M\rangle+\delta\mathrm{d}A\right)$$

$$\overset{\text{记}}{=}X\circ\mathrm{d}Y+\mathrm{d}Z,$$

其中 Y,Z 为已知的$(\mathscr{F}_t)$连续半鞅。

我们定义连续半鞅 $\tilde{Y}$，使

$$\mathrm{d}Y=-\tilde{Y}^{-1}\circ\mathrm{d}\tilde{Y}.$$

为了确定 $\tilde{Y}$，我们只须解一个与之等价的方程

$$\mathrm{d}\tilde{Y}=\tilde{Y}\circ\mathrm{d}(-Y).$$

为此我们可取，例如，$\tilde{Y}=\mathrm{e}^{-Y}$。这样，我们有

$$\mathrm{d}X=-X\circ\tilde{Y}^{-1}\circ\mathrm{d}\tilde{Y}+\mathrm{d}Z$$

$$=-\tilde{Y}^{-1}(X\circ\mathrm{d}\tilde{Y})+\mathrm{d}Z.$$

我们在上面的等式的两边均"∘"乘以 $\tilde{Y}$ 便得到

$$\tilde{Y}\circ\mathrm{d}X+X\circ\mathrm{d}\tilde{Y}=\tilde{Y}\circ\mathrm{d}Z.$$

也就是

$$\mathrm{d}(\tilde{Y}X)=\tilde{Y}\circ\mathrm{d}Z.$$

因为 $\tilde{Y}_0=\mathrm{e}^{-Y_0}=\mathrm{e}^0=1$，所以对于 X 的给定初值 X_0 而言

$$(\tilde{Y}X)_t=X_0+\int_0^t\tilde{Y}\circ\mathrm{d}Z.$$

即

$$X_t = e^{Y_t}\left(X_0 + \int_0^t e^{-Y_s} \circ dZ_s\right).$$

例3(一类特殊的线性方程) 设 σ, b 分别为 $d\times r$, $d\times d$ 常矩阵, Y 为 r 维连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅, A 为一维有限变差$(\mathscr{F}_t)$适应过程. 求解方程

$$dX_t = \sigma dY_t + bX_t dA_t.$$

解 两边"$\circ$"乘以 e^{-bA_t}, 我们就能得到

$$d(e^{-bA_t}X_t) = e^{-bA_t}\circ(\sigma dY).$$

于是

$$X_t = e^{bA_t}\left(X_0 + \int_0^t e^{-bA_s}\circ \sigma dY_s\right).$$

特别, 如果 Y 是$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B, $A_t = t$, 而且矩阵 b 的特征值均有负实部, 那么对应的解 X 称为 Ornstein-Ulenbeck 过程. 严格地说,我们只应该在解 X 恰是平稳过程时才称它为 Ornstein-Ulenbeck 过程. 为了使解 X 是平稳过程, 初值 X_0 不能任意选取. 我们将看到 X_0 的分布必须由方程的系数唯一确定.

现在我们来讨论这个方程的平稳解. 为了计算方便, 我们先假定 Brown 运动 B 是定义在 $-\infty < t < \infty$ 上的, 且 $B_0 = 0$ (例如说把两个独立的 Brown 运动在 $t = 0$ 处按正反两个方向接起来). 在 $-\infty < t < \infty$ 考虑方程

$$dX_t = \sigma dB_t + bX_t dt.$$

下面是 Doob 定义的 B.的 Fourier 变换: 对实数 $\mu < \lambda$, 定义

$$\hat{B}_\lambda - \hat{B}_\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is\lambda} - e^{-is\mu}}{-is}\, dB_s,$$

那么 $\hat{B}_\lambda$ 也是 $-\infty < \lambda < \infty$ 上 Brown 运动. 如果 X 是平稳过程且是方程的解, 就应该对 $\forall f(t) \in$ Schwarz 空间 $\mathfrak{S}(R^1)$有

$$\int f(t) dX_t = \int f(t)\sigma dB_t + \int f(t) bX_t dt.$$

但是 X_t 是平稳过程，它应有谱表示

$$X_t=\int e^{it\lambda}\,dZ_\lambda.$$

同时我们还有 $\int f(t)dX_t=-\int f'(t)X_t dt$，因此我们得到

$$\int(i\lambda-b)\hat{f}(\lambda)dZ_\lambda=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\hat{f}(\lambda)d\hat{B}_\lambda, \tag{E_1}$$

其中

$$\hat{f}(\lambda)=\int f(t)e^{it\lambda}\,dt\in\mathfrak{S}(R^1).$$

令 $\hat{g}(\lambda)=\hat{f}(\lambda)e^{-it\lambda}$，那么 $\hat{g}(\lambda)\in\mathfrak{S}(R^1)$，而且

$$\int e^{it\lambda}\,\hat{g}(\lambda)(i\lambda-b)dZ_\lambda=\int e^{it\lambda}\,\hat{g}(\lambda)\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}d\hat{B}_\lambda.$$

把 t 改成 $t-s$ 后所得的等式的两边与上式两边分别相乘，再取期望，我们得到

$$\int e^{is\lambda}\,|\hat{g}(\lambda)|^2(i\lambda-b)dF_\lambda(i\lambda+b)^*$$

$$=\int e^{is\lambda}\,|\hat{g}(\lambda)|^2\frac{\sigma\sigma^T}{2\pi}\,d\lambda,$$

其中 F_λ 是 Z_λ 的谱函数矩阵：$F_\lambda=E(Z_\lambda Z_\lambda^*)$。

这样我们有

$$\int^\lambda|\hat{g}(\lambda)|^2(i\lambda-b)dF_\lambda(i\lambda+b)^*$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int^\lambda|\hat{g}(\lambda)|^2\sigma\sigma^T d\lambda,$$

而且 $\vartheta(\lambda)$ 可以在 $\mathfrak{S}(R^1)$ 中任取。我们取 $\vartheta(\lambda)$ 为 $\mathfrak{S}(R^1)$ 中实函数同时使它近似 $I_{[0,\lambda]}$，就得到

$$\int_0^\lambda (\mathrm{i}\lambda-b)\mathrm{d}F_\lambda(\mathrm{i}\lambda-b)^*=\frac{1}{2\pi}\int_0^\lambda \sigma\sigma^T\mathrm{d}\lambda=\frac{\sigma\sigma^T}{2\pi}\cdot\lambda.$$

因此 $\int_0^\lambda(\mathrm{i}\lambda-b)\mathrm{d}Z_\lambda$ 有意义，并且由 (E_1) 得到

$$\int_0^\lambda(\mathrm{i}\lambda-b)\mathrm{d}Z_\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\lambda\sigma\mathrm{d}\hat{B}_\lambda.$$

也就是

$$Z_\lambda=\int_0^\lambda(\mathrm{i}\lambda-b)^{-1}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}\hat{B}_\lambda.$$

从而 X 可以写成

$$\begin{aligned}X_t&=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}(\mathrm{i}\lambda-b)^{-1}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}\hat{B}_\lambda\\&=\frac{1}{2\pi}\int\left(\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\lambda}(\mathrm{i}\lambda-b)^{-1}\sigma\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}B_s\\&=\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{b(t-s)}\sigma\mathrm{d}B_s.\end{aligned}$$

此时其相关矩阵为

$$\begin{aligned}R(t)&\equiv E(X_0X_t^T)\\&=\left(\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{-bs}\sigma\sigma^T\mathrm{e}^{-b^Ts}\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{b^Tt}\\&=R(0)\mathrm{e}^{b^Tt}.\end{aligned}$$

它满足

$$\begin{aligned}R(-t)&=E(X_tX_0^T)\\&=\mathrm{e}^{bt}\left(\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{-bs}\sigma\sigma^T\mathrm{e}^{-b^Ts}\mathrm{d}s\right)\\&=\mathrm{e}^{bt}R(0)=R(t)^T.\end{aligned}$$

以上讨论正好说明为了使解 $X_t(t\geqslant 0)$是平稳过程必须且只需取

$$X_0=\int_{-\infty}^{0}e^{-bs}\sigma dB_s,$$

而$(B_s)_{s<0}$ 是一个与$(B_t)_{t\geq 0}$ 独立的零初值 Brown 运动。这时候

$$X_0\sim\mathscr{N}(0,R(0)).$$

$R(0)$也可以表示成

$$R(0)=\frac{1}{2\pi}\int(i\lambda-b)^{-1}\sigma\sigma^T(i\lambda-b)^{-1}d\lambda.$$

易证平稳 Gauss 过程 X 满足 $R(-t)=R(t)$ 等价于 X 在下述意义下“可逆”：对于任意 $t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}$，恒有

$$(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})\text{ 与 }(X_{t_0+t_{n+1}-t_1},\cdots,X_{t_0+t_{n+1}-t_n})$$

同分布。这个条件在 $b=cI$ （c 为常数)或 $\sigma=I$ 而 b 为对角矩阵时是成立的。

特别，对于有随机干扰的力学系统

$$\begin{cases}\dot{q}=p,\\ dp=(-Cq-\beta p)dt+dB_t,\end{cases}$$

其中 p,q 均为 d 维函数，C 为 $d\times d$ 常矩阵，$\det C\neq 0$，β 为正常数，我们有

$$b=\begin{pmatrix}0 & I\\ -C & -\beta I\end{pmatrix},\quad\sigma=\begin{pmatrix}0 & \\ & I\end{pmatrix}.$$

这时 b 的特征方程可化成

$$\det[\lambda(\lambda+\beta)I+C]=0.$$

在求这个行列式时，C 可以用它的 Jordan 标准形代替。于是这个行列式是如下两种项的乘积：

$$\lambda(\lambda+\beta)+\delta_i\quad(\delta_i\text{ 是 }C\text{ 的实特征值}),$$

$$[\lambda(\lambda+\beta)]^2+r_j\quad(r_j\text{ 是 }C\text{ 的复特征值的模的平方}).$$

$\lambda(\lambda+\beta)+\delta_i$ 的零点显然有负实部 $-\beta/2$。而多项式

$$[\lambda(\lambda+\beta)]^2+r_j=\lambda^4+2\beta\lambda^3+\beta^2\lambda^2+r_j$$

所对应的“Hürwitz 表”

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
2\beta & 0 & & & \\
1 & \beta^2 & r_j & & \\
 & 2\beta & 0 & & \\
 & 1 & \beta^2 & r_j & \\
 & & 2\beta & 0 & \\
 & & 1 & \beta^2 & r_j \\
 & & & & \cdots\cdots
\end{array}\right\}$$

的第3个主子式为负，因此由 Hurwitz 定理知道$[\lambda(\lambda+\beta)]^2+r_j$零点的实部不可能全为负。另一方面我们直接可以看出它也不可能有纯虚零点，所以我们得到 b 的特征值均有负实部，当且仅当 C 无复的特征根。易见当 C 只有实特征根时

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}C & I \end{pmatrix}(\mathrm{i}\lambda-b)\begin{pmatrix} I & \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda I & -1 \\ C & (\mathrm{i}\lambda+\beta)I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}C+(\mathrm{i}\lambda+\beta)I \end{pmatrix}.$$

所以

$$(\mathrm{i}\lambda - b)^{-1} = \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}I & 0 \\ 0 & \left[\frac{C}{\mathrm{i}\lambda} + (\mathrm{i}\lambda + \beta)I\right]^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}C & I \end{pmatrix}.$$

从而

$$(\mathrm{i}\lambda - b)^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\left[\frac{C}{\mathrm{i}\lambda} + (\mathrm{i}\lambda + \beta)I\right]^{-1} \\ 0 & \left[\frac{C}{\mathrm{i}\lambda} + (\mathrm{i}\lambda + \beta)I\right]^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (C - \lambda^2 I + \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1} \\ 0 & \mathrm{i}\lambda(C - \lambda^2 I + \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1} \end{pmatrix}.$$

因此

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int\begin{pmatrix} (C - \lambda^2 I + \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1}(C^T - \lambda^2 I - \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1} & -\mathrm{i}\lambda(C - \lambda^2 I + \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1}(C^T - \lambda^2 I - \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1} \\ \mathrm{i}\lambda(C - \lambda^2 I + \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1}(C^T - \lambda^2 I - \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1} & \lambda^2(C - \lambda^2 I + \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1}(C^T - \lambda^2 I - \mathrm{i}\lambda\beta I)^{-1} \end{pmatrix}\mathrm{d}\lambda.$$

现在考察最简单情形：$C = C^T$。这时存在酉矩阵 Q，使

$$C = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^*.$$

注意到

$$\int\frac{\mathrm{d}\lambda}{(\lambda_i - \lambda^2)^2 + \beta^2\lambda^2} = \frac{\pi}{\beta\lambda_i}, \quad \int\frac{\lambda\,\mathrm{d}\lambda}{(\lambda_i - \lambda^2)^2 + \beta^2\lambda^2} = 0,$$

$$\int\frac{\lambda^2\mathrm{d}\lambda}{(\lambda_i - \lambda^2)^2 + \beta^2\lambda^2} = \frac{\pi}{\beta},$$

我们最后得到

$$R(0)=\begin{pmatrix} Q\frac{1}{2\beta}\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_d}\end{pmatrix}Q^* & 0 \\ 0 & Q\frac{1}{2\beta}Q^* \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\beta}\begin{pmatrix}C^{-1} & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}.$$

因此

$$X_0\sim \mathrm{N}\left(0,\frac{1}{2\beta}\begin{pmatrix}C^{-1} & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}\right).$$

反过来，当 C 对称且只有正特征值时，任取一个遵从上述正态分布的 $\mathscr{F}_0$ 随机变量作初值，方程

$$\mathrm{d}X_t=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}\mathrm{d}B_t+\begin{pmatrix}0 & I \\ -C & -\beta I\end{pmatrix}X_t\mathrm{d}t \quad (t\geqslant 0)$$

必有平稳(Gauss)过程作为解 X，其中

$$X_t=\begin{pmatrix}q_t \\ p_t\end{pmatrix}.$$

§3.3 Brown运动的随机微分方程·弱解与分布唯一性

定义3.5 $(\Omega,\mathscr{F},P)$上 d 维连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程 X 及 r 维$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B 组成的对(X,B)称为方程

$$\mathrm{d}X_t=\alpha(t,X)\mathrm{d}B_t+\beta(t,X)\mathrm{d}t \quad (\mathrm{a.e.}\,\mathrm{d}P) \qquad (3.15)$$

(其中 $\alpha(t,w)$, $\beta(t,w)$分别为 $d\times r$, $d\times 1$ 因果函数矩阵)的解，如果

$$\alpha=(\alpha_j^i),\quad \alpha_j^i(X)\in\mathscr{L}_2^{loc},$$

$$\beta=(\beta^i),\quad \beta^i(X)\in\mathscr{L}_1^{loc}\quad(i\leqslant d,j\leqslant r),\tag{3.16}$$

而且对 $i\leqslant d$ 恒有

$$X_t^i=X_0^i+\sum_{j=1}^r\int_0^t\alpha_j^i(s,X)\mathrm{d}B_s^j+\int_0^t\beta^i(s,X)\mathrm{d}s.$$

有时我们也称 X 为初值为 X_0 的相对于 B 的解。

一般地，在(3.15)中我们把 B 当作"参变"的过程并把$(\Omega,\mathscr{F},P)$当作"参变"的空间。即并不预先指定是哪一个$(\Omega,\mathscr{F},P)$及哪一个$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动。所以也称 X 是方程(3.15)的初值为 X_0 的弱解。今后我们约定只要不特别申明，"解"总是指弱解(即存在$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$及$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B 使(X,B)是解)。

定义3.6 如果有二元可测函数 $\sigma(t,x)$，$b(t,x)(x\in R^d)$，使(3.15)中的

$$\alpha(t,w)=\sigma(t,w_t),\qquad \beta(t,w)=b(t,w_t),$$

那么对应的(3.15)称为马氏型的随机微分方程；如果还有

$$\sigma(t,x)=\sigma(x),\quad b(t,x)=b(x),$$

则称为齐次的。

定义3.7 方程(3.15)称为具有轨道唯一性，如果对固定的$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$及固定的$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B 而言，(3.15)的解(X,B)中的 X 恒被初值所唯一确定。也就是：设(X,B)及(X',B)均为解，并且 $X_0=X'_0$(a.e. dP)，那么

$$P(\forall t,X_t=X'_t)=1.$$

例1 设 $M=B$，$A_t=t$。那么定理3.1及定理3.2的条件就是具有轨道唯一性的条件。

定义3.8 方程(3.15)称为具有分布唯一性，如果对任意两个(可以在不同概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，$(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{F}},\bar{P})$，对不同的完备参考族$(\mathscr{F}_t)$，$(\bar{\mathscr{F}}_t)$与$(\mathscr{F}_t)$及$(\bar{\mathscr{F}}_t)$ Brown 运动的)解 X 与 $\bar{X}$，只要

$$P(X_0 \in \Gamma) = \tilde{P}(\tilde{X}_0 \in \Gamma) \quad (\forall \Gamma \in \mathscr{B}(R^d)),$$

就有

$$P(X \in A) = \tilde{P}(\tilde{X} \in A) \quad (\forall A \in \overline{\mathscr{B}}).$$

引理3.4 (Ulam) Polish空间$(U, \mathscr{B}(U))$上任意概率测度P必是“态紧的”(tight)，即存在K_n，使

$$P(K_n) \geqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

证明 由U的可分性，对$\forall m$存在可数个半径小于$1/m$的球$S_{m,1}, S_{m,2}, \cdots$覆盖了U。因此可取$N_m^{(n)}$，使

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{N_m^{(n)}} S_{m,k}\right) > 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^m}.$$

记

$$K_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{N_m^{(n)}} S_{m,k}.$$

因为在m固定时，全体球$S_{m,k}$的中心就构成了K_n的有限$2/m$网，所以K_n是完全有界集，因此它就是完备距离空间U的紧子集。于是

$$\begin{aligned}
P(K_n) &\geqslant P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{N_m^{(n)}} S_{m,k}\right) \\
&= 1 - P\left(U \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{N_m^{(n)}} S_{m,k}\right) \\
&\geqslant 1 - \sum_{m=1}^{\infty} P\left(U \setminus \bigcup_{k=1}^{N_m^{(n)}} S_{m,k}\right) \\
&\geqslant 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^m} = 1 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

引理3.5(正则条件分布存在定理) 设$(U, \mathscr{B}(U), P)$如引理3.4，σ代数$\mathscr{G} \subset \bar{\mathscr{B}}(U)$，且$\mathscr{G} = \bar{\mathscr{G}}$（$P$完备化），那么存在一个“$P$在$\mathscr{G}$给定条件下的正则条件分布”$P(t, A)$。即对于$\forall x \in U$，$A \in \mathscr{B}(U)$满足：

(C_1) x固定时，$P(x, A)$是$\mathscr{B}(U)$上概率测度；

(C_2) A固定时，$P(x, A)$是x的$\mathscr{G}$可测函数；

(C_3) $P(x, A)$是$P(A|\mathscr{G})$的一个代表。

而且$P(t, A)$在下述意义下唯一：如果还有一个$\bar{P}(x, A)$也满足(C_1)-(C_3)，那么存在P零测集$\Lambda_0 \in \mathscr{B}(U)$，使对于$\forall x \bar{\in} \Lambda_0$恒有$P(x, A) = \bar{P}(x, A)$。

证明 由Tychonov嵌入定理可知可分距离空间同胚于某个紧距离空间的一个子集(可参见点集拓扑学的教科书)，于是U在此紧距离空间中的闭包$\bar{U}$是紧距离空间。从而U在这新距离（设为ρ)下是完全有界的。U上的有界一致连续函数全体记成$C^{\circ}(U)$，它与$C(\bar{U})$中的函数是一一对应的，因此$C^{\circ}(U)$是可分的。

取$f_1 = 1$，并取$\{f_n\}$使其线性包$\mathscr{L}$在$C^{\circ}(U)$中稠。取定$E(1|\mathscr{G}) = 1$及一组固定的$E(f_n|\mathscr{G})$。

第一步，证明可选取$\{E(f|\mathscr{G}): f \in \mathscr{L}\}$，使除了$x$的一个零测集外，对任何固定的$x$，$E(f|\mathscr{G})$是$f$的非负有界线性泛函。为此记

$$\Lambda_n = \left\{(r_1, \cdots, r_n): r_i \text{有理}, \quad \text{对} \forall x, \ \sum_{k=1}^{n} r_k f_k(x) \geqslant 0\right\},$$

$$E_{(r_1, \cdots, r_n)} = \left\{x: \ \sum_{k=1}^{n} r_k E(f_k|\mathscr{G}) < 0\right\} \quad ((r_1, \cdots, r_n) \in \Lambda_n),$$

$$\tilde{E}_{(s_1, \cdots, s_n)} = \left\{x: \ \left|\sum_{k=1}^{n} s_k E(f_k|\mathscr{G})\right| > \sup_{x \in U}\left|\sum_{k=1}^{n} s_k f_k\right|\right\}.$$

那么

$$E\equiv\bigcup_{n}\left[\left(\bigcup_{\Lambda_n}\bigcup_{(r_1,\cdots,r_n)\in\Lambda_n}E_{(r_1,\cdots,r_n)}\right)\right.$$

$$\left.\bigcup\left(\bigcup_{(s_1,\cdots,s_n)\text{有理}}\tilde{E}_{(s_1,\cdots,s_n)}\right)\right]$$

是$\mathscr{G}$的零测集。对 $x\in U\backslash E$，我们在$\mathscr{L}$上定义线性泛函

$$F_x\left(\sum_{k=1}^{n}t_kf_k\right)\equiv\sum_{k=1}^{n}t_kE(f_k|\mathscr{G})_{\circ}$$

易见对 $f\in\mathscr{L}$有

$$|F_x(f)|\leqslant\|f\|_{C(\overline{U})^{\circ}}$$

但是由假定 $f_1=E(f_1|\mathscr{G})=1$，所以

$$\|F_x\|\equiv\frac{\sup\limits_{f\in\mathscr{L}}|F_x(f)|}{\|f\|_{C(\overline{U})}}=1_{\circ}$$

F_x在$\mathscr{L}$上是非负的。事实上，如果 $f=t_1f_1+\cdots+t_nf_n\geqslant0$，我们取有理数 $r_1^{(m)},\cdots,r_n^{(m)}$，使

$$\begin{cases}|r_k^{(m)}-t_k|\leqslant\dfrac{1}{m},\\ r_1^{(m)}f_1+\cdots+r_n^{(m)}f_n\geqslant-\dfrac{1}{m}f_{1\circ}\end{cases}$$

因此$\left(r_1^{(m)}+\dfrac{1}{m}\right)f_1+\cdots+r_n^{(m)}f_n\geqslant0$，也就有

$$\left(r_1^{(m)}+\frac{1}{m},\ r_2^{(m)},\cdots,\ r_n^{(m)}\right)\in\Lambda_{n\circ}$$

但是$x\overline{\in}E$，因此$\left(r_1^{(m)}+\dfrac{1}{m}\right)E(f_1|\mathscr{L})+\cdots+r_n^{(m)}E(f_n|\mathscr{G})\geqslant0$。

令 $m\to\infty$便得$F_x\left(\sum\limits_{1}^{n}t_kf_k\right)\geqslant0$。

于是$\mathscr{L}$上的这族有界线性泛函$\{F_x(f)$：$x\overline{\in}E\}$可以分别保持非负，保持范数$\|F_x\|=1$地扩张到成为$C^{\circ}(U)$的线性泛函。从

而也扩成 $C(\overline{U})$上的有界线性泛函 F_x. 利用 $C(\overline{U})$上泛函的 Riesz 表示定理，必定存在 $(\overline{U},\mathscr{B}(\overline{U}))$上概率(因为$\|F_x\|=1$)测度 Q_x，使

$$F_x(\tilde{f})=\int_{\overline{U}}\tilde{f}(y)Q_x(dy) \quad (x\in U\setminus E,\tilde{f}\in C(\overline{U})).$$

第二步. 我们将把测度 Q_x限制到$(U,\mathscr{B}(U))$以得到$P(x,A)$.

首先注意，对于 $A\in\mathscr{G}$及 $f\in C^\circ(U)$(或 $\tilde{f}\in C(\overline{U})$，$\tilde{f}$ 是 f 在 $C(\overline{U})$的扩展，而 f 是 $\tilde{f}$ 在 $C^\circ(U)$的限制)，我们有

$$E\left(I_A\cdot I_{U\setminus E}\int_{\overline{U}}\tilde{f}(y)Q_\cdot(dy)\right)=E(I_Af) \tag{3.17}$$

(当 $f\in\mathscr{L}$时显然成立，再用近似)。

U 在原来的距离 ρ_0 下的紧子集 K 当然也应是新距离 ρ 下的紧子集，因而有 $C(\overline{U})$函数列 $\tilde{f}^{(m)}\downarrow I_k$ (例如可取

$$\tilde{f}^{(m)}(y)=\frac{\rho(y,G_m^c)}{\rho(y,G_m^c)+\rho(y,K)},$$

其中 G^m是 K 的 $1/m$ 邻域)。于是由(3.17)我们得到

$$E(I_{U\setminus E}Q_\cdot(K))=P(K).$$

但是引理3.4保证存在 U 的紧子集 $K_n\uparrow$，使 $P(K_n)\geqslant 1-(1/n)$. 因此由 (3.17) 推出

$$E\left(I_{U\setminus E}Q_\cdot\left(\bigcup_n K_n\right)\right)\geqslant P(K_n)\geqslant 1-\frac{1}{n}.$$

这样我们就得到(除了一个 x 的零测集 E'外)关系

$$I_{U\setminus E}(x)Q_x\left(\bigcup_n K_n\right)=1 \quad (x\bar{\in}E').$$

因此当 $x\bar{\in}E\cup E'$时有

$$Q_x\left(\bigcup_n K_n\right)=1.$$

从而 $Q_x(\overline{U}\setminus U)=0$. 现在我们定义

$$P(x,A)=\begin{cases}Q_x(A), & x\overline{\in}E\cup E',\\ P(A), & x\in E\cup E'.\end{cases}$$

第三步．证明 $P(x,A)$满足要求．

(C_1)显然满足．往证(C_2)及(C_3)：首先对于 $f\in C^0(U)$我们有

$$\int f(u)P(x,\mathrm{d}u)$$

$$=I_{U\setminus(E\cup E')}\int_U f(u)Q_x(\mathrm{d}u)+I_{E\cup E'}\int f(u)P(\mathrm{d}u)$$

$$=I_{U\setminus(E\cup E')}(x)\int_{\bar U}\bar f(y)Q_x(\mathrm{d}y)+I_{E\cup E'}(x)Ef.$$

由于 $I_{U\setminus E}(x)\int_{\bar U}\bar f_k(y)Q_x(\mathrm{d}y)=I_{U\setminus E}(x)\bar F_x(f_k)=I_{U\setminus E}(x)E(f_k|\mathscr{G})\in\mathscr{G}$，我们立得$\int f(u)P(x,\mathrm{d}u)\in\mathscr{G}$．同时(3.17)可写成

$$E\left(I_A\int f(u)P(\cdot,\mathrm{d}u)\right)=E(I_Af).\qquad(3.17')$$

下面我们要证对 $f\equiv I_A$ 仍有$\int f(u)P(x,\mathrm{d}u)\in\mathscr{G}$及(3.17′)．

为此我们应用典型逼近．先取 R^1 上一致连续函数

$$g_m(t)\equiv I_{\{|t|\geq\frac{1}{m}\}}+m|t|I_{\{|t|<\frac{1}{m}\}}\cdot I_{R^1\setminus\{0\}}(t).$$

对U中任意开球 G，我们令

$$f^{(m)}(x)=g_m(\rho(x,G^c))\in C^0(U).$$

那么 $f^{(m)}(x)\uparrow I_G(x)$．在(3.17′)中取 $f=f^{(m)}$ 再令 $m\uparrow\infty$，我们就有

$$E(I_AP(\cdot,G))=E(I_{A\cap G}).$$

并且 $P(x,G)=\lim\limits_{m\to\infty}\int f^{(m)}(u)P(x,\mathrm{d}u)\in\mathscr{G}$．再用典型逼近便得对任意 $A\in\overline{\mathscr{B}}(U)$有 $P(x,A)\in\mathscr{G}$ 而且 $E(I_\Lambda P(\cdot,A))=E(I_{\Lambda\cap A})$．

这就证明了(C_2)和(C_3)。

第四步。证明唯一性。U中有可数开基$\{G_n\}$且满足$P(\bar{G}_n\setminus G_n)=0$。若有两个条件分布$P(x,A)$，$\tilde{P}(x,A)$，那么由$(C_3)$有$P(x,G_n)=\tilde{P}(x,G_n)$(a.e.$dP$)。因此在零测集

$$\Lambda_0\equiv\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:P(x,G_n)\neq\tilde{P}(x,G_n)\}$$

外均有$P(x,G_n)=\tilde{P}(x,G_n)$。用测度扩张立刻推得

$$P(x,A)=\tilde{P}(x,A)(x\bar{\in}\Lambda_0,\quad\forall A\in\overline{\mathscr{B}}(U)).$$

引理证毕。

引理3.5′ 设ξ是Polish空间$(U,\mathscr{B}(U))$到$(V,\mathscr{B}(V))$之间的一个可测变换，P为$\mathscr{B}(U)$上概率测度。那么存在唯一的一个"在给定$\xi=y$条件下P的条件分布"(记成$\hat{P}(y,A)$)。即它满足

(C_1) 当$y\in V$固定时，$\hat{P}(y,A)$是$\mathscr{B}(U)$上概率测度(注意："条件"是给在"表示空间"V中的)；

(C_2) 当$A\in\mathscr{B}(U)$固定时，$\hat{P}(y,A)\in\mathscr{B}(V)$；

(C_3) $\hat{P}(y,A)$是$P(A|\xi)$的一个"代表"，即：$\forall\Lambda\in\mathscr{B}(V)$，恒有

$$\int_{\Lambda}\hat{P}(y,A)(P\xi^{-1})(dy)=\int_{\Lambda}P(A|\xi=y)(P\xi^{-1})(dy)$$

$$=\int_{\xi^{-1}(\Lambda)}P(A|\xi(x))P(dx)=P(A\xi^{-1}(\Lambda)).$$

这个$\hat{P}(y,A)$称为$P(A|\xi=y)$(在ξ的取值空间中)的正则条件分布。

证明与引理3.5的证明类似，不同之处仅在于本引理中条件分布$\hat{P}(y,A)$的第一个变元$y\in V$，而不是取值于U。具体作法是：用$\xi^{-1}(\mathscr{B}(V))$代替$\mathscr{G}$，对$f_1=1,f_2,\cdots$等分别取$E(\cdot|\xi^{-1}(\mathscr{B}(V)))$后均看成是$y\in V$的函数，一切例外集合$E$，$E'$等也均是

y 的集合，测度取为 $P\xi^{-1}$，$F_y(\cdot)$是 $C(\bar{U})$上非负有界线性泛函，而紧集 K_n 则取成 V 的紧子集。其他作法均与引理3.5一样。

引理3.6 若$(U,\mathscr{B}(U),P)$，$(V,\mathscr{B}(V))$，ξ 如引理 3.5′中所设，$P(x,A)(A\in\mathscr{B}(U))$是 $P(A|\xi^{-1}(\mathscr{B}(V)))$的正则条件分布，那么我们有

$$P\{x;\ P(x,\xi^{-1}\xi(x))=1\}=1, \tag{3.18}$$

$$P^{\xi}\{y:\ \hat{P}(y,\xi^{-1}(y))=1\}=1, \tag{3.19}$$

其中 $P^{\xi}=P\xi^{-1}$，$\hat{P}(y,A)$是 $P(A|\xi=y)$的正则条件分布。

证明 (3.19)相当于是(3.18)的"表示"形式。我们先来证明它。由(C_3)我们有

$$\hat{P}(y,A)=P(A|\xi=y)=I_A(\xi^{-1}(y)) \quad (\text{a.e.}\,dP^{\xi}).$$

设 V 的满足 $P^{\xi}(\bar{G}\backslash G)=0$ 的开基为$\{\hat{G}_i\}$，那么集合

$$\hat{A}_i\equiv\{y:\ \hat{P}(y,\xi^{-1}(\hat{G}_i))\neq I_{\xi^{-1}(\hat{G}_i)}(\xi^{-1}(y))\}$$

的 P^{ξ} 测度为零。记 $\hat{A}_0=\bigcup_i\hat{A}_i$。于是对于 $y\bar{\in}\hat{A}_0$，我们有

$$\hat{P}(y,\xi^{-1}(\hat{G}_i))=I_{\xi^{-1}(G)}(\xi^{-1}(y)) \quad (\forall i).$$

由测度扩张我们推得：对 $y\bar{\in}\hat{A}_0$及 $\forall A\in\xi^{-1}(\mathscr{B}(V))$恒有等式

$$\hat{P}(y,A)=I_A(\xi^{-1}(y)).$$

取 A 为单点集$\{y\}$的 ξ 原像$\{\xi^{-1}(y)\}$便得(3.19)。对于(3.18)的证明，我们令

$$A_i\equiv\{x:\ P(x,\xi^{-1}(\hat{G}_i))\neq I_{\xi^{-1}(\hat{G}_i)}(x)\},$$

则对于 $x\bar{\in}A_0\equiv\bigcup_i A_i$ 恒有 $P(x,A)=I_A(x)$。取 $A=\xi^{-1}\xi(x)$ 便得(3.18)。引理证毕。

引理3.7 设方程(3.15)在$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$有解$(X,B)$，那么在$(W^{d+r},\mathscr{B}(W^{d+r}))$上存在概率测度 Q，使(3.15)在 Q 完备化$(W^{d+r},\overline{\mathscr{B}}(W^{d+r}),\overline{\mathscr{B}}_{t+}(W^{d+r}),Q)$上有解，而且这个

解就是坐标过程$(w_\cdot^{(1)}, w_\cdot^{(2)})$，其中

$$w_t \equiv \begin{pmatrix} w_t^{(1)} \\ w_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

是W^{d+r}中点w的"t坐标"，$w_t^{(1)}$，$w_t^{(2)}$分别为d维与r维，并且满足

$$Q(w_2(0)=0)=1.$$

证明 定义$(\Omega, \mathscr{F})$到$(W^{d+r}, \mathscr{B}(W^{d+r}))$的可测变换$F$如下：

$$F(\omega)=\begin{pmatrix} X(\omega) \\ B(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{不妨设 } B_0=0).$$

它导出一个测度$Q \equiv PF^{-1}$。在Q下w_t的分布与$\begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}$在$P$下的分布相同，所以$F$可以看成$(Q, \mathscr{F}_t, P) \to (W^{d+r}, \overline{\mathscr{B}}_{t+}(W^{d+r}), Q)$的保测变换。因此$w^{(2)}$是$\overline{\mathscr{B}}_{t+}(W^{d+r})$ Brown 运动。而(3.15)变成

$$\mathrm{d}w_t^{(1)} = \alpha(t, w_\cdot^{(1)})\mathrm{d}w_t^{(2)} + \beta(t, w_\cdot^{(1)})\mathrm{d}t.$$

所以$(w_\cdot^{(1)}, w_\cdot^{(2)})$是解。引理证毕。

命题3.1 方程(3.15)具有分布唯一性，当且仅当对任意常数x，以x为初值的任意两个解有相同的分布。特别地，如果坐标过程在P下是解，则a.e.dP地它在$P(\cdot \mid w_0=x)$的正则条件分布P_x下也是该方程以x为初值的解。

证明 必要性显然。今证充分性。由引理3.7，我们不妨考虑概率空间$(W^{d+r}, \mathscr{B}(W^{d+r}), \mathscr{B}_{t+}(W^{d+r}))$的坐标过程$(w_\cdot^{(1)}, w_\cdot^{(2)})$。设此空间上给定了两个概率$P$及$\tilde{P}$，使$(w_\cdot^{(1)}, w_\cdot^{(2)})$是方程(3.15)在$(W^{d+r}, \overline{\mathscr{B}}^P(W^{d+r}), \overline{\mathscr{B}}_{t+}^P(W^{d+r}), P)$上和$(W^{d+r}, \overline{\mathscr{B}}^{\tilde{P}}(W^{d+r}), \overline{\mathscr{B}}_{t+}^{\tilde{P}}(W^{d+r}), \tilde{P})$上的解（上标$P$指$P$完备化），而且满足

$$\tilde{P}(w_0^{(1)} \in \Gamma) = P(w_0^{(1)} \in \Gamma) \equiv \mu(\Gamma) \quad (\forall \Gamma \in \mathscr{B}(R^d)).$$

我们要证明$w_\cdot^{(1)}$在P下的分布与在$\tilde{P}$下的分布相同。

对于 $A\in\mathscr{B}(W^{d+r})$，我们改记 $P(A|w_0^{(1)}=x)$ 的正则条件分布 $\hat{P}(x,A)$ 为 $P^x(A)$，相应于 $\tilde{P}(A|w_0^{(1)}=x)$，我们有 $\tilde{P}^x(A)$。

令

$$C_{s,\lambda}=\{w:\quad E[e^{i\lambda^T(w_t^{(2)}-w_s^{(2)})}|\overline{\mathscr{B}}_s^P(W^{d+r})]=e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}\}.$$

于是 $\int P^x(C_{s,\lambda})\mu(dx)=P(C_{s,\lambda})=1$。因此

$$P^x\Big(\bigcap_{s,\ \lambda\text{有理}} C_{s,\lambda}\Big)=1\qquad(\text{a.e.}\,d\mu).$$

所以集合 $\Gamma_1\equiv\{x:\ w^{(2)}$ 不是 P^x Brown 运动$\}$是 μ 零测集。由于 $\alpha(s,w_\cdot^{(1)})\in\mathscr{L}_2^{\text{loc}}(P)$，所以存在 $\Phi_s^{(m)}\in\mathscr{L}_0$，使

$$\int\sum_n\frac{E^x\left[\left(\left(\int_0^n(\alpha(s,w^{(1)})-\Phi_s^m)^2ds\right)\wedge 1\right]^{\frac{1}{2}}}{2^n}\mu(dx)$$

$$=\|\alpha(s,w_\cdot^{(1)})-\Phi_s^{(m)}\|_{\mathscr{L}_2^{\text{loc}}(P)}\to 0\qquad(m\to\infty).$$

因此有一个子列(不妨设就是 $\Phi_s^{(m)}$)，使

$$\mu\{x:\ \|\alpha(s,w_\cdot^{(1)})-\Phi_s^{(m)}\|_{\mathscr{L}_2^{\text{loc}}(P^x)}\xrightarrow{m\uparrow\infty}0\}=1.$$

令此例外集为 Γ_2，那么当 $x\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$ (μ 零测集)时，我们有

$$\|\alpha(s,w_\cdot^{(1)})-\Phi_s^{(m)}\|_{\mathscr{L}_2^{\text{loc}}(P)},\quad\|\alpha(s,w_\cdot^{(1)})-\Phi_s^{(m)}\|_{\mathscr{L}_2^{\text{loc}}(P^x)}\to 0,$$

从而对于 P 及 P^x Brown 运动 $w_s^{(2)}$ 可以统一地定义积分 $\int_0^t\alpha(s,w^{(1)})dw_s^{(2)}$ 为 $\int_0^t\Phi_s^{(m)}dw_s^{(2)}$ 的 P 及 P^x 依概率收敛的极限。再令

$$D_t=\left\{w:\ w_t^{(1)}=w_0^{(1)}+\int_0^t\alpha(s,w_\cdot^{(1)})dw_s^{(2)}+\int_0^t\beta(s,w_\cdot^{(1)})ds\right\}.$$

我们有 $P(D_t)=1$。但是 $\int_0^t a(s,w_s^{(1)})\mathrm{d}w_s^{(2)}$ 也可以当成 P^x下积分来理解，所以 $P^x(D_t)$在 $x\in\Gamma_1\cap\Gamma_2$ 时有意义，从而得到 $\mu\{x: P^x(D_t)=1\}=1$。记 $\Gamma_0=\left\{x: P^x\left(\bigcap_{t\text{有理}} D_t\right)=1\right\}$。那么 Γ_0 是 μ 零测集，所以 a.e.$\mathrm{d}\mu$ 地$(w_\cdot^{(1)},w_\cdot^{(2)})$也是方程(3.15)对于概率 P^x 的解，但是由引理3.6，我们有：a.e.$\mathrm{d}\mu$ 地 $P^x(w_0^{(1)}=x)=1$，即 a.e.$\mathrm{d}\mu$ 地在 P^x 下初值 $w_0^{(1)}=x$。

由对称性，我们也有：a.e.$\mathrm{d}\mu$ 地$(w_\cdot^{(1)},w_\cdot^{(2)})$是(3.15)对于概率 $\tilde{P}^x$ 的解，且初值 $w_0^{(1)}=x$。

由命题的假设，我们应该有：对 $\forall A\in\mathscr{B}(W^d)$，

$$P^x(w^{(1)}\in A)=\tilde{P}^x(w^{(1)}\in A)\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}\mu).$$

从而有

$$P(w^{(1)}\in A)=\int P^x(w^{(1)}\in A)\mu(\mathrm{d}x)$$

$$=\int\tilde{P}^x(w^{(1)}\in A)\mu(\mathrm{d}x)=\tilde{P}(w^{(1)}\in A).$$

命题得证。

定理3.3(S.Watanabe-T.Yamada 定理) 若方程(3.15)具有轨道唯一性，则它具有分布唯一性。

证明 由引理 3.7 及命题 3.1，我们只需证明：在$(W^{d+r},\mathscr{B}(W^{d+r}))$上，如果坐标过程$(w_\cdot^{(1)},w_\cdot^{(2)})$作为初值为$x$ 的方程(3.15)在 P_x 下及在 $\tilde{P}_x$ 的解，则 $w^{(1)}$ 在 P_x 及 $\tilde{P}_x$ 下同分布。

1° 把两个解放到同一个表示空间上去。首先注意 $w_\cdot^{(2)}$在P 及$\tilde{P}$ 下有相同的分布(即 Brown运动的分布)，我们把它记成 P^W。再则，投影 ξ：

$$\xi(w^{(1)},w^{(2)})=w^{(2)}$$

是$(W^{d+r},\overline{\mathscr{B}}^P(W^{d+r}))$到$(W^r,\overline{\mathscr{B}}(W^r))$及$(W^{d+r},\overline{\mathscr{B}}^{\tilde{P}}(W^{d+r}))$

到$(W^r,\overline{\mathscr{B}}(W^r))$的可测变换。简记$P_x(A_1\times W^r|\xi=w^{(2)})$的正则条件分布为$P(w^{(2)},A_1)(A_1\in\overline{\mathscr{B}}^P(W^d))$。于是对于$A_2\in\overline{\mathscr{B}}^W(W^r)$有

$$P_x((A_1\times W^r)\cap\xi^{-1}(A_2))=\int_{A_2}P(w^{(2)},A_1)P^W(\mathrm{d}w^{(2)}),$$

也可写成

$$P_x(A_1\times A_2)=\int_{A_2}P(w^{(2)},A_1)P^W(\mathrm{d}w^{(2)}). \qquad (3.20)$$

同样有相应的$\tilde{P}(w^{(2)},\tilde{A}_1)(\tilde{A}_1\in\overline{\mathscr{B}}^{\tilde{P}}(W^d))$，并且

$$\tilde{P}_x(\tilde{A}_1\times A_2)=\int_{A_2}\tilde{P}(w^{(2)},\tilde{A}_1)P^W(\mathrm{d}w^{(2)}). \qquad (3.20')$$

下面我们把引理3.7的办法加以推广，把两个解P_x，$\tilde{P}_x$放到同一个概率空间上，使它们是同一个概率测度的不同“边缘”测度(即投影测度)。具体作法是：

我们定义

$$\Omega=W^{2d+r}\quad(\Omega\text{中元记为}(w^{(1)},\tilde{w}^{(1)},w^{(2)})),$$

$$Q(\mathrm{d}w^{(1)}\mathrm{d}\tilde{w}^{(1)}\mathrm{d}w^{(2)})=P(w^{(2)},\mathrm{d}w^{(1)})\tilde{P}(w^{(2)},\mathrm{d}\tilde{w}^{(1)})\times P^W(\mathrm{d}w^{(2)}),$$

$\mathscr{F}=\Omega$上的拓扑Borel σ代数在Q下的完备化，

$\mathscr{F}_t=\overline{\mathscr{B}}_t(W^{2d+r})$　(Q下的右连完备化)。

那么Q是概率测度，$(w^{(1)},w^{(2)})$与$(\tilde{w}^{(1)},w^{(2)})$在$Q$下的分布分别是$P_x$与$\tilde{P}_x$。我们只要证明了$w^{(2)}$是$Q$下的$(\mathscr{F}_t)$ Brown运动，并且$(w^{(1)},w^{(2)})$与$(\tilde{w}^{(1)},w^{(2)})$都是方程(3.15)对应于初值为$x$的解，那么利用定理的假定，即轨道唯一性的假定，就得到$Q(w^{(1)}=\tilde{w}^{(1)})=1$。从而$P_x$与$\tilde{P}_x$作为同一个过程的分布应该相同。

2° 证明$w^{(2)}$是$((\mathscr{F}_t),Q)$Brown运动。为此，我们先证明一个关系

$$P(w^{(2)},A_1)\in\overline{\mathscr{B}}_t^W(W^r)\quad(\text{当 } A_1\in\overline{\mathscr{B}}_t^p(W^d)\text{时}),\ (3.21)$$
$$(\tilde{P}(w^{(2)},\tilde{A}_1)\in\overline{\mathscr{B}}_t^W(W^r)\quad(\text{当}A_1\in\overline{\mathscr{B}}_t^p(W^d)\text{时})),$$
意即正则条件分布 $P(w^{(2)},A_1)$ 并不"打乱时间次序")。

我们定义$(W^{d+r},\overline{\mathscr{B}}^p(W^{d+r}))$到$(W^r,\overline{\mathscr{B}}_t^W(W^r))$的可测变换$\xi_t$:

$$\xi_t(w^{(1)}_\cdot,w^{(2)}_\cdot)=w^{(2)}_{t\wedge\cdot},$$

并简记$P_x(A_1\times W^r|\xi_t=w^{(2)})$的正则条件分布为$P^{(t)}(w^{(2)},A_1)$。于是只需证明

$$P(w^{(2)},A_1)=P^{(t)}(w^{(2)},A_1)\quad(\text{a.e.}\,dP^W),\quad(3.21')$$

就能推出(3.21)。往证(3.21′)。

在$(W^r,\overline{\mathscr{B}}^W)$定义自身的可测变换:

$$\rho_t(w^{(2)}_\cdot)=w^{(2)}_{\cdot\wedge t},\quad\tilde{\vartheta}_t(w^{(2)}_\cdot)=w^{(2)}_{\cdot+t}-w^{(2)}_t.$$

因为 P^W 是 Wiener 测度,所以在 P^W 下过程 $\rho_t w^{(2)}$与 $\tilde{\vartheta}_t w^{(2)}$ 相互独立。而且由定义 $P^{(t)}(w^{(2)},A_1)$显然关于 $\rho_t w^{(2)}$ 可测。

$\forall\,\Gamma_1,\Gamma_2\in\mathscr{B}(R^{[0,\infty)})$,我们令

$$C=\rho_t^{-1}(\Gamma_1)\cap\tilde{\vartheta}_t^{-1}(\Gamma_2)=(\rho_t,\tilde{\vartheta}_t)^{-1}(\Gamma_1\times\Gamma_2).$$

应用独立性及(3.20)并注意$(w^{(1)},w^{(2)})$在 P_x 下是随机微分方程的解,我们有

$$\begin{aligned}
&\int_C P^{(t)}(w^{(2)},A_1)P^W(dw^{(2)})\\
&=E^W[I_{\rho_t^{-1}\Gamma_1}P^{(t)}(\cdot,A_1)]E^W[I_{\tilde{\vartheta}_t^{-1}\Gamma_2}]\\
&=P_x(A_1\times\rho_t^{-1}\Gamma_1)\,P^W(\tilde{\vartheta}_t^{-1}\Gamma_2)\\
&=P_x(A_1\times\rho_t^{-1}\Gamma_1)P_x(W^d\times\tilde{\vartheta}_t^{-1}\Gamma_2))\\
&=P_x((A_1\times\rho_t^{-1}\Gamma_1)\cap(W^d\times\tilde{\vartheta}_t^{-1}\Gamma_2))\quad(\text{独立性})\\
&=P_x(A_1\times C).\qquad(3.22)
\end{aligned}$$

记

$$\mathfrak{S}=\{(\rho_t,\tilde{\vartheta}_t)^{-1}\Gamma:\ \Gamma\in\mathscr{B}(R^{[0,\infty)}\times R^{[0,\infty)})\},$$

用典型逼近便得(3.22)对$\forall\,C\in\mathfrak{S}$成立。往证$\mathscr{B}(W^r)\subset\mathfrak{S}$。

当 $s>t$ 时

$$\begin{aligned}\{w_s^{(2)}\leqslant\lambda\} &= \{w_t^{(2)}+(w_{(s-t)+t}^{(2)}-w_t^{(2)})\leqslant\lambda\}\\ &= \{(\rho_t w_\cdot^{(2)})_s+(\tilde{\vartheta}_t w_\cdot^{(2)})_{s-t}\leqslant\lambda\}\\ &= (\rho_t,\ \tilde{\vartheta}_t)^{-1}\{(f_u,g_u)_{0\leqslant u<\infty}:\ f_s+g_{s-t}\leqslant\lambda\}\\ &\in(\rho_t,\ \tilde{\vartheta}_t)^{-1}\mathscr{B}(R^{[0,\infty)}\times R^{[0,\infty)})\subset\mathfrak{S};\end{aligned}$$

而当 $s\leqslant t$ 时

$$\begin{aligned}\{w_s^{(2)}\leqslant\lambda\} &= \{(\rho_t w_\cdot^{(2)})_s\leqslant\lambda\}\\ &= (\rho_t,\ \tilde{\vartheta}_t)^{-1}\{(f_u,g_u)_{0\leqslant u<\infty}:\ f_s\leqslant\lambda\}\\ &\in(\rho_t,\ \tilde{\vartheta}_t)^{-1}\mathscr{B}(R^{[0,\infty)}\times R^{[0,\infty)})\subset\mathfrak{S}.\end{aligned}$$

由此用有限交立知 $\mathscr{B}(W^r)$柱集均属 $\mathfrak{S}$，再由典型逼近便得 $\mathscr{B}(W^r)\subset\mathfrak{S}$。

这样，对 $C\in\overline{\mathscr{B}}^W(W^r)$等式(3.22)仍正确。我们取$C$为任意 $A_2\in\overline{\mathscr{B}}^W(W^r)$，那么由(3.22)及(3.20)就立刻推出

$$P(w^{(2)},A_1)=P^{(t)}(w^{(2)},A_1)\in\overline{\mathscr{B}}_t^W(W^r).$$

现在，对任意 $A_1,\tilde{A}_1\in\mathscr{B}_s(W^d)$，$A_2\in\mathscr{B}_s(W^r)$，我们利用(3.20)得到：对 $s<t$

$$\begin{aligned}&E^Q(e^{i\lambda^T(w_t^{(2)}-w_s^{(2)})}I_{A_1\times\tilde{A}_1\times A_2})\\ &= E^W(e^{i\lambda^T(w_t^{(2)}-w_s^{(2)})}P(w^{(2)},A_1)\tilde{P}(w^{(2)},\tilde{A}_1)I_{A_2})\\ &= E^W(e^{i\lambda^T(w_t^{(2)}-w_s^{(2)})})E^W(P(w^{(2)},A_1)\\ &\quad\times\tilde{P}(w^{(2)},\tilde{A}_1)I_{A_2})\quad(\text{用}(3.20))\\ &= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}Q(A_1\times\tilde{A}_1\times A_2).\end{aligned}$$

用典型逼近可得：对 $s<t$ 及任意 $A\in\mathscr{B}_s(W^{2d+r})$有

$$E^Q(e^{i\lambda^T(w_t^{(2)}-w_s^{(2)})}I_A)=e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}Q(A).$$

这就保证了 $w_\cdot^{(2)}$ 是$(\mathscr{F}_t,Q)$Brown 运动。

3° 证明分布唯一性．由于 $P_x,\tilde{P}_x$ 都是Q的"边缘"分布，所以

$$\begin{aligned}&Q((w^{(1)},w^{(2)})\text{满足初值为 }x\text{ 的方程}(3.15))\\ &\quad=P_x((w^{(1)},w^{(2)})\text{满足初值为 }x\text{ 的方程}(3.15))=1.\end{aligned}$$

同样地,

$$Q((\tilde{w}^{(1)},w^{(2)})\text{满足初值为 }x\text{ 的方程(3.15)})=1.$$

即 $w^{(1)},\tilde{w}^{(1)}$ 都是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),Q)$上初值为$x$的方程(3.15)对相同 Brown 运动 $w^{(2)}$ 的解。由定理假定轨道唯一性成立，因此

$$Q(w^{(1)}=\tilde{w}^{(1)})=1.$$

从而可推出 $w^{(1)}$ 与 $\tilde{w}^{(1)}$ 同分布。再用命题3.1，我们就得到方程(3.15)的解的分布唯一性。定理证毕。

推论 若方程(3.15)对于任意初分布μ恒有解，而且具有轨道唯一性，则(3.15)存在轨道唯一解(或称强解)，意即对任意$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$，$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动$B$(设$B_0=0$，$(\mathscr{F}_t)$，$\mathscr{F}$都是$P$完备的)及$X_0\in\mathscr{F}_0$，(3.15)存在唯一解$X$。此时这个解可以唯一地表成$X_0$与$B$的泛函形式:

$$X=F(X_0,B),$$

其中$F(x,w)$对一切μ是$\overline{\mathscr{B}(R^d)\times\mathscr{B}(W^r)}^{\mu\times P^W}$到$\mathscr{B}(W^d)$的可测变换。同时当$x$固定时，$F(x,w)$还是$\overline{\mathscr{B}_t(W^r)}^{P^W}$到$\mathscr{B}_t(W^d)$的可测变换。

证明 设$w^{(1)}$，$\tilde{w}^{(1)}$，$w^{(2)}$，$P(w^{(2)},A_1)$，$\tilde{P}(w^{(2)},\tilde{A}_1)$，$Q$如定理3.3中的含义。定理3.3证明了$Q(w^{(1)}=\tilde{w}^{(1)})=1$，于是

$$\begin{aligned}
&P^W\Big(w^{(2)}:\ \sum_{w^{(1)}}\tilde{P}(w^{(2)},\ \{w^{(1)}\})P(w^{(2)},\ \{w^{(1)}\})=1\Big)\\
&=P^W\Big(\int P(w^{(2)},\ \{w^{(1)}\})\tilde{P}(w^{(2)},\ dw^{(1)})=1\Big)\\
&=P^W\Big(\int_{\{\tilde{w}^{(1)}=w^{(1)}\}}P(w^{(2)},dw^{(1)})\tilde{P}(w^{(2)},d\tilde{w}^{(1)})=1\Big)\\
&=1.
\end{aligned}$$

因此

$$P^W(\tilde{P}(w^{(2)},\cdot)\text{与 }P(w^{(2)},\cdot)\text{集中于同一点(记成 }F_x(w^{(2)})))=1.$$

也就是(若简记 $w^{(2)}$ 为 w)

$$P^W(P(w,A)=\delta_{F_x(w)}(A),\ \tilde{P}(w,A)=\delta_{F_x(w)}(A))=1.$$

所以由(3.21)可知，对于 $A\in\mathscr{B}_t(W^d)$有

$$\begin{aligned}\{F_x(w)\in A\}&=\{\delta_{F_x(w)}(A)=1\}\\&=\{P(w,A)=1\}\quad (\text{a.e.}\ dP^W)\\&\in\overline{\mathscr{B}_t(W^r)}^{P^W}.\end{aligned}$$

也就是 $F_x(w)$是$\overline{\mathscr{B}_t(W^r)}$到$\mathscr{B}_t(W^d)$的可测变换。此外，从命题 3.1 能推出，对于变动的x，$P(w^{(2)},A)$ 实际上是 $P(A\times W^r\mid w_0^{(1)}=x,\ \xi=w^{(2)})$的正则条件分布，所以 $P(w,A)$(实际上依赖 x) 关于(x,w) 是$\overline{\mathscr{B}(R^d)\times\mathscr{B}(W^r)}^{\mu\times P^W}$ 可测的，其中μ是任意一个$\mathscr{B}(R^d)$上概率测度。因此

$$F_x(w)\in\overline{\mathscr{B}(R^d)\times\mathscr{B}(W^r)}^{\mu\times P^W}.$$

还有 $P_x(w^{(1)}=F_x(w))=E^wP(w,w^{(1)}=F_x(w))=1$。也就是$(F_x(w),w)$是方程(3.15)的初值为$x$的解。即

$$P^W\Big(F_x(w)=x+\int_0^t\alpha(s,F_x(w))\mathrm{d}w_s+\int_0^t\beta(s,F_x(w))\mathrm{d}s\Big)=1.$$

于是对于任意给定的$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$，$B$如推论中的假定，就有

$$P\Big(F_x(B)=x+\int_0^t\alpha(s,F_x(B))\mathrm{d}B_s+\int_0^t\beta(s,F_x(B))\mathrm{d}s\Big)=1.$$

即 $X=F_x(B)$是(3.15)的初值为x的解。

对于一般 $X_0\in\mathscr{F}_0$，用 $P(\mid\mathscr{F}_0)$代替上面的P，就有

$$P\Big(F_{X_0}(B)=X_0+\int_0^t\alpha(s,F_{X_0}(B))\mathrm{d}B_s+\int_0^t\beta(s,F_{X_0}(B))\mathrm{d}s\,\Big|\,\mathscr{F}_0\Big)=1.$$

再取期望便得

$$P\Big(F_{X_0}(B)=X_0+\int_0^t\alpha(s,\ F_{X_0}(B))\mathrm{d}B_s$$

$$+\int_0^t\beta(s,F_X(B))\mathrm{d}s\Big)=1.$$

推论证毕。

这个推论是 T. Yamada 和 S. Watanabe 的一个重要定理。它的意义在于把沿固定 Brown 运动的轨道的解的表示化为轨道唯一性和弱解的存在性问题。

例2（Tanaka 的例子）　Tanaka 给出了一个随机微分方程解具有分布唯一性但是没有轨道唯一性的例子。考虑 R^1 上方程

$$\mathrm{d}X_t=\mathrm{sgn}X_t\mathrm{d}B_t \tag{3.23}$$

($\mathrm{sgn}\,x=I_{(x>0)}-I_{(x\le 0)}$)。

首先，对任意初值 X_0 解 (X,B) 是存在的：任意取 $(\bar{\Omega},\ \bar{\mathscr{F}},\ (\bar{\mathscr{F}}_t),\ \bar{P})$ 上 $(\bar{\mathscr{F}}_t)$ Brown 运动 $\bar{B}$（例如可取 Wiener 空间上的坐标过程）。设 X_0 所在的概率空间为 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},\tilde{P})$。我们定义

$$\Omega=\tilde{\Omega}\times\bar{\Omega},\quad \mathscr{F}=\tilde{\mathscr{F}}\times\bar{\mathscr{F}},$$

$$\mathscr{F}_t=(\bar{\mathscr{F}}_t\times\tilde{\Omega})\cup(\bar{\Omega}\times\tilde{\mathscr{F}}_{X_0})$$

($\tilde{\mathscr{F}}_{X_0}$ 指 X_0 生成的 σ 代数)。那么 $\bar{B}$ 也是 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动。令

$$\begin{cases} X_t=X_0+\bar{B}_t, \\ B_t=\displaystyle\int_0^t\mathrm{sgn}X_s\mathrm{d}\bar{B}_s, \end{cases}$$

则 B 为 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动且 (X,B) 是(3.23)的解。

其次，方程(3.23)的解具有分布唯一性。事实上，设 (X,B) 是任意 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ 上的一个解。那么

$$X_t-X_0=\int_0^t\mathrm{sgn}X_s\mathrm{d}B_s,$$

因此 $X-X_0\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)$ 而且 $\langle X-X_0\rangle_t=t$。由定理 2.11 推

出$X-X_0$是$(\mathscr{F}_t)$Brown运动，所以它与X_0独立。这样，X的分布是由X_0的分布唯一确定的。

最后，我们证明方程(3.23)的解没有轨道唯一性。取$X_0=0$。设X是(3.23)的解，它也是$(\mathscr{F}_t)$Brown运动。另一方面，由局部时间的公式(2.61)有

$$\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}s = 2\int_{\{0\}} l(t,x)\mathrm{d}x = 0.$$

于是$\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}B_s = 0(\mathrm{a.e.\,d}P)$。因此

$$\begin{aligned}
-X_t &= \int_0^t -\mathrm{sgn}X_s\mathrm{d}B_s \\
&= \int_0^t \mathrm{sgn}(-X_s)\mathrm{d}B_s - 2\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}B_s \\
&= \int_0^t \mathrm{sgn}(-X_s)\mathrm{d}B_s.
\end{aligned}$$

显然$P(\forall t, X_t=-X_t)\neq 1$（否则有$X_t\equiv 0$，这与$X$是Brown运动相矛盾）。现在$X$，$-X$都是零初值的方程(3.23)关于同一个Brown运动B的解。这说明轨道唯一性不满足。

例3（Girsanov的例子） Girsanov给出了一个解不具有分布唯一性的随机微分方程的例子。我们知道常微分方程

$$\begin{cases} f'(t) = |f(t)|^a \quad (t\geqslant 0), \\ f'(0) = 0. \end{cases}$$

在$0<a<1$时具有两个不同的解：

$$f\equiv 0 \quad 及 \quad f(t) = [(1-a)t]^{\frac{1}{1-a}}.$$

Girsanov发现随机微分方程也有类似的现象。由于$\mathrm{d}B$“相当于”1/2阶无穷小$(\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$，所以他考虑方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = |X_t|^a\mathrm{d}B_t \quad \left(0<a<\frac{1}{2}\right), \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

这个方程有一个显然解：$X^{(1)}\equiv 0$。Girsanov 构造了第二个解 $X_t^{(2)}\equiv B_{\tau_t}$，其中 τ_t 是 $\int_0^t \frac{1}{|B_s|^a}\mathrm{d}B_s$ 的内蕴时间变换。我们来验证 $X^{(2)}$ 确实是解。

首先，由于 $a<1/2$，我们有

$$E\left(\int_0^t \frac{1}{|B_s|^{2a}}\mathrm{d}s\right)=\int_0^t E\left(\frac{1}{|B_s|^{2a}}\right)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^t \frac{2}{\sqrt{2\pi s}}\int_0^\infty \frac{1}{x^{2a}}\exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s<\infty.$$

所以 $\frac{1}{|B_s|^a}\in\mathscr{L}_2$。另一方面，由 Brown 运动的重对数律

$$P\left(\overline{\lim_{s\to\infty}}\frac{B_s}{\sqrt{2s\log^2 s}}=1,\ \underline{\lim_{s\to\infty}}\frac{B_s}{\sqrt{2s\log^2 s}}=-1\right)=1$$

可知，当 s 充分大时(但依赖于 ω)有

$$|B_s|\leqslant 2\sqrt{2s\log^2 s}\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P).$$

于是

$$\frac{1}{|B_s|^{2a}}\geqslant\frac{1}{8^a}\frac{1}{s^a(\log^2 s)^a}\in L[0,\infty)\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P).$$

即

$$P\left(\int_0^\infty \frac{1}{|B_s|^{2a}}\mathrm{d}s=\infty\right)=1.$$

应用(1.50)我们就得到

$$\int_0^{\tau_t}\frac{1}{|B_s|^a}\mathrm{d}B_s=\tilde{B}_t,$$

其中 $\tilde{B}$ 为$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动，$\widetilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{\tau_t}$，$\tau_t$ 是

$$t^*(t)=\int_0^t \frac{1}{|B_s|^{2a}}\mathrm{d}s$$

的右连续逆$\left(\text{即}\int_0^t \frac{1}{|B_s|^a}\mathrm{d}B_s\text{ 的内蕴时间变换}\right)$,且$P(\tau_t<\infty)=1$。

此外，由于

$$\int_0^t I_{\{B_s=0\}}\mathrm{d}s = 2\int l(t,x)I_{\{x=0\}}\mathrm{d}x = 0,$$

所以 $t^*(t) = \int_0^t \frac{1}{|B_s|^{2a}}\mathrm{d}s$ 沿每条轨道都是严格递增的，因而 τ_t 是轨道连续的。

取分割

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{N_n}^{(n)} = t.$$

我们有($s \leqslant t$)

$$\Phi_s^{(n)} \equiv \sum_k |B_{t_k^{(n)}}|^a I_{[t_k^{(n)}\wedge t,\, t_{k+1}^{(n)}\wedge t)} \xrightarrow{\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)} |B_s|^a I_{[0,t]}.$$

于是
$$\Phi_{\tau_s}^{(n)} \xrightarrow{\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}(\tilde{\mathscr{F}}_t)} |B_{\tau_s}|^a I_{[0,t)}.$$

因此
$$\int_0^t \Phi_{\tau_s}^{(n)}\mathrm{d}\tilde{B}_s \xrightarrow{p} \int_0^t |B_{\tau_s}|^a \mathrm{d}\tilde{B}_s. \tag{3.24}$$

但是上边左式为

$$\begin{aligned}
&\sum_k |B_{t_k^{(n)}}|^a \cdot \int_0^t I_{[t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)})}(\tau_s)\mathrm{d}\tilde{B}_s \\
&= \sum_k |B_{t_k^{(n)}}|^a \cdot \int_0^t I_{[t^*(t_k^{(n)}),\,t^*(t_{k+1}^{(n)}))}(s)\mathrm{d}\tilde{B}_s \\
&= \sum_k |B_{t_k^{(n)}}|^a (\tilde{B}_{t^*(t_{k+1}^{(n)}\wedge\tau_t)} - \tilde{B}_{t^*(t_k^{(n)}\wedge\tau_t)}).
\end{aligned}$$

应用(1.51),上式即是

$$\begin{aligned}
&\sum_k |B_{t_k^{(n)}}|^a \int_{t_k^{(n)}\wedge\tau_t}^{t_{k+1}^{(n)}\wedge\tau_t} \frac{1}{|B_s|^a}\mathrm{d}B_s \\
&= \int_0^{t\wedge\tau_s}\Big[\sum_k |B_{t_k^{(n)}}|^a I_{[t_k^{(n)}\wedge\tau_t,\,t_{k+1}^{(n)}\wedge\tau_t)}(s)\Big]\frac{1}{|B_s|^a}\mathrm{d}B_s \\
&= \int_0^{\tau_t}\Big[\sum_k |B_{t_k^{(n)}}|^a I_{[t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)})}(s)\Big]\frac{1}{|B_s|^a}\mathrm{d}B_s
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\tau_t} \Phi_s^{(n)} \frac{1}{|B_s|^a} \mathrm{d}B_s. \qquad (3.25)$$

又因为$|B_s|^a$在有限区间上按轨道一致连续，所以我们有（对$\forall t$）

$$\int_0^t \left| \frac{\Phi_s^{(n)}}{|B_s|^a} - 1 \right|^2 \mathrm{d}s = \int_0^t |\Phi_s^{(n)} - |B_s|^a|^2 \frac{\mathrm{d}s}{|B_s|^{2a}} \to 0.$$

因此对$\forall T$对$t \leqslant T$一致地有

$$\int_0^t \frac{\Phi_s^{(n)}}{|B_s|^a} \mathrm{d}B_s \xrightarrow{p} \int_0^t \mathrm{d}B_s = B_s.$$

于是可选适当的子列（不妨设就是$\Phi^{(n)}$自己）使上面的收敛性为对$t \leqslant T$一致地 a.e. dP收敛。从而

$$P\left(\forall\ t, \int_0^t \frac{\Phi_s^{(n)}}{|B_s|^a} \mathrm{d}B_s \to B_t \right) = 1.$$

特别地我们应有

$$\int_0^{\tau_t} \frac{\Phi_s^{(n)}}{|B_s|^a} \mathrm{d}B_s \longrightarrow B_{\tau_t} \qquad (\text{a.e.d}P).$$

由这个式子及(3.24),(3.25)，我们得到

$$\int_0^t |B_{\tau_s}|^a \mathrm{d}\tilde{B}_s = B_{\tau_t}.$$

这就说明了$X^{(2)} = B_{\tau\cdot}$也是方程的一个解。

§3.4 弱解与鞅问题

引理 3.8（表示定理） 在$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$上如果$M = (M^{(k)})_{1 \leqslant k \leqslant d} \in \mathscr{M}_2^{c,loc}$，且存在$d \times r$ $\mathscr{L}_2^{loc}$函数矩阵Ψ_s使

$$\langle M, M \rangle_t \equiv \int_0^t \Phi_s \mathrm{d}s \qquad (\Phi = \Psi \Psi^T),$$

那么

1° 若几乎所有（对 Lebesgue 测度）的s均有$P(\det \Phi_s \neq 0) = 1$，则存在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上$d$维$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动$B$，使

$$M_t = \int_0^t \Psi_s \mathrm{d}B_s; \tag{3.26}$$

2° 若在 s 的某个 Lebesgue 正测集上有 $P(\det \Phi_s = 0) > 0$，则存在一个$(\Omega', \mathscr{F}', (\mathscr{F}'_t), P')$，使在$(\Omega \times \Omega', \mathscr{F} \times \mathscr{F}', P \times P')$上存在一个 r 维$(\mathscr{F}_t \times \mathscr{F}'_t)$Brown 运动 B，满足

$$M_t = \int_0^t \Psi_s \mathrm{d}B_s. \tag{3.26'}$$

证明 先证2°．我们不妨假定 $r = d$，因为在相反的情况下，可以对 Ψ 增补 $d - r$ 列 0．Φ_s 是$(\mathscr{F}_t)$可料过程的非负定矩阵，于是它可以表示为

$$\Phi_s(\omega) = V_s(\omega)[\varphi_s^{(1)}(\omega), \varphi_s^{(2)}(\omega), \cdots, \varphi_s^{(l(s,\omega))}(\omega), 0, \cdots, 0]V_s(\omega)^T,$$

其中 V、l 及 $\varphi^{(k)}$ 都是$(\mathscr{F}_t)$可料的，而$[a_1, \cdots, a_d]$表示元素为 $a_1, \cdots, a_d$ 的对角矩阵．于是 $\Phi_s^{\frac{1}{2}}$有确切含义且$(\mathscr{F}_t)$可料．

首先考虑特殊情形：$\Psi = \Phi^{\frac{1}{2}}$．显然它并不一定可逆，但是我们可用

$$\begin{aligned}
\mathit{\Psi} &\equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi^{\frac{1}{2}}(\Phi + \varepsilon I)^{-1} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} V\left[\frac{\sqrt{\varphi^{(1)}}}{\varphi^{(1)} + \varepsilon}, \cdots, \frac{\sqrt{\varphi^{(l)}}}{\varphi^{(l)} + \varepsilon}, 0, \cdots, 0\right]V^T \\
&= V\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi^{(1)}}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\varphi^{(l)}}}, 0, \cdots, 0\right]V^T \quad (l = l(s, \omega))
\end{aligned}$$

代替它．易见 $\mathit{\Psi}\Phi^{\frac{1}{2}}$, $\Phi^{\frac{1}{2}}\mathit{\Psi}$ 为

$$V[\underbrace{1, \cdots, 1}_{l(s,\omega)\text{个}}, 0, \cdots, 0]V^T.$$

它是投影矩阵且$(\mathscr{F}_t)$可料，我们记之为 $E_s^{(l)}$．

任取$(\Omega', \mathscr{F}', P')$及其参考系$(\mathscr{F}'_t)$，$d$ 维 Brown 运动 B'．记

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \times \mathscr{F}',$$
$$\tilde{P} = P \times P', \quad \widetilde{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_t \times \mathscr{F}'_t.$$

于是M作为$(\tilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$上过程属于$\mathscr{M}_2(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$，它与$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动 B'独立，而且$\langle M, M\rangle$并没有改变。

我们定义

$$B_t = \int_0^t \Psi_s \mathrm{d}M_s + \int_0^t (I - E_s^{(l)}) \mathrm{d}B'_s. \tag{3.27}$$

于是

$$\langle B, B\rangle_t = \int_0^t \Psi_s \Phi_s \Psi^T \mathrm{d}s + \int_0^t (I - E_s^{(l)}) \mathrm{d}s$$
$$= \int_0^t E_s^{(l)} \mathrm{d}s + \int_0^t (I - E_s^{(l)}) \mathrm{d}s = tI.$$

因此B是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动。

由于 $\Phi_s^{\frac{1}{2}}(I - E_s^{(l)}) = 0$，所以$\int_0^t (I - E_s^{(l)}) \mathrm{d}M_s = 0$。于是

$$\int_0^t \Phi_s^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}B_s = \int_0^t \Phi_s^{\frac{1}{2}} (\Psi_s \mathrm{d}M_s + (I - E_s^{(l)}) \mathrm{d}B'_s)$$
$$= \int_0^t E_s^{(l)} \mathrm{d}M_s$$
$$= \int_0^t [I - (I - E_s^{(l)})] \mathrm{d}M_s = M_t.$$

这就是说，在 $\Psi = \Phi^{\frac{1}{2}}$ 时，(3.26)′是成立的。

现在考虑一般情形：$\Psi \neq \Phi^{\frac{1}{2}}$。这时候必存在$(\mathscr{F}_t)$可料的正交矩阵$U_s$，使$\Phi^{\frac{1}{2}} = \Psi U$。我们定义

$$\tilde{B}_t = \int_0^t U_s \mathrm{d}B_s,$$

其中B满足(3.27)，那么$\tilde{B}$也是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动，并且

$$\int_0^t \Psi_s \mathrm{d}\tilde{B}_s = \int_0^t (\Phi_s^{\frac{1}{2}} U_s^T)(U_s \mathrm{d}B_s)$$

$$= \int_0^t \Phi_s^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}B_s = M_t.$$

于是2°得证。

为证1°，只需取

$$\Psi = (\Phi^{\frac{1}{2}})^{-1},$$

此时不需要 B'。引理证毕。

研究随机微分方程的弱解的存在性的主要工具是 Polish 空间上测度族的Prohorov 的弱列紧判据，Skorohod的实现定理及 Stroock-Varadhan 的鞅方法。事实上，弱解等价于一个鞅问题。

对于方程(3.15)及任意 $f \in C^2(R^d)$，我们记

$$a = (a_j^i(t,w)), \quad (a^{ij}(t,w)) = aa^T, \tag{3.28}$$

$$(Af)(t,w) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(t,w)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(w_t) + \sum_{i=1}^d \beta^i(t,w)\frac{\partial f}{\partial x_i}(w_t). \tag{3.29}$$

如果还有$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$上 d 维连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程X，我们还可定义连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程 $M^{(f)}$:

$$M_t^{(f)} = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Af)(s,X)\mathrm{d}s. \tag{3.30}$$

引理3.9 设 $f, g \in C^2(R^d)$，且 $M^{(f)}, M^{(g)}, M^{(fg)} \in \mathscr{M}_2^{c,loc}$，则我们有

$$\mathrm{d}\langle M^{(f)}, M^{(g)}\rangle_t = [A(fg) - (fAg + gAf)]_{(t,X)}\mathrm{d}t, \tag{3.31}$$

其中$[\quad]_{(t,X)}$表示$[\quad]$中函数在(t,X)处的值。

证明 因为$M^{(f)}, M^{(g)} \in \mathscr{M}_2^{c,loc}$，(3.30)说明了 $f(X), g(X)$ 都是连续$(\mathscr{F}_t)$半鞅，而且其局部鞅部分恰为 $M^{(f)}$ 及 $M^{(g)}$。对于$(fg)(X_t)$用 Ito 公式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(fg)(X_t)\\
&\quad=f(X_t)\mathrm{d}g(X_t)+g(X_t)\mathrm{d}f(X_t)+\mathrm{d}\langle M^{(f)},M^{(g)}\rangle_t.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M_t^{(fg)}&+A(fg)(t,X)\mathrm{d}t\\
&=f(X_t)[\mathrm{d}M_t^{(g)}+(Ag)(t,X)\mathrm{d}t]\\
&\quad+g(X_t)[\mathrm{d}M_t^{(f)}+(Af)(t,X)\mathrm{d}t]\\
&\quad+\mathrm{d}\langle M^{(f)},M^{(g)}\rangle_t.
\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}
\langle M^{(f)},M^{(g)}\rangle_t&-\int_0^t[A(fg)-(fAg+gAf)]_{(s,X)}\mathrm{d}s\\
&=M_t^{(fg)}-\int_0^t f(X_s)\mathrm{d}M_s^{(g)}-\int_0^t g(X_s)\mathrm{d}M_s^{(f)}.
\end{aligned}$$

但是此式等号双边均为连续，而且左方为有限变差的，右方是局部平方可积鞅。由引理2.23立刻推出它们应为0，于是引理得证。

定理 3.4（等价性定理） 如果方程(3.15)中 $\alpha(t,w),\beta(t,w)$ 在任意 $0\leqslant t\leqslant T$ 时均为有界，那么下列诸叙述方式彼此等价：

1° 方程(3.15)有解(X,B)；

2° 存在$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$及其上连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程$X$，使得对于任意$f\in$紧支集$C^2$函数类$C_K^2$，恒有$M^{(f)}\in\mathscr{M}_2^c(\mathscr{F}_t)$；

3° 2°中的“$M^{(f)}\in\mathscr{M}_2^c$”改为“$M^{(f)}$是$(\mathscr{F}_t)$下鞅”；

4° 2°中的“$\forall f\in C_K^2$，恒有$M^{(f)}\in\mathscr{M}_2^c$”改为“$\forall f\in C^2$，恒有$M^{(f)}\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$”。

注 2°中的“$f\in C_K^2$”也可改为“$f\in C_0^\infty$”或“$f\in C_b^2$(有界C^2函数类)”。此外，2°也等价于

2°° 存在$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上概率测度P，使得对于任意$f\in C_K^2$，恒有$M^{(f)}\in\mathscr{M}_2^c(\overline{\mathscr{B}}_t(W^d))$，但是$M^{(f)}$中的$X_t$相应地应改成$w_t$。

同样3°，4°也有对应的形式3°°，4°°，我们不再赘述了。

证明 $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. 由 Ito 公式我们得到

$$M_t^{(f)} = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T (X_s)\alpha(s,X)\mathrm{d}B_s \in \mathscr{M}_2^c.$$

$2^\circ \Rightarrow 4^\circ$. 作 $g_n \in C_K^2$, 使 $g_n(x)$ 在 $|x| \leqslant n$ 上取 1. 定义

$$f_n = f g_n, \quad \sigma_n = \inf\{t: \ |X_t| > n\}.$$

于是 $f_n \in C_K^2$, σ_n 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时而且 $\sigma_n \uparrow \infty$. 我们显然有

$$f_n = f, \ Af_n = Af \qquad (\text{当} |x| \leqslant n).$$

因此

$$M_{t\wedge\sigma_n}^{(f)} = [f(X_{t\wedge\sigma_n}) - f(X_0)] - \int_0^{t\wedge\sigma_n} (Af)(s,X)\mathrm{d}s$$

$$= [f_n(X_{t\wedge\sigma_n}) - f_n(X_0)] - \int_0^{t\wedge\sigma_n} (Af_n)(s,X)\mathrm{d}s + [f_n(X_0) - f(X_0)]$$

$$= M_{t\wedge\sigma_n}^{(f_n)} + [f_n(X_0) - f(X_0)]$$

是平方可积鞅, 即 $M^{(f)} \in \mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$.

$2^\circ \Longleftrightarrow 3^\circ$. "$\Rightarrow$" 显然; 如果相反地 3° 成立, 那么 $M_t^{(f)}$, $M_t^{(-f)}(f \in C_K^2)$ 都是 $(\mathscr{F}_t)$ 下鞅. 所以 $M_t^{(f)} = -M_t^{(-f)}$ 是 $(\mathscr{F}_t)$ 上鞅, 从而是 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅. 它显然平方可积, 因此 $M^{(f)} \in \mathscr{M}_2^c$.

$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$. 令

$$f_i(x) = x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant d).$$

于是 $M^{(f_i)}, M^{(f_i f_j)} \in \mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$. 由引理3.9

$$\langle M^{(f_i)}, M^{(f_j)} \rangle_t = \int_0^t [A(x_i x_j) - (x_i A x_j + x_j A x_i)](s,X)\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t a^{ij}(s,X)\mathrm{d}s.$$

由(3.28), 我们用引理3.8推得: 存在 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, (\tilde{\mathscr{F}}_t), \tilde{P})$ 上 $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$ Brown 运动 B, 使

$$M_t=\int_0^t a(s,X)\mathrm{d}B_s,$$

其中
$$M=\begin{pmatrix}M^{(f_1)}\\ \vdots \\ M^{(f_d)}\end{pmatrix}.$$

按M的定义，它应该就是 $X_t-X_0-\int_0^t\beta(s,X)\mathrm{d}s$，因此

$$X_t-X_0-\int_0^t\beta(s,X)\mathrm{d}s=\int_0^t a(s,X)\mathrm{d}B_s,$$

即1°成立。

至于概率空间换成$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$，X换成坐标过程$w.$的情形(2°°—4°°)只需用表示定理就得到所要结论。定理证毕。

§3.5 Prohorov-Skorohod方法

本节是关于可分距离可测空间上概率测度的某个集合的弱紧性的复习。这些事实也是当年测度论从经典转向现代化的决定性的一步。

记$\mathscr{P}(U)$为可分距离可测空间$(U,\mathscr{B}(U))$上全体概率测度。在$\mathscr{P}(U)$上定义距离

$$d(P_1,P_2)=\sum_{i}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\left|\int_U f_n(x)(P_1(\mathrm{d}x)-P_2(\mathrm{d}x))\right|\wedge 1\right],\tag{3.32}$$

其中$P_1,P_2\in\mathscr{P}(U)$，$\{f_n\}$是$C^\circ(U)$中的可数稠子集，而$C^\circ(U)$是U完备化后用Tychonov 嵌 入 嵌进紧空间再距离化后在U上确定的一致连续函数全体。

d收敛性就是测度的弱 收 敛 性：对$\forall$开 集$G\in\mathscr{B}(U)$，有$P(G)\leqslant\varliminf_n P_n(G)$。于是$\mathscr{P}(U)$在$d$下成为距离空间。如果$U$完

备，则 $\mathscr{P}(U)$ 也完备。

若 X_n, X 都是可分距离可测空间 $(U, \mathscr{B}(U), P)$ 到可分距离可测空间 $(V, \mathscr{B}(V))$ 的可测变换，则 "PX_n^{-1} 弱敛于 PX^{-1}" 等价于 "对任意 $f \in C^0(V)$ 恒有 $Ef(X_n) \to Ef(X)$。

$\mathscr{P}(U)$ 的子集 $\mathscr{P}_1$ 称为 "态紧的"，如果任意 $P \in \mathscr{P}_1$，P 一致态紧，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在紧集 $K_\varepsilon \subset U$，使对任意 $P \in \mathscr{P}_1$，均有 $P(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$。

引理3.10（Prohorov 定理） $\mathscr{P}(U)$ 的态紧子集 $\mathscr{P}_1$ 的闭包是紧集（弱紧集）。

证明 先设 U 为紧距离空间。由 Riesz 表示定理可知 $\mathscr{P}(U)$ 是 $C(U)$ 的共轭空间中单位球面上的一个闭子集，因而它是 * 弱紧的。但是，这里的 * 弱收敛与 d 收敛是一样的，所以 $\mathscr{P}(U)$ 在 d 收敛下就是紧集。

对于一般的 U，由 Tychonov 定理，它同胚于紧距离空间 $[0, 1]^\infty$ 的一个子集，因此 $\bar{U}$ 紧。于是 $\mathscr{P}(\bar{U})$ 紧。$\mathscr{P}_1$ 自然地可以看成 $\mathscr{P}(\bar{U})$ 的子集。那么对任意列 $P_n \in \mathscr{P}_1$，$\{P_n\}$ 必有收敛子列 P_{n_k}，它在 $\mathscr{P}(\bar{U})$ 中收敛于某个 $\bar{P}(\in \mathscr{P}(\bar{U}))$。我们要证明：如果 $\bar{P}$ 在 U 上的限制为 P，那么 P 是 $(U, \mathscr{B}(U))$ 上概率测度，而且在 $\mathscr{P}(U)$ 中有 $P_{n_k} \to P$（这就是 $\mathscr{P}_1$ 在 $\mathscr{P}(U)$ 的闭包的弱紧性）。

由 $\mathscr{P}_1$ 的态紧性，存在 U 的紧子集 K_ε，使

$$P_{n_k}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

又由 $P_{n_k} \to \bar{P}$ 及弱收敛的性质，我们有

$$\bar{P}(K_\varepsilon) \geq \overline{\lim_{k \to \infty}} P_{n_k}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

因此

$$\bar{P}\left(\bigcup_m K_{\frac{1}{m}}\right) = 1.$$

但是 $\bigcup_m K_{\frac{1}{m}} \subset U$，所以 $\bar{P}$ 在 U 上的限制 P 仍是概率测度。由于 P_{n_k}

$\xrightarrow{\mathscr{P}(\overline{U})}\tilde{P}$，因此对任意$f\in C^{\circ}(U)$有

$$\int f\mathrm{d}P_{n_k}\to\int f\mathrm{d}\tilde{P}=\int f\mathrm{d}P,$$

也就是$P_{n_k}\xrightarrow{\mathscr{P}(U)}P$。引理得证。

引理3.11(Skorohod 实现定理)　Polish空间$(U,\mathscr{B}(U))$上的弱收敛概率测度列P_n可以实现为在$([0,1],\ \mathscr{B}[0,1],\lambda)$上a.e. $\mathrm{d}\lambda$收敛的U值随机"变量"(随机元)的分布列。即

如果$P_n\to P$，那么存在$([0,1],\mathscr{B}[0,1])$上U值可测变换X_n，X，使

1° $P^{X_n}(\equiv\lambda X_n^{-1})=P_n$，$P^X(\equiv\lambda X^{-1})=P$；

2° $X_n\to X$(a. e. $\mathrm{d}\lambda$)，其中$\mathrm{d}\lambda$是Lebesgue测度。

证明　要领是把U分成无穷个部分，并且把它们按P_n及P测度的大小改变成区间"压"到$[0,1]$上。两边有一个对应，这个"对应"就是X_n及X。

1° 由U可分，我们可取可数个半径不大于$1/2^{k+1}$的球$S_1^{(k)}$，$\cdots,S_m^{(k)},\cdots$，它们覆盖了U，而且

$$P_n(\partial S_m^{(k)})=P(\partial S_m^{(k)})=0\qquad(\text{任意}n,m,k)。\quad(3.33)$$

令

$$\tilde{S}_1^{(k)}=S_1^{(k)},$$
$$\tilde{S}_m^{(k)}=S_m^{(k)}\setminus(S_{m-1}^{(k)}\cup\cdots\cup S_1^{(k)}\quad(m>1),$$
$$\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k}=\tilde{S}_{i_1}^{(1)}\cap\cdots\cap\tilde{S}_{i_k}^{(k)}.$$

它们的直径均不大于$1/2^k$，而且$\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k,j}$或为$\varnothing$，或为$\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k}$的加细。

2° 在$[0,1)$上定义右半开区间$I_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}$及$I_{i_1,\cdots,i_k}$，其长度分别为$P_n(\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k})$及$P(\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k})$，而且对于固定的$k$满足：如果按$(i_1,\cdots,i_k)$的字典序排列有$(i_1,\cdots,i_k)<(j_1,\cdots,j_k)$，那么

$I_{i_1,\cdots,i_k}$ 在 $I_{i_1,\cdots,j_k}$ 左边。于是

$$[0,1)=\bigcup_{i_1,\cdots,i_k} I_{i_1,\cdots,i_k}=\bigcup_{i_1,\cdots,i_k} I^{(n)}_{i_1,\cdots,i_k}.$$

对于任意一个内点非空的集$\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k}$，我们任意取定它的一个内点$u_{i_1,\cdots,i_k}$，并且定义

$$\begin{aligned} X_n^{(k)}(\omega)&=u_{i_1,\cdots,i_k} \quad (\text{若}\omega\in I^{(n)}_{i_1,\cdots,i_k}),\\ X^{(k)}(\omega)&=u_{i_1,\cdots,i_k} \quad (\text{若}\omega\in I_{i_1,\cdots,i_k}). \end{aligned} \tag{3.34}$$

由于 $X_n^{(k+p)}(\omega)$与$X_n^{(k)}(\omega)$在同一个$\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k}$中，它们间的距离不超过 $1/2^k$。但是U是完备的，所以当 $k\to\infty$ 时 $X_n^{(k)}(\omega)$趋于某个极限，我们把它记成 $X_n(\omega)$。同理 $X^{(k)}(\omega)$也趋于某个 $X(\omega)$，又因为$\partial\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k}\subset(\partial S^{(1)}_{i_1})\cup\cdots\cup(\partial S^{(k)}_{i_k})$，所以它的 P_n 与 P 测度都是 0。从而那些没有内点的$\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k}$是$P_n$和$P$的零测集，其对应的$I_{i_1,\cdots,i_k}$应为空集。这样我们就有

$$X_n^{(k)}(\omega)\to X_n(\omega),\quad X^{(k)}(\omega)\to X(\omega)\quad (\text{对任意}\omega\in[0,1)).$$

3° 由于P_n弱敛到P，所以对P连续集$\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k}$有

$$\lambda(I^{(n)}_{i_1,\cdots,i_k})=P_n(\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k})\to P(\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k})=\lambda(I_{i_1,\cdots,i_k}).$$

再由$I^{(n)}_{i_1,\cdots,i_k}$的排法，得到$I^{(n)}_{i_1,\cdots,i_k}$的端点也趋于$I_{i_1,\cdots,i_k}$的相应端点。于是，如果$\omega\in$区间内点集$\mathring{I}_{i_1,\cdots,i_k}$，那么必定存在$n_0=n_0(\omega,i_1,\cdots,i_k)$，只要$n\geqslant n_0$，就有$\omega\in\mathring{I}^{(n)}_{i_1,\cdots,i_k}$。按 $X_n^{(k)}(\omega)$ 及 $X^{(k)}(\omega)$的定义，我们便有：对于 $n\geqslant n_0$ 时恒成立

$$X_n^{(k)}(\omega)=u_{i_1,\cdots,i_k}=X^{(k)}(\omega).$$

记

$$\Omega_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i_1,\cdots,i_k}\mathring{I}_{i_1,\cdots,i_k}.$$

我们有 $\lambda(\Omega_0)=1$，而且对 $\omega\in\Omega_0$ 有：当 k 取定且 $n\geqslant n_0(\omega)$ 时

$$\begin{aligned}
&d(X_n(\omega),X(\omega))\\
&\quad\leqslant d(X_n(\omega),X_n^{(k)}(\omega))+d(X_n^{(k)}(\omega),X^{(k)}(\omega))\\
&\qquad+d(X^{(k)}(\omega),X(\omega))\\
&\quad\leqslant\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

因此 $X_n\to X(\mathrm{a.e.\ d}\lambda)$。

又因为 $X^{(k)}\to X$，所以 $\lambda X^{(k)^{-1}}$ 弱敛于 λX^{-1}。但是按定义 $X^{(k)}$ 只取 $\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k}$ 的内点，因此对 $p\geqslant k$ 有

$$\begin{aligned}
(\lambda X^{(p)^{-1}})(\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k})&=\lambda(X^{(p)}(\omega)\in\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k})\\
&=\lambda(X^{(p)}(\omega)\in\tilde{S}^{\circ}_{i_1,\cdots,i_k})\\
&=\lambda(I_{i_1,\cdots,i_k})=P(\tilde{S}_{i_1,\cdots,i_k}).
\end{aligned}$$

由于 $s_i^{(k)}$ 都是 P 连续集，所以

$$\lim_{p\to\infty}(\lambda X^{(p)^{-1}})(S_i^{(k)})\geqslant P(S_i^{(k)}).$$

从而对任意开集 G 有

$$\lim_{p\to\infty}(\lambda X^{(p)^{-1}})(G)\geqslant P(G).$$

由弱极限的唯一性，我们得到 $\lambda X^{-1}=P$。同理也有 $\lambda X^{(n)-1}=P^{(n)}$。引理证毕。

命题3.2（W^d 值随机元列的分布的弱紧条件） 若 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上 d 维连续过程列 $X^{(n)}$ 满足

（C_1）对 n 一致地有

$$P(|X_0^{(n)}|>N)\to0\quad(N\to\infty);$$

（C_2）对任意 $T,\varepsilon>0$，并对 n 一致地有（一致概率连续）

$$P\left(\sup_{\substack{[0,T]\\|t-s|<\delta}}|X_t^{(n)}-X_s^{(n)}|>\varepsilon\right)\to0\quad(\delta\to0),$$

则存在子列 $X^{(n_k)}$ 及 $([0,1],\mathscr{B}[0,1],\lambda)$ 上 d 维连续过程列 $\tilde{X}^{(n_k)}$

及$\tilde{X}$，使

(1) $\tilde{X}^{(n_k)} \xrightarrow{W^d} \tilde{X}$ (a. e. dλ);

(2) $\tilde{X}^{(n_k)}$ 与 $X^{(n_k)}$ 同分布。

如果我们记

(C$'_1$) 存在 $M, \gamma > 0$ 使 $E|X_0^{(n)}|^\gamma \leqslant M$;

(C$'_2$) 对任意 $T>0$ 存在 $\alpha, \beta, M > 0$，只要 $t, s \in [0, T]$，就有 $E|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}|^\alpha \leqslant M|t-s|^{1+\beta}$。那么(C$'_1$)$\Rightarrow$(C$_1$)，(C$'_2$)$\Rightarrow$(C$_2$)。

证明 由引理3.10及引理3.11，命题前一部分的证明只需验证 $X^{(n)}$ 的分布 $P^{X^{(n)}} \equiv PX^{(n)-1}$ 在 $\mathscr{P}(W^d)$ 是一致态紧的。

由(C$_1$)，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $L>0$ 使

$$P^{X^{(n)}}\{w:\ |w_0| \leqslant L\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

而由(C$_2$)，对任意 $N, \varepsilon > 0$，存在 δ_N 使

$$P^{X^{(n)}}\left\{w:\ \max_{\substack{0 \leqslant s, t \leqslant N \\ |t-s| \leqslant \delta_N}} |w_t - w_s| > \frac{1}{N}\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{N+1}}.$$

我们定义

$$K_\varepsilon = \{|w_0| \leqslant L\} \cap \left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \left\{ \max_{\substack{0 \leqslant s, t \leqslant N \\ |t-s| \leqslant \delta_N}} |w_t - w_s| \leqslant \frac{1}{N} \right\} \right).$$

那么

$$P^{X^{(n)}}(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon,$$

而且 K_ε 中的 w 在$[0,T]$上是一致有界而且等度连续。所以它作为 W^d 的闭子集是紧集。所以$P^{X^{(n)}}$是一致态紧的。这就证明了命题的前半部分结论。

由 Chebyshev 不等式立得(C$'_1$)$\Rightarrow$(C$_1$)。当(C$'_2$)成立时，由引理 2.27 推出存在常数 C_1，使

$$P(|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}| \leqslant C_1 |t-s|^{\frac{\beta}{\alpha} - \varepsilon},\ 0 \leqslant s,\ t \leqslant T) \geqslant 1 - \delta,$$

因此(C$_2$)成立。命题证毕。

推论 若(C_2')中的$\alpha>1$，则只需要存在一个$h>0$，使$|t-s|<h$时(C_2')满足，就能保证

$$E|X_t^{(n)}-X_s^{(n)}|^\alpha\leqslant M\left(\left[\frac{T}{h}\right]+1\right)^\alpha|t-s|^{1+\beta}.$$

从而就知道(C_2)成立。

证明 只需利用$f(x)=x^\alpha$对$\alpha>1$时的凸性不等式就能推出(C_2')成立。

命题3.2也可以叙述成$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上测度族的弱列紧的形式，这就是

命题3.2′ 若$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上的概率测度族$\mathscr{P}_1$对于坐标过程w满足：

($\tilde{C}_1$) $\sup\limits_{P\in\mathscr{P}_1}P(|w_0|>N)\to0\ (N\to\infty)$；

($\tilde{C}_2$) $\sup\limits_{P\in\mathscr{P}_1}P\left(\max\limits_{\substack{0\leqslant s<t\leqslant T\\ t-s\leqslant\delta}}|w_t-w_s|>\varepsilon\right)\to0\ (\delta\to0)$，

那么$\mathscr{P}_1$有弱收敛子列。

并且($\tilde{C}_1$)，($\tilde{C}_2$)分别也有类似于(C_1')，(C_2')的充分条件($\tilde{C}_1'$)，($\tilde{C}_2'$)。

证明与命题 3.2 的证明相同。

§3.6 (弱)解的存在性

定理3.5 如果方程(3.15)的系数$\alpha(t,w)$，$\beta(t,w)$在任意$0\leqslant t\leqslant T$上都是有界的，而且二元连续，那么对于$(R^d,\mathscr{B}(R^d))$上任意分布μ，(3.15)存在以μ为初分布的解(X,B)。

证明 利用定理3.4，我们只需要证明定理3.4中的2°成立。先解一个近似问题。令

$$\varphi_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)}(t),$$

$$\alpha_n(t,w)=\alpha(\varphi_n(t),w),\quad \beta_n(t,w)=\beta(\varphi_n(t),w). \tag{3.35}$$

于是$\frac{k}{2^n}\leqslant t<\frac{k+1}{2^n}$有$\alpha_n(t,w)=\alpha\left(\frac{k}{2^n},w\right)\in\mathscr{B}_{\frac{k}{2^n}}(W^d)$。因此

$$\begin{cases}\alpha_n(t,w)=\alpha_n(t,w_{\cdot\wedge\frac{k}{2^n}}),\\ \beta_n(t,w)=\beta_n(t,w_{\cdot\wedge\frac{k}{2^n}})\quad\left(t<\frac{k+1}{2^n}\right).\end{cases} \tag{3.36}$$

作$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$，$(\mathscr{F}_t)$Brown运动$B$及$\mathscr{F}_0$可测的随机变量$\xi$，使$P(\xi\in\Gamma)=\mu(\Gamma)(\forall\Gamma\in\mathscr{B}(R^d))$。考虑近似问题

$$X_t=\xi+\int_0^t\alpha_n(s,X)\mathrm{d}B_s+\int_0^t\beta_n(s,X)\mathrm{d}s. \tag{3.37}$$

在$t<(k+1)/2^n$时，它可以由(3.36)简化成

$$X_t=\xi+\int_0^t\alpha_n(s,X_{\cdot\wedge\frac{k}{2^n}})\mathrm{d}B_s+\int_0^t\beta_n(s,X_{\cdot\wedge\frac{k}{2^n}})\mathrm{d}s. \tag{3.37'}$$

因此(3.37)的解可以用逐段解(3.37′)逐步求得。

当$\frac{k}{2^n}\leqslant t<\frac{k+1}{2^n}$时(3.37′)变成了

$$\begin{aligned}X_t&=X_{\frac{k}{2^n}}+\int_{\frac{k}{2^n}}^t\alpha\left(\frac{k}{2^n},\ X_{\cdot\wedge\frac{k}{2^n}}\right)\mathrm{d}B_s\\&\quad+\int_{\frac{k}{2^n}}^t\beta\left(\frac{k}{2^n},\ X_{\cdot\wedge\frac{k}{2^n}}\right)\mathrm{d}s\\&=X_{\frac{k}{2^n}}+\alpha\left(\frac{k}{2^n},\ X_{\cdot\wedge\frac{k}{2^n}}\right)\left(t-\frac{k}{2^n}\right)\\&\quad+\beta\left(\frac{k}{2^n},\ X_{\cdot\wedge\frac{k}{2^n}}\right)\left(B_t-B_{\frac{k}{2^n}}\right).\end{aligned}$$

这就得到了逐段确定X的递推公式。于是由$X_0=\xi$可以逐步确定(3.37)的解。我们记这个解为$X^{(n)}$。它显然满足命题3.2的条件

(C_1)。我们验证它也满足(C_2')。由(3.37)及矩不等式，利用$\alpha(t,w)$，$\beta(t,w)$的有界性，当$0\leqslant s<t\leqslant T$时我们有

$$
\begin{aligned}
&E|X_t^{(n)}-X_s^{(n)}|^4\\
&\leqslant 常数\left[E\left(\int_s^t \alpha_n(u,X^{(n)})\mathrm{d}B_u\right)^4\right.\\
&\qquad\left.+E\left(\int_s^t \beta_n(u,X^{(n)})\mathrm{d}u\right)^4\right]\\
&\leqslant C_1(T)E\left(\int_s^t \alpha_n(u,X^{(n)})^2\mathrm{d}u\right)^2\\
&\qquad+C_2(T)E\left(\int_s^t \beta_n(u,X^{(n)})^2\mathrm{d}u\right)^2\\
&\leqslant C(T)|t-s|^2,
\end{aligned}
$$

因此(C_2')满足。由命题3.2推出存在$([0,1],\mathscr{B}[0,1],\lambda)$上连续过程$(\bar{X}^{(n_k)}$及$\bar{X}$，使$\bar{X}^{(n_k)}$与$X^{(n_k)}$同分布，而且$\bar{X}^{n_k}\xrightarrow{W^d}\bar{X}$ (a.e.$\mathrm{d}\lambda$)。我们来证明$\bar{X}$满足定理3.4中条件2°。

记

$$\widetilde{\mathscr{F}}_t=\sigma\{X_s,s\leqslant t\},$$

$$\hat{\mathscr{F}}_t=\widetilde{\mathscr{F}}_t \text{ 在 } \mathrm{d}\lambda \text{ 下的完备(关于}\widetilde{\mathscr{F}}_\infty\text{)右连续化.}$$

对于$s<t$，任意有界连续的$F(w)\in\mathscr{B}_s(W^d)$及$f\in C_K^2$，利用$\alpha,\beta$的有界连续性及有界收敛定理和定理3.4，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int\left[\left(f(\bar{X}_t)-f(\bar{X}_s)-\int_s^t(Af)(u,\bar{X})\mathrm{d}u\right)F(\bar{X})\right]\mathrm{d}\lambda\\
&=\lim_{n_k\to\infty}\int\left[\left(f(\bar{X}_t^{(n_k)})-f(\bar{X}_s^{(n_k)})\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\int_s^t A^{(n_k)}f(u,\bar{X}^{(n_k)})\mathrm{d}u\right)F(\bar{X}^{(n_k)})\right]\mathrm{d}\lambda\\
&=0,
\end{aligned}
$$

其中$A^{(n_k)}$是在A中用α_{n_k}，β_{n_k}代替α,β后所得的微分算符。这

说明 $f(\tilde{X}_t)-f(\tilde{X}_0)-\int_s^t (Af)(u,\tilde{X})\mathrm{d}u$ 对 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 与概率测度 $\mathrm{d}\lambda$ 是鞅。由它的轨道连续性推出它也是 $(\hat{\mathscr{F}}_t)$ 鞅，而且平方可积，所以定理3.4的2°满足。从而得到 $\tilde{X}$ 是方程(3.15)的解。而且 $\tilde{X}_0$ 与 $X_0=\xi$ 同分布，即以 $\mu(\Gamma)$ 为分布。定理得证。

记号 我们约定往后把方程(3.15)简记为 SDE(α,β) 或 SDE$_{X_0}(\alpha,\beta)$(X_0 为初值)。特别当

$$\alpha(t,w)=\sigma(w_t),\quad \beta(t,w)=b(w_t)$$

时，记为 SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$。

定理3.6 设

$$\Phi_s=\begin{pmatrix}\Phi_{1,s}\\ \vdots\\ \Phi_{r,s}\end{pmatrix}\in\mathscr{L}_2,$$

而且在任意 $[0,T]$ 上有界，那么我们有

1° SDE(α,β) 有解，当且仅当 SDE$(\alpha,\beta+\alpha\Phi)$ 有解；

2° SDE(α,β) 具分布唯一性，当且仅当 SDE$(\alpha,\beta+\alpha\Phi)$ 具分布唯一性。

证明 1° 设 (X,B) 是 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ 上 SDE(α,β) 的解。令

$$\tilde{B}=B-\int_0^\cdot \Phi_s\mathrm{d}s,\quad \tilde{P}(A)=E(I_A z_t)\quad (A\in\mathscr{F}_t),$$

其中 z_t 是指数鞅：

$$z_t=\exp\left(\int_0^t \Phi_s^T\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^t|\Phi_s|^2\mathrm{d}s\right).$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t&=\alpha(t,w)(\mathrm{d}\tilde{B}_t+\Phi_t\mathrm{d}t)+\beta(t,w)\mathrm{d}t\\&=\alpha(t,w)\mathrm{d}\tilde{B}_t+(\beta(t,w)+\alpha(t,w)\Phi_t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

1°得证。

2°的证明。我们先证明一个事实：存在 r 维因果函数列 η，

使 $\alpha\Phi=\alpha\alpha^T\eta$。事实上，$(t,\omega)$固定后矩阵 α 是 $R^r\to R^d$的线性变换，从而 R^r 有正交分解

$$R^r=\{x:\ \alpha x=0\}\oplus\alpha^T(R^d).$$

相应地，对 $\Phi\in R^r$ 就分解成 $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$，其中 $\alpha\Phi_1=0$，而 Φ_2 可写成 $\alpha^T\eta$ 形式。由于 α 是因果函数的矩阵，$\{x:\ \alpha x=0\}$的基就可以选成因果函数。所以 Φ_1,Φ_2都是因果函数列，从而 η 也可以选成为因果函数的列。这样 $\alpha\Phi=\alpha\Phi_1+\alpha\Phi_2=\alpha\alpha^T\eta$。又当$(t,\omega)$固定后，$\alpha^T\eta$ 在 R^r 中的欧氏模$\|\alpha^T\eta\|\leqslant\|\Phi_2\|\leqslant\|\Phi\|$，因此 $\alpha^T\eta$ 是有界函数。从而可以把它取为1°中的 Φ。

设 SDE$(\alpha,\beta+\alpha\Phi)$具有分布唯一性。我们要证明 SDE$(\alpha,\beta)$也有分布唯一性。注意在1°中的 z_t 可以写成

$$\begin{aligned}z_t&=\exp\left[\int_0^t\eta^T\alpha\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^t\eta^T\alpha\alpha^T\eta\mathrm{d}s\right]\\&=\exp\left[\int_0^t\eta^T\mathrm{d}\left(X_s-X_0-\int_0^s\beta(u,X)\mathrm{d}s\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{2}\int_0^t\eta^T\alpha\alpha^T\eta\mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$

因此它是X的确定形式的泛函。

现在设$(X^{(i)},\beta^{(i)})(i=1,2)$是 SDE$(\alpha,\beta)$的两个解，而且对 $\forall\Gamma\in\mathscr{B}(R^d)$

$$P(X^{(1)}\in\Gamma)=P(X^{(2)}\in\Gamma)\overset{\text{记}}{=}\mu(\Gamma).$$

于是对于(设$(X^{(i)},B^{(i)})$在$(\Omega^{(i)},\mathscr{F}^{(i)},\mathscr{F}_t^{(i)},P^{(i)})$上)

$$\tilde{B}^{(i)}=B^{(i)}-\int_0^{\cdot}\alpha^T\eta\mathrm{d}s,$$

$$\tilde{P}^{(i)}(A)=E^{(i)}(I_Az_t^{(i)}),\qquad A\in\mathscr{F}_t^{(i)}.$$

$$z_t^{(i)}=\exp\left[\int_0^t\eta^T\mathrm{d}\left(X_s^{(i)}-X_0^{(i)}-\int_0^s\beta(u,X^{(i)})\mathrm{d}s\right)\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \eta^T a a^T \eta \mathrm{d}s\Big],$$

$(X^{(i)},\tilde{B}^{(i)})$是$(\Omega^{(i)},\mathscr{F}_\infty^{(i)},\mathscr{F}_t^{(i)},\tilde{P}^{(i)})$上SDE$(a,\beta+a\Phi)$的解，而且

$$\tilde{P}^{(i)}(X_0^{(i)}\in\Gamma)=P^{(i)}(X_0^{(i)}\in\Gamma)=\mu(\Gamma).$$

由假定SDE$(a,\beta+a\Phi)$具分布唯一性，所以$X^{(1)}$与$X^{(2)}$的$P^{(1)}$与$P^{(2)}$分布相同。但是$X^{(i)}$在$\tilde{P}^{(i)}$下的分布是由$(X^{(i)},z^{(i)})$在$P^{(i)}$下的(联合)分布确定的，同时$z_t^{(i)}$又是$X^{(i)}$的确定泛函，因此$X^{(i)}$的$\tilde{P}^{(i)}$分布由$X^{(i)}$的$P^{(i)}$分布所完全确定。因为$X^{(i)}$在$P^{(i)}$下同分布，所以$X^{(i)}$在$\tilde{P}^{(i)}$下也同分布。即SDE(a,β)具有分布唯一性。

又因为SDE(a,β)与SDE$(a,\beta+a\Phi)$地位是对称的，所以由SDE(a,β)具有分布唯一性也能推出SDE$(a,\beta+a\Phi)$有同样性质。定理证毕。

推论 若$\beta(t,\omega)$是有界因果函数向量列，则对任意初分布，SDE(I,β)存在解，而且具有分布唯一性。

任给$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$设$\mathscr{F}_0$随机变量$X_0$具有给定的初分布，又设$B$是初值为0的$(\mathscr{F}_t)$Brown运动，那么SDE$(I,\beta)$的这个解可由$(\Omega,\mathscr{F}_\infty,(\mathscr{F}_t),\tilde{P})$上$(X,\tilde{B})$给出，其中

$$X=X_0+B,$$

$$\tilde{B}=B-\int_0^t\beta(s,X)\mathrm{d}s,$$

$$\tilde{P}(A)=E(z_tI_A)\quad(A\in\mathscr{F}_t),$$

$$z_t=\exp\Big[\int_0^t\beta(s,X)^T\mathrm{d}B_s-\int_0^t\beta(s,X)^T\beta(s,X)\mathrm{d}s\Big].$$

定理3.7 若对任意T，$a(t,w)$，$\beta(t,w)$在$0\leqslant t\leqslant T$(对一切ω)有界，$a(t,w)$一致正定，又$a(t,w)$为二元连续的$d\times d$因果函数阵，$\beta(t,w)$为d维因果函数列，则对任意初值，SDE(a,β)存在解。

证明 令$\Phi=-a^{-1}\beta$。它满足定理3.6条件，因此SDE$(a,

β)与 SDE($\alpha,\beta+\alpha\Phi$) = SDE(α,0)有解与否是相同的。但是由定理3.5，SDE(α,0)有解，所以 SDE(α,β)有解。

在一维情形($d=1$)，我们有相当完整的结论：

定理3.8 设因果函数 $\alpha(t,w)$下有界：$\alpha(t,w)\geqslant c>0$，而且在任意$[0,T]$上有界，那么 SDE(α,0)有解的充要条件是：存在$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$及连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程$X$和一族对 t 严格递增的$(\mathscr{F}_t)$停时τ_t，使 $X_{t\cdot}$ 是$(\mathscr{F}_{\tau_t})$Brown 运动，而且

$$\tau_t=\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{\alpha^2(\tau_s,X)}\qquad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P)。\qquad(3.38)$$

在条件成立下，X就是 SDE(α,0)的解，而 τ_t 是X的特征$\langle X\rangle_t$的反函数。

证明 必要性。设(X,B)是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上初值为$X_0$的解，即 $X_t=X_0+\int_0^t\alpha(s,X)\mathrm{d}B_s$。则$\langle X\rangle_t=\int_0^t\alpha^2(s,X)\mathrm{d}s\geqslant c^2t$是严格递增的连续$(\mathscr{F}_t)$适当过程。由引理3.1，其反函数 τ_t 是严格递增的连续$(\mathscr{F}_t)$停时族，$\tau_0=0$。令

$$Y_t=X_{\tau_t}。$$

因为$\langle X\rangle_t$ 就是§1.9中定义的$\int_0^t\alpha(s,X)\mathrm{d}B_s$的内蕴时间 $t^*(t)$。现在我们有 $t^*(\infty)=\infty(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P)$。由定理1.6推出 Y_t 是$(\mathscr{F}_{\tau_t})$ Brown 运动。而且

$$\tau_t=\int_0^{\tau_t}\frac{1}{\alpha^2(s,X)}\mathrm{d}\langle X\rangle_s=\int_0^t\frac{1}{\alpha^2(\tau_u,X)}\mathrm{d}u。$$

充分性。设 τ_t,X 满足(3.38)。由于 $\alpha(s,w)\geqslant c>0$，所以 τ_t 是严格递增的$(\mathscr{F}_{\tau_t})$适应过程。从而它的反函数(记为 φ_t)是$(\mathscr{F}_{\tau_t})$停时，且对 t 连续。另一方面，由假定 $Y_t=X_{\tau_t}$是$(\mathscr{F}_{\tau_t})$ Brown 运动，我们有

$$X_{\cdot}-X_0=Y_{\varphi_\cdot}-Y_0\in\mathscr{M}_2^{loc}(\mathscr{F}_{\tau_{\varphi_t}})=\mathscr{M}_2^{loc}(\mathscr{F}_t).$$

$$\langle X\rangle_t=\langle Y_{\varphi_\cdot}\rangle_t=\langle Y\rangle_{\varphi_t}=\varphi_t.$$

但是(3.38)可用变换 $\tau_s=u$ 变为

$$\tau_t=\int_0^{\tau_t}\frac{1}{a^2(u,X)}\mathrm{d}\varphi_u\quad(\mathrm{a.e.}\,\mathrm{d}P).$$

因此

$$t=\int_0^t\frac{1}{a^2(s,X)}\mathrm{d}\varphi_s\quad(\mathrm{a.e.}\,\mathrm{d}P).$$

它的被积函数恒正，所以 $\mathrm{d}\varphi_s$ 与 $\mathrm{d}s$ 相互绝对连续，而且

$$\varphi_t=\int_0^t a^2(s,X)\mathrm{d}s.$$

于是我们得到

$$\langle X\rangle_t=\int_0^t a^2(s,X)\mathrm{d}s.$$

由引理3.8，存在$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B，使

$$X_t-X_0=\int_0^t a(s,X)\mathrm{d}B_s.$$

这说明(X,B)是 SDE$(a,0)$的解．定理证毕．

例 (随机加速度为位移的给定函数的随机运动的存在性) 设质点在直线上作随机运动，初位移是 d_0．位移为随机过程 D_t，速度为 $X_t=\frac{\mathrm{d}D_t}{\mathrm{d}t}$，随机加速度为 $a(D_t)$(意即$\mathrm{d}X_t=a(D_t)\mathrm{d}B_t$，其中 B 是 Brown 运动)，其中 $a(x)$有界可测有正下界．我们证明这种随机运动是存在的，也就是要证明随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}D_t=X_t\mathrm{d}t, & D_0=d_0,\\ \mathrm{d}X_t=a(D_t)\mathrm{d}B_t, & \text{初值 } X_0\end{cases}\tag{3.39}$$

存在解．为此，我们消去 D_t，得到

$$\mathrm{d}X_t=a\left(d_0+\int_0^t X_s\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}B_t.\tag{3.40}$$

对于这个方程的有解条件(3.38)即是

$$\tau_t = \int_0^t \frac{1}{a^2\left(d_0 + \int_0^{\tau_s} X_u \mathrm{d}u\right)} \mathrm{d}s \quad (\mathrm{a.e.d}P).$$

所以

$$P\left(\frac{\mathrm{d}\tau_t}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{a^2\left(d_0 + \int_0^{\tau_s} X_u \mathrm{d}u\right)},\ \mathrm{a.e.d}t\right) = 1.$$

即

$$P\left(\dot{\tau}_t = \frac{1}{a^2\left(d_0 + \int_0^t X_{\tau_s} \dot{\tau}_s \mathrm{d}s\right)},\ \mathrm{a.e.d}t\right) = 1.$$

记

$$z_t = \int_0^t X_{\tau_s} \dot{\tau}_s \mathrm{d}s.$$

于是我们有

$$P\left(\dot{\tau}_t = \frac{1}{a^2(d_0 + z_t)},\ X_{\tau_t} = \dot{z}_t a^2(d_0 + z_t), \mathrm{a.e.d}t\right) = 1.$$

设 $A(x)$为确定的函数:

$$A(x) = \int_0^x a^2(d_0 + z)\mathrm{d}z,$$

其反函数为 $A^{-1}(x)$，那么

$$P\left(\int_0^t X_{\tau_s} \mathrm{d}s = A(z_t), \mathrm{a.e.d}t\right) = 1;$$

因此

$$P\left(z_t = A^{-1}\left(\int_0^t X_{\tau_s} \mathrm{d}s\right),\ \mathrm{a.e.d}t\right) = 1.$$

我们也就有

$$P\left(\dot{\tau}_t = \frac{1}{a^2\left(d_0 + A^{-1}\left(\int_0^t X_{\tau_s} \mathrm{d}s\right)\right)},\ \mathrm{a.e.d}t\right) = 1.$$

对于任给$(\Omega,\mathscr{F},(\tilde{\mathscr{F}}_t),P)$Brown 运动$B$，由

$$\begin{cases} \tau_t = \dfrac{1}{a^2\left(d_0 + A^{-1}\left(\int_0^t B_s \mathrm{d}s\right)\right)}, \\ \tau_0 = 0 \end{cases}$$

确定τ_t。设其反函数为φ_t。定义

$$\begin{cases} X_\cdot = B_{\varphi_\cdot}, \\ \mathscr{F}_t = \tilde{\mathscr{F}}_{\varphi_t}. \end{cases}$$

于是τ_t, $X_\cdot$满足(3.38)。由定理3.8推出X是（3.40）的解。于是

$$D_t = d_0 + \int_0^t X_s \mathrm{d}s$$

是(3.39)的解。这就证明了随机运动的存在性。

§3.7 含δ函数的Ito过程与Ito公式

令

$$\tilde{b}(x) = b(x) + \delta(x-a),$$

其中$b(x)\in\mathscr{B}(R)$，$\delta(x-a)$是在a点的单位跳跃函数

$$H_a(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant a, \\ 0, & x < a \end{cases} \tag{3.41}$$

的形式微商；它是一个 Schwarz 意义下的广义函数：$\forall f\in L$,

$$\int f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x \equiv \int f(x)\mathrm{d}H_a(x) = f(a).$$

设X为连续半鞅，L_t^x为它在x的局部时。我们定义

$$\int_0^t f(X_s)\delta(X_s - a)\mathrm{d}s \equiv \int_0^t f(X_s)\mathrm{d}H_a(X_s)$$

$$\equiv \int L_t^x f(x)\mathrm{d}H_a(x) = f(a)L_t^a. \tag{3.42}$$

于是

$$\int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \bar{b}(X_s)\mathrm{d}s$$

仍是连续半鞅。形式上它也是 Ito 过程，不过 $\bar{b}$ 是奇异的，即含有 δ 函数，我们称它为广义 Ito 过程。实际上它是一个 Ito 过程加上一个特殊的可积增适应过程 L_t^a。

如果 X_t 满足广义 Ito 方程

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t + \bar{b}(X_t)\mathrm{d}t, \tag{3.43}$$

则称 X 为具奇异漂移系数 $\bar{b}$ 的 SDE$(\sigma,\bar{b})$的解。实际上(3.42)就是

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t + b(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}L_t^a. \tag{3.44}$$

在第六章中我们要讨论此类方程(在第六章设 $a=0$)，它相当于在 a 处设置一个反射壁。

显然，我们还可以设

$$\bar{b}(x) = b(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i \delta(x - a_i). \tag{3.45}$$

这就相当于在 $a_1,\cdots,a_m$ 设置反射壁。

下面我们对(3.43)中的X给出 Ito 公式的另一个形式，即最普通的形式，但含有 $\bar{b}$。

X既然满足（3.44），那么对 $f\in C^2$ 有 Ito 公式

$$\mathrm{d}f(X_t) = f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\mathrm{d}t, \tag{3.46}$$

右方了解成

$$f'(X_t)(\sigma(X_t)\mathrm{d}B_t + b(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}L_t^a) + \frac{1}{2}f''(X_t)\mathrm{d}t.$$

但是 L_t^a 只在$\{X_t = a\}$上有测度，所以由(3.42)

$$\int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}L_s^a = \int_0^t f'(X_s)I_{(X_s=a)}\mathrm{d}L_s^a$$

$$= f'(a)L_t^a = \int_0^t f'(X_s)\delta(X_s - a)\mathrm{d}s.$$

于是(3.46)的右方也可以了解为

$$f'(X_t)(a(X_t)\mathrm{d}B_t + \bar{b}(X_t)\mathrm{d}t) + \frac{1}{2}f''(X_t)\mathrm{d}t.$$

这样，我们有

定理3.9 设 $\bar{b}(x)$为(3.44)所定义，X是SDE$(a,\bar{b})$的解，那么X是连续半鞅，而且对$\forall f \in C^2$仍有

$$\mathrm{d}f(X_t) = f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\mathrm{d}t.$$

在这个Ito公式中$\bar{b}$包含了有限个δ函数。这个想法也可以推广到多维以及$\bar{b}$含有其他更为复杂的广义函数的情形中去。

如果F是两个凸函数之差，那么$F(X_t)$仍是连续半鞅，其表达式由Ito-Tanaka公式给出。在F更为特殊的情形：$F(x) = \sum a_i H_{a_i}(x)$，其中$H_{a_i}(x)$为(3.40)所定义，那么利用(3.42)的定义，可知这时对于(3.43)中的X，$F(x)$的Ito-Tanaka公式可以写成含有δ函数的Ito公式

$$\mathrm{d}F(X_t) = F'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}F''(X_t)\mathrm{d}t,$$

其中F''含有δ函数。

习 题

1．设定理3.2的条件满足，而且$M_t = B_t$（Brown运动），$A_t = t$，那么对整数$m \geqslant 1$，必存在常数C_m，使

$$EX_t^{2m} \leqslant (1 + E|X_0|^{2m})e^{C_m t}.$$

2．设线性常系数方程$\mathrm{d}X_t = \sigma\mathrm{d}B_t + bX_t\mathrm{d}t$的解$X$的初值$X_0$满足：$\exists\, \varepsilon > 0$使$Ee^{\varepsilon X_0^2} < \infty$，那么对于$t$固定，必$\exists\, \delta > 0$，使得$Ee^{\delta X_s^2}$在$0 \leqslant s \leqslant t$一致有界。

3. 设 $dX_t=\sigma(X_t)dB_t+b(X_t)dt$ 中系数 $\sigma(x)$ 有界(界为K)，$b(x)$为线性增长($|b(x)|\leqslant K(1+|x|)$)，Y满足 $dY_t=K dB_t+4KY_t dt$，而且 $Y_0=X_0$。那么我们有

1° $EX_t^{2m}\leqslant EY_t^{2m}$；

2° 若存在 $\varepsilon>0$使 $Ee^{\varepsilon X_0^2}<\infty$，则存在 $\delta>0$使

$$\sup_{[0,t]} Ee^{\delta X_s^2}<\infty.$$

4. 设 $\sigma(t,x)$,$b(t,x)$满足定理3.1注1的条件，X^x 是

$$X_t=x+\int_0^t\sigma(s,X_s)dB_s+\int_0^t b(s,X_s)ds$$

的解。那么存在常数 $C^{(N)}$，使

$$E|X_t^{(x)}-X_s^{(y)}|^2\leqslant C^{(N)}(|x-y|^2+|t-s|)$$
$$(|x|,|y|\leqslant N).$$

5. 用鞅问题的叙述方法重新证明命题3.1。

6. 若$\sigma(x)\geqslant\varepsilon>0$,$\sigma$,$b\in\mathscr{B}_b(R)$，$X$是方程

$$dX_t=\sigma(X_t)dB_t+b(X_t)dt, X_0=x$$

的解，求证X的局部满足 $L_t^x(X)>0$ ($\forall t>0$)。

第四章　齐次马氏型随机微分方程

本章讨论齐次马氏型随机微分方程(记为 SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$))

$$dX_t=\sigma(X_t)dB_t+b(X_t)dt, \qquad (4.1)$$

其中 $\sigma(x),b(x)$ 分别是 $\mathscr{B}(R^d)$ 函数的 $d\times r$ 矩阵和 d 维向量，B 是 r 维 Brown 运动。

对于显含 t 的情形，即 $\sigma(t,x),b(t,x)$ 的情形，也有相应的一些结论。证明相仿但较繁琐，所以在本章中一般不去讨论它们。

§4.1　解的存在性与分布唯一性

在 SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$)的解的唯一性的讨论中，需要一个重要的分析工具：奇异积分的 L_p 估计。由于证明相当长，我们只引用它而略去证明。这就是

引理4.1(Stein-Fefferman的L_p估计)　记 d 维 Brown 运动的预解式为$(R_\lambda f)(x)$：

$$(R_\lambda f)(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right)f(y)dydt,$$

则对于固定的 $p>1$，有

$$\left\|\frac{\partial^2(R_\lambda)f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,\quad (\forall f\in C_0^\infty(R^d)), \qquad (4.2)$$

其中$\|\quad\|_p$指 L_p 模。

与引理3.7的考虑相类似，在讨论(4.1)的存在唯一性时不

妨假定X为$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上的坐标过程w，再由命题3.1及定理3.4推出：(4.1)有解且具有分布唯一性，当且仅当在$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上的唯一概率P_x，使

$$P_x(w_0=x)=1, \tag{4.3}$$

并且对任意$f\in C_K^2$，对P_x有

$$\begin{aligned}M_t^{(f)}\equiv&f(w_t)-f(w_0)\\&-\int_0^t(Af)(w_s)\mathrm{d}s\in\mathscr{M}_2(\overline{\mathscr{B}}_t(W^d)),\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中

$$\begin{gathered}(Af)(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i},\\ a(x)=(a^{ij}(x))=\sigma(x)\sigma(x)^T.\end{gathered} \tag{4.5}$$

定义4.1 如果$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上测度P_x满足(4.3)和(4.4)，则我们简称P_x为鞅问题$\mathfrak{M}_x(a(\cdot),b(\cdot))$的解。

记

$$\mathscr{P}(x;\ a,b)=\{P_x:\ P_x\text{为鞅问题}\mathfrak{M}_x(a(\cdot),b(\cdot))\text{的解}\}$$

(如果在(4.4)中用一个$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上$(\mathscr{B}_t(W^d))$适应连续过程$X(w)$代替$w.$，则相应的集合记成$\mathscr{P}^X(x;\ a,b)$)。

定义4.2 如果对$\forall x\in R^d$，$\mathscr{P}(x;a,b)$只有一个元素P_x，则我们称鞅问题$\mathfrak{M}(a(\cdot),b(\cdot))$(指$\forall x,\mathfrak{M}_x(a(\cdot),b(\cdot))$)是适定的。

下面的可测性引理需要用Kuratowski定理：完备可分距离可测空间$(U,\mathscr{B}(U))$的某个Borel子集到完备可分距离可测空间$(V,\mathscr{B}(V))$的一一在上可测变换的逆变换必是可测的。

这个定理的证明可参见Parthasarathy：《Probability measures in Metric Space》。

引理4.2(可测性引理) 若$a(x),b(x)$局部有界且可测，又设鞅问题$\mathfrak{M}(a,b)$适定，则P_x是$(x\in)R^d$到$\mathscr{P}(W^d)$(参见§3.5)

的可测变换。

证明 首先注意到我们有存在可数个$\{f_n\}\subset C_K^2$，使对任意$f\in C_K^2$及$\varepsilon>0$,存在$f_{n_k}\in\{f_n\}$，满足

$$\|f_{n_k}-f\|_{C^2}\equiv\|f_{n_k}-f\|_c+\sum_i\left\|\frac{\partial f_{n_k}}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_C$$
$$+\sum_{i,j}\left\|\frac{\partial^2 f_{n_k}}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_C<\varepsilon,$$

取$(C[0,r_i])^d$的一个可数稠集为$\{g_m^{(r_i)}\}$,其中$\{r_i\}$为全体非负有理数。记

$\mathscr{D}=\{P:\ P\in\mathscr{P}(W^d)，存在x\in R^d，使P\in\mathscr{P}(x;\ a,b)\}$。

对于R^d中的可数稠集$\{x_l\}$，我们有

$$\mathscr{D}=\bigcup_{x\in R^d}\bigcap_{\substack{f\in C_K^2,\ s<t\\ g\in(C[0,s])^d}}\{P:\ P(w_0=x)=1,$$
$$E[(M_t^{(f)}-M_s^{(f)})g(w)]=0\}$$
$$=\bigcap_{r_j>r_i}\bigcap_{n,m=1}^{\infty}\bigcup_{x\in R^d}\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{P:\ P\left(|w_0-x|\leqslant\frac{1}{k}\right)=1,\right.$$
$$\left.E[(M_{r_j}^{(f_n)}-M_{r_i}^{(f_n)})g_m^{(r_i)}(w)]=0\right\}$$
$$=\bigcap_{r_j>r_i}\bigcap_{m,n,k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\left\{P:\ P\left(|w_0-x_l|\leqslant\frac{2}{k}\right)=1,\right.$$
$$\left.E[(M_{r_j}^{(f_n)}-M_{r_i}^{(f_n)})g_m^{(r_i)}(w)]=0\right\}.$$

由于花括号中的集是$\mathscr{P}(W^d)$中的闭集，所以$\mathscr{D}$是$\mathscr{P}(W_d)$中Borel集。

定义$\mathscr{P}\to R^d$的变换h：对$P\in\mathscr{D}$，令

$$h(P)=x\quad（如果P(w_0=x)=1）。$$

对于 R^d 中任意闭球 S，我们有(相对于$\mathscr{D}$)

$$h^{-1}(S)=\bigcup_{x\in s}\{P:\ h(P)=x\}$$

$$=\bigcup_{x\in s}\{P:\ P(w_0=x)=1\}$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{x\in s}\left\{P:\ P\left(|w_0-x|\leqslant\frac{1}{k}\right)=1\right\}$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{x_i\in s}\left\{P:\ P\left(|w_0-x_i|\leqslant\frac{2}{k}\right)=1\right\}.$$

所以 $h^{-1}(S)$是$\mathscr{P}(W^d)$的 Borel 子集，并且也是$\mathscr{D}$的 Borel 子集。由典型逼近立得 h 是$\mathscr{D}$到 R^d 的可测变换。又由于假定了鞅问题$\mathfrak{M}(a,b)$的适定性，h 是双射(一一在上的)，根据 Kuratowski 定理推出其逆变换 $h^{-1}(x)$也是可测的。但按定义 $h^{-1}(x)=P_x$。这样我们就证明了 P_x 对 x 的可测性。引理证毕。

推论 设 $a=\sigma\sigma^T$，且 $\sigma(x),b(x)$可测，局部有界，若鞅问题$\mathfrak{M}(a,b)$适定，则 SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$)有解且有分布唯一性。反之，只要 SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$i)具有分布唯一的解，则鞅问题 $\mathfrak{M}(a,b)$适定。

证明 设$\{P_x:\ x\in R^d\}$为鞅问题$\mathfrak{M}(a,b)$的解，μ 为 R^d 上概率分布。由引理4.2

$$P_\mu\equiv\int P_x\mu(\mathrm{dx})$$

有确切含义，而且是$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上概率测度。在 P_μ 下的坐标过程 w. 即是 SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$)的解。用命题3.1，定理3.4及鞅问题的适定性便得解的分布唯一性。

反过来，如果 SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$)具有分布唯一的解，那么由定理3.4得到鞅问题$\mathfrak{M}(a,b)$的适定性。

引理4.3 设 $P_x\in\mathscr{P}(x;a,b)$，τ 为有界$(\mathscr{B}_{t+}(W^d))$停时。

令$\tilde{P}^w(A)=P^w(\theta_\tau^{-1}A)$，其中$\theta_\tau$是推移算子：$\theta_\tau w_\cdot=w_{\cdot+\tau}$，而$P^w(A)$是$P_x(A|\mathscr{B}_{\tau+}(W^d))$的正则条件分布。那么

$$P_x\{\tilde{P}^w\in\mathscr{P}(w_{\tau(w)};\ a,b)\}=1.$$

证明 由 Doob 停止定理，(4.4)所定义的$M_t^{(f)}$对P_x是$(\mathscr{B}_{(t+\tau)+}(W^d))$平方可积鞅。因此对$\forall A\in\mathscr{B}_{s+}(W_d)$及$\forall\Lambda\in\mathscr{B}_{\tau+}(W^d)$我们有

$$E_x[(M_{t+\tau}^{(f)}-M_{s+\tau}^{(f)})(\theta_\tau I_A)I_\Lambda]=0.$$

但是Λ是$\mathscr{B}_{\tau+}(W^d)$中任意集合，所以

$$E_x[(M_{t+\tau}^{(f)}-M_{s+\tau}^{(f)})\theta_\tau I_A|\mathscr{B}_{\tau+}(W^d)]=0\quad(\text{a.e.}\,dP_x).$$

也就是

$$E_x[\theta_\tau[(M_t^{(f)}-M_s^{(f)})I_A]|\mathscr{B}_{\tau+}(W^d)]=0\quad(\text{a.e.}\,dP_x).$$

由$\tilde{P}^w$的定义并用典型逼近，我们从上式推出

$$\tilde{E}^w[(M_t^{(f)}-M_s^{(f)})I_A]=0\quad(\text{a.e.}\,dP_x).$$

又$A\in\mathscr{B}_{s+}(W^d)$也可任意取，所以

$$\tilde{E}^w[(M_t^{(f)}-M_s^{(f)})|\mathscr{B}_{s+}(W^d)]=0\quad(\text{a.e.}\,dP_x).$$

因此

$$P_x\{M_t^{(f)}\text{关于}\tilde{P}^w\text{是}(\mathscr{B}_{t+}(W^d))\text{鞅}\}=1.$$

另一方面，设ξ为运算“停止于τ”所对应的$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$自身的可测变换：$\xi(w)=w^\tau$(回忆起：$(w^\tau)_t=w_{t\wedge\tau}$)。由(3.18)，我们有：a.e.$dP_x$地

$$\begin{aligned}1&=P^w(\xi^{-1}\xi(w))=P^w(\{w':\ \xi(w')=\xi(w)\})\\&\leqslant P^w(\{w':\ w'_\tau=w_\tau\})\\&=P^w(\theta_\tau^{-1}\{w':\ w'_0=w_\tau\})\\&=\tilde{P}^w(w':\ w'_0=w_\tau).\end{aligned}$$

也就是

$$P_x\{w'\text{的初值为}w_\tau\}=1.$$

综合起来便得我们的引理。

命题4.1 若对任意$x\in R^d$，$\mathscr{P}(x;\ a,b)\neq\varnothing$，且对于任意

$P_x, P'_x \in \mathscr{P}(x;\ a,b)$恒有：对 $\forall f \in C_K^2$

$$E_x f(w_t) = E'_x f(w_t),$$

那么对任意有限$(\mathscr{B}_{t+}(W^d))$停时τ，$\mathscr{P}(x;\ a,b)$对坐标过程$w.$具有"强马氏性质"。亦即，对任意有界$\eta \in \mathscr{B}(W^d)$恒有

$$E_x(\theta_\tau \eta \mid \mathscr{B}_{\tau+}(W^d)) = E_{w_\tau} \eta \quad (\text{a.e.}\, dP_x). \tag{4.6}$$

证明 先设τ有界。引理4.3说明了

$$P_x\{w:\ \tilde{P}^w \in \mathscr{P}(w_\tau;\ a,b)\} = 1.$$

于是由命题的假定立刻得到：$\forall f \in C_K^2(R_d)$，我们有

$$\tilde{E}^w f(w'_t) = E_{w_\tau} f(w'_t).$$

也就是

$$E_x(\theta_\tau f(w'_t) \mid \mathscr{B}_{\tau+}(W^d)) = E_{w_\tau} f(w'_t) \quad (\text{a.e.}\, dP_x). \tag{4.7}$$

下面我们用典型逼近证明上式中的$f(w'_t)$可以换成η。

1° 证明对有界的$f \in \mathscr{B}(R^d)$，(4.7)仍然成立。事实上C_K^2函数可以一致近似C_K函数，而C_K函数又可有界收敛地逼近R^d中开球的示性函数(例如可用

$$f_n(x) = \frac{\inf\limits_{y \in S^c} |x-y|}{\frac{1}{n} + \inf\limits_{y \in S^c} |x-y|} \quad (S^c \text{ 为开球}S\text{的余集})$$

来近似$I_S(x)$)。用测度论典型方法可推出(4.7)在f为$\mathscr{B}(R^d)$中集合的示性函数时仍成立。最后可推广至一般有界的

$$f \in \mathscr{B}(R^d).$$

2° 证明(4.7)中的$f(w')$可换成η。首先考虑最简单情形：$\eta = f(w_t, w_s), s<t$，其中$f(x,y) = I_{\Gamma_1 \times \Gamma_2}(x,y)(\Gamma_i \in \mathscr{B}(R^d))$。这时用1°，我们有：a.e.$dP_x$地

$$\begin{aligned}
&E_x(\theta_\tau I_{\Gamma_1 \times \Gamma_2}(\omega_t, \omega_s) \mid \mathscr{B}_{\tau+}) \\
&= E_x[E_x(\theta_\tau I_{\Gamma_1}(\omega_t) I_{\Gamma_2}(\omega_s) \mid \mathscr{B}_{(s+\tau)+}) \mid \mathscr{B}_{\tau+}] \\
&= E_x[\theta_\tau I_{\Gamma_2}(\omega_s) E_x(\theta_{s+\tau} I_{\Gamma_1}(\omega_{t-s}) \mid \mathscr{B}_{(s+\tau)+}) \mid \mathscr{B}_{\tau+}] \\
&= E_x[\theta_\tau I_{\Gamma_2}(\omega_s) E_{\omega_{\tau+s}} I_{\Gamma_1}(\omega_{t-s}) \mid \mathscr{B}_{\tau+}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E_x[\theta_\tau(I_{\Gamma_2}(\omega_s)E_{\omega_s}I_{\Gamma_1}(\omega_{t-s}))|\mathscr{B}_{\Gamma+}] \\
&= E_{\omega_\tau}[I_{\Gamma_2}(\omega_s)E_{\omega_s}I_{\Gamma_1}(\omega_{t-s})] \\
&= E_{\omega_\tau}[I_{\Gamma_2}(\omega_s)E_{\omega_s}(I_{\Gamma_1}(\omega_t)|\mathscr{B}_{s+})] \\
&= E_{\omega_\tau}[E_{\omega_\tau}(I_{\Gamma_2}(\omega_s)I_{\Gamma_1}(\omega_t)|\mathscr{B}_{s+})] \\
&= E_{\omega_\tau}(I_{\Gamma_1}(\omega_t)I_{\Gamma_2}(\omega_s)).
\end{aligned}
$$

用同样的推理可证，当$\eta = I_{\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_n}(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})(\Gamma_i \in \mathscr{B}(R^d))$时(4.6)成立。再用集合类的典型逼近可知对$n = I_\Gamma(w_{t_1},\cdots,w_{t_n})(\Gamma \in \mathscr{B}(R^d)^n)$等式(4.6)仍正确。但是这样的$\Gamma$就是$\mathscr{B}(W^d)$中的柱集。再用一次集合的典型近似，就得到(4.6)对$\eta = I_A(w.)(A \in \mathscr{B}(W^d))$仍成立。最后用我们在测度论中熟悉的简单函数逼近就得到一般有界η的等式(4.6)。

3° 我们要去掉关于τ有界性的限制。设τ为有限$(\mathscr{B}_{t+}(W^d))$停时。令$\tau_n = \tau\wedge n$，那么τ_n是有界的。我们设$\eta(w)$是非负有界连续的，于是由前段已证明的事实我们有

$$E_x(\theta_{\tau_n}\eta|\mathscr{B}_{\tau_n+}) = E_{w_{\tau_n}}\eta = E_{w_\tau}\eta \quad (\text{在 } \tau\leqslant n \text{ 上 a.e.d} P_x \text{ 地}).$$

往证

$$E_x(\theta_{\tau_n}|\mathscr{B}_{\tau_n+}) \xrightarrow{L_1} E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{B}_{\tau+}). \tag{4.8}$$

事实上，因为η有界，所以$\{E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{B}_{\tau_n+}),\ E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{B}_{\tau+})\}$关于$P_x$是$(\mathscr{B}_{\tau_n+},\mathscr{B}_{\tau+})$一致可积鞅，从而

$$(\mathrm{L}_1)\ \lim_n E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{B}_{\tau_n+}) = E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{B}_{\tau+}) \quad (\text{a.e.d}P_x).$$

这样，当$n\to\infty$时用有界收敛性及η的连续性，我们就得到

$$
\begin{aligned}
&E_x|E_x(\theta_{\tau_n}\eta|\mathscr{B}_{\tau_n+}) - E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{B}_{\tau+})| \\
&\leqslant E_x|E_x(\theta_{\tau_n}\eta|\mathscr{B}_{\tau_n+}) - E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{B}_{\tau_n+})| \\
&\quad + E_x|E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{B}_{\tau_n+}) - E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{B}_{\tau+})| \\
&\leqslant E_x|\theta_{\tau_n}\eta - \theta_\tau\eta| + 0(1)\to 0.
\end{aligned}
$$

这说明(4.6)对有限$\mathscr{B}_{\tau+}(W^d)$停时及非负有界连续的η成立。由单调类典型逼近就立刻得到命题。

注 如果把命题4.1中的坐标过程$w_\cdot$换成$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上$(\mathscr{B}_t(W^d))$适应过程$X(w)$，$\mathscr{P}(x;\ a,b)$换成$\mathscr{P}^X(x;\ a,b)$，那么在相应的假设下仍有对应的结论：$\mathscr{P}^X(x;\ a,b,)$：关于X及有限$(\mathscr{B}_{t+}(W^d))$停时τ有强马氏性：对任意有界$\eta\in\mathscr{B}(W^d)$及$P_x\in\mathscr{P}^X(x;\ a,b)$恒有

$$E_x(\theta_\tau\eta\,|\,\mathscr{B}_{\tau+}(W^d))=E_{X_\tau}\eta\quad(\text{a.e.d}P_x)$$

(这种X的典型例子就是停止过程)。

(证明完全相似。)

注意，$\mathscr{P}^X(x;\ a,b)$中的测度定义于$\mathscr{F}_X$(X生成的σ代数)上。

引理4.4 (Brown运动的微扰) 如果$\sigma(x)$连续，$a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T\geqslant c_1I>0$，而且$a(x)$与$I$一致地$\varepsilon$相近，即存在$\varepsilon>0$，使对任意$x\in R^d$，恒有

$$|a^{ij}(x)-\delta_{ij}|\leqslant\varepsilon,\tag{4.9}$$

那么当ε充分小时鞅问题$\mathfrak{M}(a,0)$适定。

证明 由定理3.5推出鞅问题$\mathfrak{M}(a,0)$的解集$\mathscr{P}(x;a,0)\neq\varnothing$。记Brown运动的转移密度为$b(t,x,y)$

$$b(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right).$$

其预解式为

$$R_\lambda f(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int b(t,x,y)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

对于$p>d/2$及任意$f\in L_p$，我们有

$$|R_\lambda f(x)|\leqslant\|f\|_p\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}b(t,x,y)\,\mathrm{d}t\right\|_{p'}\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$$

$$\leqslant\|f\|_p\int_0^\infty e^{-\lambda t}\|b(t,x,y)\|_{p'}\,\mathrm{d}t$$

$$= \|f\|_p \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\frac{\left(2\pi \frac{t}{p'}\right)^{d/2}}{(2\pi t)^{p' d/2}} \int b\left(\frac{t}{p'} x, y\right) dy \right]^{\frac{1}{p'}} dt$$

$$= 常数 \cdot \|f\|_p \int_0^\infty (2\pi t)^{-\frac{d}{2}\left(1-\frac{1}{p'}\right)} e^{-\lambda t} \, dt$$

$$= 常数 \cdot \|f\|_p \int_0^\infty (2\pi t)^{-\frac{d}{2p}} e^{-\lambda t} \, dt \equiv \gamma_p \|f\|_p \tag{4.10}$$

($\gamma_p < \infty$，当且仅当 $p > d/2$)。

设 $P_x \in \mathscr{P}(x; a, 0)$，$f \in \mathscr{B}(R^d)$。定义 P_x 的预解式 $\mu(f)$（依赖 $\lambda > 0$ 和 x）为

$$\mu(f) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} E_x f(w_t) dt.$$

因为 P_x 是鞅问题 $\mathfrak{M}_x(a, 0)$ 的一个解，所以对 $f \in C_b^2$（有界 C^2 函数类）有

$$E_x f(w_t) = f(x) + E_x \int_0^t (Af)(w_s) ds.$$

用分部积分便得

$$\lambda \cdot \mu(f) = f(x) + E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} (Af)(w_t) dt = f(x) + \mu(Af).$$

特别，如果 $f \in R_\lambda C_0^\infty$，那么 $f, Af \in C_b^2$，而且上式变为

$$\mu(\lambda f) = f(x) + \frac{1}{2} \mu\left(\sum_{i,j} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

对于 Laplace 算符 Δ，我们就有

$$\mu\left(\lambda f - \frac{1}{2} \Delta f\right)$$

$$= f(x) + \frac{1}{2} \mu\left(\sum_{i,j} (a^{ij}(x) - \delta_{ij}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

取 $f = R_\lambda h$ ($h \in C_0^\infty$)，注意到 $\left(\lambda - \frac{1}{2}\Delta\right) R_\lambda = I$，我们得到

$$\mu(h)=R_\lambda h+\frac{1}{2}\mu\left(\sum_{i,j}(a^{ij}(x)-\delta^{ij})\frac{\partial^2 R_\lambda h}{\partial x_i\partial x_j}\right). \quad (4.11)$$

利用(4.10),(4.8)及引理4.1,上式就变为

$$|\mu(h)|\leqslant r_p\|h\|_p+\frac{\varepsilon d^2}{2}\|\mu\|_{p'}\cdot C_p\cdot\|h\|_p, \quad (4.12)$$

其中 $p>d/2$, 而且

$$\|\mu\|_{p'}=\sup_{f\in L_p}\frac{|\mu(f)|}{\|f\|_p}\leqslant\infty.$$

我们来证明$\|\mu\|_{p'}<\infty$, 也就是说 $\mu(f)$ 可以看成为 L_p 上的有界线性泛函. 为此我们对作为方程

$$w_t=x+\int_0^t\sigma(w_s)\mathrm{d}B_s \quad (\text{a.e.}\,\mathrm{d}P_x)$$

的解的坐标过程 w. 作梯形近似 $w^{(m)}$:

$$w_t^{(m)}=\sum_k w_{\frac{k}{2^m}\wedge m}I_{\left[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}\right)}(t).$$

定义

$$X_t^{(m)}=x+\int_0^t\sigma(w_s^{(m)})\mathrm{d}B_s,$$

那么 $X_t^{(m)}\xrightarrow{p}w_t$($\mathrm{d}P_x$ 意义).因此(易证 $X^{(m)}$ 弱紧)$X^{(m)}$在P_x下的分布 $P_t^{(m)}$ 弱敛到 P_x.对$y\in R^d$ 记 $P_t^{(m)}(w;y)$为

$$P_x(X_t^{(m)}<y\,|\,\mathscr{B}_{\frac{k}{2^m}+}(W_d))$$

的正则条件分布.由于当$t\in\left[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}\right)$时$X_t^{(m)}$可以表成

$$X_t^{(m)}=\text{某个}\,\zeta_k+\sigma(w_{\frac{k}{2^m}})B_t,$$

其中 $\zeta_k\in\mathscr{B}_{\frac{k}{2^m}+}(W^d)$,故 $P_t^{(m)}(w;y)$有正态密度$N(\zeta_k,a(w_{\frac{k}{2^m}})t)$.与(4.10)完全类似地, 我们有

$$\left|\int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}}\mathrm{e}^{-\lambda t}E_x(f(X_t^{(m)})\,|\,\mathscr{B}_{\frac{k}{2^m}+}(W^d))\mathrm{d}t\right|$$

$$=\int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}} e^{-\lambda t}$$

$$\times\left[\int\left(\frac{\exp\left[-\frac{1}{2t}(y-\zeta_k)^T\left[a(w_{\frac{k}{2^m}})\right]^{-1}(y-\zeta_k)\right.}{(\det a(w_{\frac{k}{2^m}}))^{\frac{1}{2}}t^{\frac{d}{2}}(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\right)^{p'}\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p'}}$$

$$\times\mathrm{d}t\cdot\|f\|_p.$$

但是按引理假定，必定有 c_2 使 $0<c_1I\leqslant a(x)\leqslant c_2I$。因此

$$\text{上式右方}\leqslant\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{d}{2}}\|f\|_p\int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}}e^{-\lambda t}\|b(c_2t,\zeta_k,y)\|_{p'}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{d}{2}}(2\pi c_2)^{-\frac{d}{2p}}\int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}}t^{-\frac{d}{2p}}e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}t\cdot\|f\|_p.$$

于是

$$|\mu^{(m)}(f)|=\left|\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}E_xf(X_t^{(m)})\mathrm{d}t\right|$$

$$=\left|\sum_k E_x\int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}}E_x(f(X_t^{(m)})\,|\,\mathscr{B}_{\frac{k}{2^m}+}(W^d))\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{d}{2}}(2\pi c_2)^{-\frac{d}{2p}}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}t^{-\frac{d}{2p}}\mathrm{d}t\|f\|_p$$

$$=\gamma_p\|f\|_p.$$

也就是说，线性泛函 $\mu^{(m)}(f)$（扩张到 $f\in L_p$）的模对 m 一致地有

$$\|\mu^{(m)}\|_{p'}\leqslant\gamma_p<\infty.$$

但是 $P^{(m)}$弱敛到 P_x，所以

$$\|\mu\|_{p'} \equiv \sup_{\|f\|_p \leq 1} |\mu(f)| = \sup_{\substack{\|f\|_p \leq 1 \\ f \in C_0^\infty}} |\mu(f)|$$

$$= \sup_{\substack{\|f\|_p \leq 1 \\ f \in C_0^\infty}} |\lim_m \mu^{(m)}(f)| \leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \sup_{\substack{\|f\|_p \leq 1 \\ f \in C_0^\infty}} |\mu^{(m)}(f)|$$

$$= \overline{\lim_{m\to\infty}} \sup_{\|f\|_p \leq 1} |\mu^{(m)}(f)| = \overline{\lim_{m\to\infty}} \|\mu^m\|_{p'}$$

$$\leqslant \bar{\gamma}_p < \infty.$$

于是(4.12)变成

$$\|\mu\|_{p'} \|h\|_p \leqslant r_p \|h\|_p + \frac{\varepsilon}{2} d^2 C_p \|\mu\|_{p'} \|h\|_p.$$

解出$\|\mu\|_{p'}$,我们得到

$$\|\mu\|_{p'} \leqslant \frac{r_p}{1 - \frac{\varepsilon}{2} d^2 C_p} \quad (\text{若 } \varepsilon d^2 C_p < 2). \qquad (4.13)$$

如果还有另一个$P_x' \in \mathscr{P}(x;\ a, 0)$，那么对应于(4.11)，对于$h \in C_0^\infty$,我们还有

$$\mu'(h) = R_\lambda h + \frac{1}{2} \mu' \left(\sum_{i,j} (a^{ij}(x) - \delta_{ij}) \frac{\partial^2 R_\lambda h}{\partial x_i \partial x_j} \right), \qquad (4.11')$$

其中

$$\mu'(h) \equiv E_x' \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(w_t) dt.$$

从(4.11)减去(4.11′)后，与(4.11)类似地，我们得到

$$|(\mu - \mu')(h)|$$

$$= \left| (\mu - \mu') \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} (a^{ij}(x) - \delta^{ij}) \frac{\partial^2 R_\lambda h}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right|$$

$$\leqslant \|\mu - \mu'\|_{p'} \cdot \frac{\varepsilon}{2} d^2 C_p \|h\|_p.$$

于是我们只要选取ε充分小，对任意$h \in C_0^\infty$就有

$$|(\mu - \mu')(h)| \leqslant \frac{1}{2} \|\mu - \mu'\|_{p'} \|h\|_p.$$

把$(\mu-\mu')$扩张成L_p的泛函后，我们就有

$$\|\mu-\mu'\|_{p'}\leqslant\frac{1}{2}\|\mu-\mu'\|_{p'}.$$

因此

$$\|\mu-\mu'\|_{p'}=0.$$

特别地，对于$f\in C_0^\infty\subset L_p$，我们应有$\mu(f)=\mu'(f)$。从而

$$\int f(w_t)P_x(\mathrm{d}w)=\int f(w_t)P'_x(\mathrm{d}w). \tag{4.14}$$

用典型逼近(即命题4.1的证明中所用的逼近)推得(4.14)对有界的$f\in\mathscr{B}(R^d)$仍成立，特别地有

$$P_x(w_t\in\Gamma)=P'_x(w_t\in\Gamma)\quad(\forall\Gamma\in\mathscr{B}(R^d)).$$

应用命题4.1我们推出$\mathscr{P}(x;\ a,0)$有强马氏性。因此对$t_1<t_2$

$$\begin{aligned}P_x(w_{t_1}\in\Gamma_1,w_{t_2}\in\Gamma_2)&=E_x(I_{w_{t_1}\in\Gamma_1},I_{w_{t_2}\in\Gamma_2})\\&=E_x[I_{w_{t_1}\in\Gamma_1}E_x(\theta_{t_1}I_{w_{t_2-t_1}\in\Gamma_2}|\mathscr{B}_{t_1+}(W_d))]\\&=E_x(I_{w_{t_1}\in\Gamma_1}E_{w_{t_1}}(I_{w_{t_2-t_1}\in\Gamma_2}))\\&=E'_x(I_{w_{t_1}\in\Gamma_1}E'_{w_{t_1}}(I_{w_{t_2-t_1}\in\Gamma_2}))=\cdots\\&=P'_x(w_{t_1}\in\Gamma_1,w_{t_2}\in\Gamma_2).\end{aligned}$$

再应用归纳法可得

$$P_x(w_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,w_{t_n}\in\Gamma_n)=P'_x(w_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,w_{t_n}\in\Gamma_n).$$

由测度扩张的唯一性立刻得到$P_x=P'_x$。引理得证。

与引理4.4完全类似地可以证明如下的引理：

引理4.5 如果$\sigma(x)$连续，$a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T\geqslant c_1I>0$，并且$a(x)$与某个正定常矩阵$\Sigma=(\Sigma^{ij})_{i,j\leqslant d}$一致地$\varepsilon$相近，意即

$$|a^{ij}(x)-\Sigma^{ij}|\leqslant\varepsilon\quad(\forall x\in R^d),$$

那么当ε充分小时，鞅问题$\mathfrak{M}(a,0)$适定。

如果$0<c_1I\leqslant\Sigma\leqslant c_2I$，那么$\varepsilon$还可选取得不依赖$\Sigma$的具体形式，

而只依赖c_1与c_2。

（证明全与引理4.4一样，只是用$\mathscr{N}(x,t\Sigma)$代替$\mathscr{N}(x,tI)$。）

注 在引理4.5的假定下，当ε小时，对于$\forall x$，$\mathscr{S}^X(x;\ a,0)$存在唯一元素。

在这一节中，我们还要回忆一些关于推移算子的知识。由于维数d不起什么作用，我们不妨设$d=1$。$(W,\mathscr{B}(W))$是我们的基本空间（当然W也可以换成$D[0,\infty)$，即$[0,\infty)$上右连左极函数全体组成的赋以 Skorohod 距离的 Polish 空间）。

推移算子θ_s是W自身的点变换：$(\theta_s w)=w_{\cdot+s}$。它在$\mathscr{B}(W)$上引起如下变换$(\theta_s\xi)(w)\equiv\xi(\theta_s w)\ (\xi\in\mathscr{B}(W))$，而且有$\theta_t I_A=I_{\theta_s^{-1}A}$，$\theta_s^{-1}\{w\in A\}=\{\theta_s w\in A\}\ (A\in\mathscr{B}(W))$，以及$\theta_s^{-1}\mathscr{B}_t(W)\subset\mathscr{B}_{t+s}(W)$。

对于一个有限$\mathscr{B}_t(W)$停时τ，我们也有类似的定义及关系式：

$$(\theta_\tau w)_\cdot=w_{\cdot+\tau},\quad (\theta_\tau\xi)(w)=\xi(\theta_\tau w),\quad \theta_\tau I_A=I_{\theta_\tau^{-1}A},$$

$$\theta_\tau^{-1}\{w\in A\}=\{\theta_\tau w\in A\},\quad \theta_\tau^{-1}\mathscr{B}_t(W)\subset\mathscr{B}_{t+\tau}(W).$$

由于$w_\cdot$的轨道（右）连续性和w_t作为(t,w)的二元函数为可测，对作为W上函数的w_τ我们有

$$w_\tau=w_{\tau(w)}\in\mathscr{B}_\tau(W).$$

如果τ_1是另一个有限$(\mathscr{B}_t(W))$停时，那么

$$\begin{aligned}\theta_{\tau_1}w_{\tau(w)}&\equiv\theta_{\tau_1}\eta(w)=\eta(\theta_{\tau_1}w)\\&=(\theta_{\tau_1}w)_{\tau(\theta_{\tau_1}w)}=w_{\tau_1+\tau(\theta_{\tau_1}w)}\end{aligned}\qquad(4.15)$$

（其中$\eta(w)$是$w_{\tau(w)}$的简单记号）。

定义

$$
\begin{cases}
\tau_0 = 0, \qquad \tau_1 \text{ 为有限 } \mathscr{B}_t(W) \text{停时}, \\
\tau_2(w) = \tau_1(w) + \tau_1(\theta_{\tau_1} w) = (\tau_1 + \theta_{\tau_1}\tau_1)(w), \\
\cdots\cdots \\
\tau_{n+1}(w) = \tau_n(w) + \tau_1(\theta_{\tau_n} w) = (\tau_n + \theta_{\tau_n}\tau_1)(w) \\
\qquad = (\tau_1 + \theta_{\tau_1}\tau_1 + \cdots + \theta_{\tau_n}\tau_1)(w).
\end{cases}
\tag{4.16}
$$

它们都是$(\mathscr{B}_t(W))$停时. 事实上

$$
\begin{aligned}
\{\tau_2 > t\} &= \{\tau_1 + \theta_{\tau_1}\tau_1 > t\} \\
&= \bigcup_{r_i \text{有理} \leqslant t} \{\tau_1 > r_i, \theta_{\tau_1}\tau_1 > t - r_i\} \\
&= \bigcup_{r_i \text{有理} \leqslant t} (\{(t - r_i) + \tau_1 > t\} \cap \theta_{\tau_1}^{-1}\{\tau_1 > t - r_i\}) \\
&= \bigcup_{r_i \text{有理} \leqslant t} (\{\sigma_i > t\} \cap \theta_{\tau_1}^{-1}\{\tau_1 > t - r_i\}),
\end{aligned}
$$

其中$\sigma_i = (t - r_i) + \tau_1$是$(\mathscr{B}_t(W))$停时, $\theta_{\tau_1}^{-1}\{\tau_1 > t - r_i\} \in \theta_{\tau_1}^{-1}\mathscr{B}_{t-r_i}(W) \subset \mathscr{B}_{\sigma_i}(W)$. 所以

$$
\{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathscr{B}_t(W).
$$

即τ_2是$(\mathscr{B}_t(W))$停时. 用归纳法便推出τ_n也是$(\mathscr{B}_t(W))$停时.

记$\eta(w) = \theta_{\tau_1} w$. 于是我们有

$$
\begin{aligned}
(\theta_{\tau_1})^2 w &= \theta_{\tau_1}\eta(w) = \eta(\theta_{\tau_1(w)}(w)) \\
&= \theta_{\tau_1(\theta_{\tau_1} w)}(\theta_{\tau_1} w) = (\theta_{\tau_1} w)_{\cdot + \tau_1(\theta_{\tau_1} w)} \\
&= w_{\cdot + \tau_1(\theta_{\tau_1} w) + \tau_1(w)} \\
&= w_{\cdot + \tau_2(w)} = \theta_{\tau_2} w.
\end{aligned}
$$

我们归纳地可得

$$
\theta_{\tau_n}\theta_{\tau_m} = \theta_{\tau_{n+m}}. \tag{4.17}
$$

引理4.6 设τ_1为有限$(\mathscr{B}_t(W))$停时, 那么我们有

1° $\mathscr{B}_{\tau_1}(W) = \sigma(w^{\tau_1})$ (坐标过程停止于τ_1所生成σ代数);

2° $\mathscr{B}(W)=\sigma(w^{\tau_1})\vee\sigma(\theta_{\tau_1}w)$;

若还有 $\tau_n\to\infty$，其中 τ_n 为(4.16)所定义，那么有

3° $\mathscr{B}(W)=\sigma(w^{\tau_1})\vee\theta_{\tau_1}^{-1}\sigma(w^{\tau_1})\vee\cdots\vee\theta_{\tau_k}^{-1}\sigma(w^{\tau_1})\vee\cdots$.

证明 为简单起见，我们略去记号中的W。

1°的证明.因为 $w_{t\wedge\tau_1}\in\mathscr{B}_{\tau_1}$，所以我们有 $\sigma(w^{\tau_1})\subset\mathscr{B}_{\tau_1}$. 我们来证明反方向的包含关系。首先我们有

$$f(w)\in\mathscr{B}_t\Longleftrightarrow\exists t_n\leqslant t(n=1,2,\cdots)\text{及 }F\in\mathscr{B}(R^\infty)\text{，使}$$

$$f(w)=F(w_{t_1},\cdots,w_{t_n},\cdots)$$

$$\Longleftrightarrow f(w)=f(w^t)$$

$((w^t)\equiv w_{\cdot\wedge t})$。其次，如果 $g(w)\in\mathscr{B}_{\tau_1}$，那么我们有 $f_t(w)\equiv g(w)I_{(t)}(\tau_1(w))\in\mathscr{B}_t$。因此 $f_t(w)=f_t(w^t)$。在 w 固定后取 $t=\tau_1(w)$，我们有

$$g(w)=f_{\tau_1(w)}(w)=f_{\tau_1(w)}(w^{\tau_1})=g(w^{\tau_1}).$$

假设$g(w)=G(w_{t_1},\cdots,w_{t_n},\cdots)$，那么

$$g(w)=g(w^{\tau_1})=G(w_{t_1\wedge\tau_1},\cdots,w_{t_n\wedge\tau_1},\cdots)\in\sigma(w^{\tau_1}).$$

这样就有 $\mathscr{B}_{\tau_1}\subset\sigma(w^{\tau_1})$.由此得证1°。

2°的证明。对任意 t，我们有

$$w_t=w_tI_{t\leqslant\tau_1}+\lim_{n\to\infty}\sum_{\frac{k+1}{2^n}<t}w_{t+(\tau_1-\frac{k}{2^n})}I_{\{\frac{k}{2^n}<\tau_1\leqslant\frac{k+1}{2^n}\}}.$$

由于

$$w_tI_{t\leqslant\tau_1}\in\mathscr{B}_{\tau_1}=\sigma(w^{\tau_1});$$

$$w_{t+\tau_1-\frac{k}{2^n}}=\theta_{\tau_1}w_{t-\frac{k}{2^n}}\in\sigma(\theta_{\tau_1}w);$$

$$I_{\{\frac{k}{2^n}<\tau_1\leqslant\frac{k+1}{2^n}\}}\in\mathscr{B}_{\tau_1}=\sigma(w^{\tau_1}),$$

所以

$$w_t\in\sigma(w^{\tau_1})\vee\sigma(\theta_{\tau_1}w).$$

因此我们有 $\mathscr{B}=\sigma(w^{\tau_1})\vee\sigma(\theta_{\tau_1}w)$.

3°的证明。对任意 t，我们有

$$w_t = w_t I_{t<\tau_1} + \sum_k \lim_{n\to\infty} \sum_{\frac{i+1}{2^n}<t} w_{\tau_k+(t-\frac{i}{2^n})} I\{\tau_k<t<\tau_{k+1}\}$$

$$\times I\left\{\frac{i}{2^n}<\tau_k<\frac{i+1}{2^n}\right\}$$

$$= w_t I_{t<\tau_1} + \sum_k \lim_{n\to\infty} \sum_{\frac{i+1}{2^n}<t} w_{\tau_k+(t-\frac{i}{2^n})} I\{t<\tau_{k+1}\}$$

$$\times I\left\{\frac{i}{2^n}<\tau_k<\frac{i+1}{2^n}\right\}$$

$$= w_t I_{t<\tau_1} + \sum_k \lim_{n\to\infty} \sum_{\frac{i+1}{2^n}<t} \theta_{\tau_k}\left(w_{t-\frac{i+1}{2^n}} I_{t-\frac{i+1}{2^n}<\tau_1}\right)$$

$$\times I\left\{\frac{i}{2^n}<\tau_1+\theta_{\tau_1}\tau_1+\cdots+\theta_{\tau_{k-1}}\tau_1<\frac{i+1}{2^n}\right\}.$$

因为对任意 s，$(w_{t-\frac{i}{2^n}} I_{t-\frac{i+1}{2^n}<\tau_1}) I_{\tau_1<s} \in \mathscr{B}_s$，所以

$$w_{t-\frac{i}{2^n}} I_{t-\frac{i+1}{2^n}<\tau_1} \in \sigma(w^{\tau_1}).$$

又由于 $\theta_{\tau_k}\tau_1 \in \theta_{\tau_k}^{-1}\mathscr{B}_{\tau_1} = \theta_{\tau_k}^{-1}\sigma(w^{\tau_1})$，这就推出

$$w_t \in \sigma(w^{\tau_1}) \vee \theta_{\tau_1}^{-1}\sigma(w^{\tau_1}) \vee \cdots \vee \theta_{\tau_k}^{-1}\sigma(w^{\tau_1}) \vee \cdots.$$

从而

$$\mathscr{B} \subset \sigma(w^{\tau_1}) \vee \theta_{\tau_1}^{-1}\sigma(w^{\tau_1}) \vee \cdots \vee \theta_{\tau_k}^{-1}\sigma(w^{\tau_1}) \vee \cdots.$$

由此得3°。引理证毕。

定理4.1 如果 $\sigma(x)$有界连续，$a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T \geqslant c_1 I > 0$，$b(x)$有界 Borel 可测，那么SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$)存在分布唯一解。

证明 存在性是定理 3.5 的结果。由定理 3.6，我们在证明具有分布唯一性时不妨假定 $b(x)\equiv 0$，并且由于引理 4.2 我们只需证明鞅问题$\mathfrak{M}(a,0)$的适定性。为此，我们要应用Ito-Mckean的局部化方法。

由定理假定，必存在 c_2，使 $c_1 I \leqslant a(x) \leqslant c_2 I$。

设任意 $P_x, P'_x \in \mathscr{P}(x;a,0)$。那么

$$P_x\{a(w_0)=a(x)\}=1=P'_x\{a(w_0)=a(x)\}.$$

令

$$\Sigma_1=(\Sigma_1^{ij})=a(x)(=a(w_0),\text{a.e.}\,dP_x \text{ 及 } dP'_x);$$

$$\tau_1(w)=\inf\left\{t:\bigcup_{i,j}|a^{ij}(w_t)-a^{ij}(w_0)|\geqslant\varepsilon\right\}\quad(\varepsilon>0\text{固定}).$$

记

$$D_x=\left\{x'\in R^d:\bigcap_{i,j}|a^{ij}(x')-a^{ij}(x)|<\varepsilon\right\}$$

中含 x 的连通部分并记 ∂D_x 为它的边界。我们定义

$$a_1^{ij}(x')=\begin{cases}a^{ij}(x'), & \text{当 } x'\in D_x\cup\partial D_x,\\ a^{ij}(y), & \text{当 } x'\bar{\in} D_x\cup\partial D_x,\text{其中 } y \text{ 是连线} x'x \\ & \text{与 } \partial D_x \text{ 之交点中与 } x' \text{ 最近者}.\end{cases}$$

类似地可用 $\sigma^{ij}(x)$ 来定义一个对应的 $\sigma_1^{ij}(x')$。于是对一切 i, j 我们有

$$|a_1^{ij}(x')-\Sigma_1^{ij}|\leqslant\varepsilon\quad(\forall x'\in R^d).$$

对于(4.4)中的 $M^{(f)}$ 应用 Doob 停止定理，我们得到 $M^{(f)}_{t\wedge\tau_1}$ 在 P_x 下也是 $(\mathscr{B}_t(W^d))$ 鞅，从而也是 $(\overline{\mathscr{B}}_{t+}(W_d))$ 鞅，但是对 $\forall f\in C_0^\infty$ 有

$$M^{(f)}_{t\wedge\tau_1}=f(w_{t\wedge\tau_1})-f(w_0)-\int_0^{t\wedge\tau_1}(Af)(w_s)\mathrm{d}s$$

$$=f(w_t^{\tau_1})-f(w_0^{\tau_1})-\int_0^t(A_1f)(w_s^{\tau})\mathrm{d}s,$$

其中 $A_1f(x)=\frac{1}{2}\Sigma a_1^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$。由引理 4.5 的注可知，在 ε 小的条件下对于 $X(w)=w^{\tau_1}$，$\mathscr{P}^X(x;a_1,0)$ 有唯一元素 P_x，它是 $\sigma(w^{\tau_1})=\mathscr{B}_{\tau_1}(W^d)$ 上的测度。易见 $\mathscr{P}(x;a,0)\subset\mathscr{P}^X(x;a_1,0)$。因此对于 $\sigma(w^{\tau_1})$，我们有：对于任意 $P_x, P'_x\in\mathscr{P}(x;a,0)$，根据

命题4.1的注，我们断定 $\mathscr{P}(x;a,0)$对过程 w^{τ_1} 及有限停时有强马氏性，并且对于任意有界的 $\eta\in\mathscr{B}(W^d)$恒有

$$E_x\eta(w^{\tau_1})=E'_x\eta(w^{\tau_1}).$$

我们不妨假定 τ_1 是有界的($\mathscr{B}_t(W^d)$)停时，否则我们可以用 $\tau_1\wedge 1$来代替它。这样我们就能把 τ_1 取作引理 4.3 中的 τ。另一方面我们有

$$P_x\{P_{w\tau_1}\in\mathscr{P}(w_{\tau_1(w)},a,0)\}=1,$$

以及

$$P'_x\{P'_{w\tau_1}\in\mathscr{P}(w_{\tau_1(w)},a,0)\}=1.$$

分别用 $w_{\tau_1(w)}$，$P_{w\tau_1}$，$P'_{w\tau_1}$ 分别代替 x,P_x,P'_x。由前面的结论我们得到：对任意有界的 $\eta\in\mathscr{B}(W^d)$恒有

$$E_{w\tau_1}\eta(w)=E'_{w\tau_1}\eta(w)\quad(\text{a.e.}\,dP_x\text{ 及 }dP'_x).$$

我们来证明由这里的 τ_1 通过(4.16)定义的 $\tau_n(w)\to\infty$。用反证法。如果 $\tau_n(w^0)\to\zeta<\infty$，于是对一切$n$ 有 $\tau_n(w^0)<\zeta$。但是 $a^{ij}(w_t^0)$在$[0,\zeta]$上一致连续，因此存在 $N>\zeta$，使$[0,\zeta]$ 分成 N 等分后在每个子区间上所有 $a^{ij}(w_t^0)$的振幅均小于 $\varepsilon/2$。由 τ 的定义便推出 $\tau_N>\zeta$.这与 ζ 的定义相矛盾.因此必有 $\tau_n(w)\to\infty$.由引理4.6的3°我们知道

$$\mathscr{B}(W^d)=\sigma\{\Lambda:\Lambda=\{w:w^{\tau_1}\in\Gamma_0,\theta_{\tau_1}w^{\tau_1}\in\Gamma_1,\cdots,\\ (\theta_{\tau_1})^n w^{\tau_1}\in\Gamma_n\}\}.$$

我们利用 $\mathscr{P}(x;a,0)$对 w^{τ_1} 的强马氏性来计算 $P_x(\Lambda)$与 $P'_x(\Lambda)$。为了简单一些，我们只算 $n=2$ 的情形，因为对 $n>2$ 的情形办法是一样的。

$$\begin{aligned}P_x(\Lambda)&=E_x[I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_0}E_x(\theta_{\tau_1}[I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_1}\cdot I_{\theta_{\tau_1}w^{\tau_1}\in\Gamma_2}]|\mathscr{B}_{\tau_1+})]\\ &=E_x[I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_0}E_{w\tau_1}(I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_1},I_{\theta_{\tau_1}w^{\tau_1}\in\Gamma_2})]\\ &=E_x[I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_0}E_{w\tau_1}(E_{w\tau_1}(I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_1},I_{\theta_{\tau_1}w^{\tau_1}\in\Gamma_2}|\mathscr{B}_{\tau_1+}))]\\ &=E_x[I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_0}E_{w\tau_1}(I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_1}E_{w\tau_1}(I_{\theta_{\tau_1}w^{\tau_1}\in\Gamma_2}|\mathscr{B}_{\tau_1+}))]\end{aligned}$$

$$= E_x[I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_0} E_{w_{\tau_1}}(I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_1} P_{w_{\tau_1}}(w^{\tau_1}\in\Gamma_2))]$$

$$= E_x[I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_0} E_{w_{\tau_1}}(I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_1} P'_{w_{\tau_1}}(w^{\tau_1}\in\Gamma_2))]$$

$$= E_x[I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_0} E'_{w_{\tau_1}}(I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_1} P'_{w_{\tau_1}}(w^{\tau_1}\in\Gamma_2))]$$

$$= E'_x[I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_0} E'_{w_{\tau_1}}(I_{w^{\tau_1}\in\Gamma_1} P'_{w_{\tau_1}}(w^{\tau_1}\in\Gamma_2))]$$

$$= \cdots = P'_x(\Lambda).$$

由测度扩张的唯一性我们得到 $P_x = P'_x$. 因此鞅问题 $\mathfrak{M}(a,0)$是适定的。定理证毕。

下面我们将放松鞅问题适定的充分条件。

引理4.7(Tulcea 定理的推广形式) 设 $n\geqslant 0$, 可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$上的 σ 代数族$\mathscr{F}_n \uparrow \mathscr{F}$, 而且满足:

(T_1) $(\mathscr{F}_n)$具有"紧相交性质", 即对任意 $\omega\in\Omega$, ω 关于$\mathscr{F}_n$的原子集 $A_n(\omega)\left(=\bigcap_{\omega\in A\in\mathscr{F}_n} A\right)\in\mathscr{F}_n$, 而且对任意 $\omega^{(n)}\in\Omega$, 恒有

$$\text{“}\forall N, \bigcup_{n=0}^{N} A_n(\omega^{(n)})\neq\varnothing \Longrightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n(\omega^{(n)})\neq\varnothing\text{”};$$

(T_2) 对任意 $n\geqslant 1$, 存在 $\Omega(n-1,n;\omega,\Lambda)$, 它满足: 当 $A\in\mathscr{F}_n$ 固定时是 ω 的$\mathscr{F}_{n-1}$可测函数; 当 ω 固定时是 $\mathscr{F}_n$ 上的概率测度(相当于从$\mathscr{F}_{n-1}$ 到 $\mathscr{F}_n$ 的"的转移函数"), 而且

$$Q(n-1,n;\omega,A_{n-1}(\omega)) = 1. \qquad (4.18)$$

那么在(T_1),(T_2)下, 对于$(\Omega,\mathscr{F}_0)$上任意概率测度 P_0, 必定存在$(\Omega,\mathscr{F})$上唯一的概率测度P, 使

(1) P以 P_0 为"初测度", 即$P|_{\mathscr{F}_0} P_0$;

(2) P以Q为"转移函数", 即对任意$A\in\mathscr{F}_n$有

$$P(A) = \int Q(n-1,n;\omega,A)P(\mathrm{d}\omega).$$

注 事实上, $A_n(\omega)$可以不必$\in\mathscr{F}_n$, 只需在(4.18)中用$\forall A$

$\supset A_{n-1}(\omega)$代替。

证明 1° 归纳地定义：

$$P_1(A)=\int Q(0,\ 1;\ \omega,\ A)P_0\ (\mathrm{d}\omega)\quad (A\in\mathscr{F}_1);$$

$$P_n(A)=\int Q(n-1,n;\omega,A)P_{n-1}(\mathrm{d}\omega)\quad (A\in\mathscr{F}_n).$$

特别地，如果$A\in\mathscr{F}_{n-1}$且$\omega\bar{\in}A$，那么由于(T_1)可知$A_{n-1}(\omega)$是$\mathscr{F}_{n-1}$中含ω的最小集合，因此$A_{n-1}(\omega)\cap A=\varnothing$。从而我们有$Q(n-1,n;\omega,A)=0$。于是由(4.18)对于$A\in\mathscr{F}_{n-1}$有

$$P_n(A)=\int_A Q(n-1,n;\omega,A)P_{n-1}(\mathrm{d}\omega)$$

$$=\int_A P_{n-1}(\mathrm{d}\omega)=P_{n-1}(A).$$

因此$\{P_n\}$是相容的测度。

令集类$\mathscr{F}_n$的并为$\mathscr{C}$：

$$\mathscr{C}=\bigcup_1^{\infty}\mathscr{F}_n.$$

那么$\mathscr{C}$是一个代数，在$\mathscr{C}$上定义集合函数P：对$A\in\mathscr{F}_n$，

$$P(A)\equiv P_n(A).$$

显然P在$\mathscr{C}$上有限可加。我们要证明它在$\mathscr{C}$上是可数可加的。

2° 为了证明P在$\mathscr{C}$上的可数可加性，我们只需证明：

$$\text{“}A_n\in\mathscr{C},A_n\downarrow\phi\Longrightarrow P(A_n)\downarrow 0\text{”}.\qquad(4.19)$$

我们不妨设(4.19)中的$A_n\in\mathscr{F}_n$。事实上每个A_{n_k}必属某个$\mathscr{F}_{n_k}$，而且无妨假定n_k是严格递增的。于是我们可以定义

$$A'_{n_k}=A'_{n_{k+1}}=\cdots=A'_{n_{k+1}-1}=A_k,$$

从而$A'_n\in\mathscr{F}_n$，这样$\{A'_n\}$就可用来代替$\{A_n\}$。下面我们用反证法证明(4.19)，即证明(4.19)的逆否形式：

$$\text{“}\forall n, A_n\in\mathscr{F}_n, A_n\downarrow, P(A_n)\geqslant\varepsilon\Longrightarrow\bigcap_1^\infty A_n\neq\varnothing\text{”}. \quad (4.19')$$

为此我们定义“多步转移函数”如下：

$$Q(m,k;\omega,A)=I_A(\omega)\quad (当\ m\geqslant k, A\in\mathscr{F}_k);$$

$$Q(m,n;\omega,A)=\int Q(n-1,n;\omega',A)\times Q(m,n-1;\omega,d\omega')\quad (当\ m<n, A\in\mathscr{F}_n). \quad (4.20)$$

归纳地我们可证：当 $A\in\mathscr{F}_n$ 固定时它是 ω 的 $\mathscr{F}_m$ 可测函数，而且

$$P(A)=\int Q(0,n;\omega,A)P_0(\mathrm{d}\omega)\quad (当\ A\in\mathscr{F}_n 时);$$

$$Q(m,n;\omega,A)=\int Q(k,n;\omega',A)Q(m,k;\omega,\mathrm{d}\omega')\quad (当\ A\in\mathscr{F}_n 时). \quad (4.21)$$

由于 $\omega'\bar{\in}A_n$ 时 $A_n(\omega')\cap A_n=\varnothing$，所以$A_n(\omega')\cap A_{n+1}=\varnothing$。因此由(4.21)及(4.18)我们得到

$$Q(0,n+1;\omega,A_{n+1})=\int Q(n,n+1;\omega' A_{n+1})Q(0,n;\omega,\mathrm{d}\omega')$$

$$=\int_{A_n}Q(n,n+1;\omega',A_{n+1})Q(0,n;\omega,\mathrm{d}\omega')$$

$$\leqslant Q(0,n;\omega,A_n).$$

定义

$$F_n^0=\left\{\omega:\ Q(0,n;\omega,A_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

那么 $F_n^0\downarrow$，而且 $F_n^0\in\mathscr{F}_0$。同时由(4.21)我们有

$$\varepsilon\leqslant P(A_n)=\int_{F_n^0\cup(F_n^0)^c}Q(0,n;\omega,A_n)P_0(\mathrm{d}\omega)$$

$$\leqslant P_0(F_n^0)+\int_{(F_n^0)^c}Q(0,n;\omega,A_n)P_0(\mathrm{d}\omega)$$

$$\leqslant P_0(F_n^0)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

这样就有 $P_0(F_n^0)\geqslant \varepsilon/2$，从而

$$P_0\left(\bigcap_n F_n^0\right)=\lim_{n\to\infty}P_0(F_n^0)\geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此存在 $\omega^{(0)}\in\bigcap_n F_n^0$，也就是对一切 n 恒有

$$Q(0,n;\omega^{(0)},A_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

类似地，我们定义

$$F_n^1=\left\{\omega:\ Q(1,n;\omega,A_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{2^2}\right\}.$$

那么 $F_n^1\in\mathscr{F}_1$ 而且递减。同时由(4.21)我们有

$$\frac{\varepsilon}{2}\leqslant Q(0,n;\omega^{(0)},A_n)$$

$$=\int_{F_n^1\cup(F_n^1)^c}Q(1,n;\omega',A_n)Q(0,1;\omega^{(0)},\mathrm{d}\omega')$$

$$\leqslant Q(0,1;\omega^{(0)},F_n^1)+\frac{\varepsilon}{2^2}.$$

这样就有 $Q(0,1;\omega^{(0)},F_n^1)\geqslant\varepsilon/2^2$。从而

$$Q\left(0,1;\omega^{(0)},\bigcap_{n\geqslant1}F_n^1\right)\geqslant\frac{\varepsilon}{2^2}.$$

因此 $A_0(\omega^{(0)})\cap\left(\bigcap_{n\geqslant1}F_n^1\right)\neq\varnothing$。即存在 $\omega^{(1)}\in A_0(\omega^{(0)})\cap\left(\bigcap_{n\geqslant1}F_n^1\right)$，所以 $\omega^{(1)}\in A_0(\omega^{(0)})$，并且对一切 $n\geqslant1$ 恒有

$$Q(1,n;\omega^{(1)},A_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{2^2}.$$

一般地，用归纳法可以定义

$$F_n^m=\left\{\omega:\ Q(m,n;\omega,A_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}\right\}.$$

它对 n 递减而且 $F_n^m\in\mathscr{F}_m$. 同时可以证明存在 $\omega^{(m)}\in A_{m-1}(\omega^{(m-1)})$，使对于一切 $n\geqslant m$ 恒有

$$Q(m,n;\omega^{(m)},A_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

现在，我们按定义有

$$1_{A_n}(\omega^{(n)})=Q(n,n;\omega^{(n)},A_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

所以 $\omega^{(n)}\in A_n$，从而 $A_n(\omega^{(n)})\subset A_n$. 这样我们就有

$$\bigcap_n A_n(\omega^{(n)})\subset\bigcap_n A_n.$$

另一方面，由 $\omega^{(n)}\in A_{n-1}(\omega^{(n-1)})$以及($T_1$)，我们推得 $A_n(\omega^{(n)})\subset A_{n-1}(\omega^{(n-1)})$，即 $A_n(\omega^{(n)})\downarrow$. 我们根据"紧相交性质"得 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n(\omega^{(n)})\neq\varnothing$. 所以 $\bigcap_n A_n\neq\varnothing$. 这就证明了(4.19′).

既然 P 在 $\mathscr{G}$ 上可数可加，用测度扩张及其唯一性便得引理.

引理 4.8 设 τ_n 是$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上 $\mathscr{B}_t(W^d)$停时列，且 $\tau_n\uparrow\infty$. 又设在$(W^d,\mathscr{B}_{\tau_n}(W^d))$上有相容的概率测度族 P_n，意即

$$P_{n+1}(A)=P_n(A)\quad(\text{当 }A\in\mathscr{B}_{\tau_n}(W^d)\text{时}),$$

并且假定对任意 t 有

$$P_n(\tau_n\leqslant t)\to 0\quad(n\to\infty),\tag{4.22}$$

那么存在唯一$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上的概率测度 P，它是 P_n 的扩张，即

$$P(A)=P_n(A)\quad(\forall A\in\mathscr{B}_{\tau_n}(W^d)).$$

证明 因为验证$\{\mathscr{B}_n(W^d)\}$的"紧相交性质"远比验证$\{\mathscr{B}_{\tau_n}(W^d)\}$的为易，所以我们先从$\{P_n\}$导出$\{\mathscr{B}_n(W^d)\}$上相容概率测度族 $\tilde{P}_n$. 如果 $A\in\mathscr{B}_{\tau_n}\wedge\mathscr{B}_n$，显然应定义

$$\tilde{P}_n(A)=P_n(A).$$

一般 $A\in\mathscr{B}_n$，它可以用 $\mathscr{B}_{\tau_k}\wedge\mathscr{B}_n$ 中集合 $A\cap\{\tau_k>n\}$ 来近似：我们定义

$$\tilde{P}_n(A)=\lim_{k\to\infty}P_k(A\cap\{\tau_k>n\}).$$

首先我们说明右方的极限是存在的。事实上

$$\begin{aligned}P_k(A\cap\{\tau_k>n\})&=P_{k+1}(A\cap\{\tau_k>n\})\\&\leqslant P_{k+1}(A\cap\{\tau_{k+1}>n\}).\end{aligned}$$

所以右方有递增有界极限，而且 $\tilde{P}_n(A)\leqslant\varliminf_k P_k(A)$。

显然在 $\mathscr{B}_n(W^d)$ 上 $\tilde{P}_n$ 有限可加。今证它也是可数可加的，设 $A_m\in\mathscr{B}_n(W^d)(m=1,2,\cdots)$，且 $A_m\downarrow\varnothing$。利用$\{P_k\}$的相容性，对任意 l 我们有

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n(A_m)&=\tilde{P}_n(A_m\cap\{\tau_l\leqslant n\})+\tilde{P}_n(A_m\cap\{\tau_l>n\})\\&=\lim_{k\to\infty}P_k(A_m\cap\{\tau_l\leqslant n\}\cap\{\tau_k>n\})\\&\quad+P_l(A_m\cap\{\tau_l>n\})\\&\leqslant\lim_{k\to\infty}P_k(\tau_l\leqslant n)+P_l(A_m\cap\{\tau_l>n\})\\&=P_l(\tau_l\leqslant n)+P_l(A_m\cap\{\tau_l>n\})\quad(\text{任意 } l).\end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon>0$，存在 l_0，使 $P_{l_0}(\tau_{l_0}\leqslant n)<\varepsilon/2$，再取 m 充分大，使 $P_{l_0}(A_m\cap\{\tau_{l_0}>n\})<\varepsilon/2$。因此 $\tilde{P}_n(A_m)\to 0(m\to\infty)$。由此得到 $\tilde{P}_n$ 是 $\mathscr{B}_n(W^d)$ 上的测度。

我们要验证$\{\tilde{P}_n\}$满足引理 4.7 的条件。注意 $\mathscr{B}_n(W^d)$ 中集合都是 $\mathscr{B}(W^d)$中足标在 $0\leqslant t\leqslant n$ 的柱集，所以 $(W^d,\mathscr{B}_n(W^d),\tilde{P}_n)$可看成 $(C[0,n]^d,\ \mathscr{B}(C[0,n]^d),\tilde{P}_n)$。于是含 w 的原子集 $A_n(w)$为

$$\begin{aligned}A_n(w)&=\{w':\ w'_t=w_t\ \ (0\leqslant t\leqslant n)\}\\&=\bigcap_{r_i\text{有理}\in[0,n]}\{w':\ w'_{r_i}=w_{r_i}\}.\end{aligned}$$

显然 $A_n(w)$是可测的。而且如果对 $\forall N$，$\bigcap_1^N A_n(w^{(n)})\neq\varnothing$，那么

对于 $\bigcap_{1}^{N} A_n(w^{(n)})$ 中的 w 就有

$$w_t = w_t^{(n)} \quad (0 \leqslant t \leqslant n \leqslant N).$$

特别地

$$w_t^{(n-1)} = w_t = w_t^{(n)}.$$

所以我们可唯一地定义一个 $\bar{w}$：

$$\bar{w}_t = w_t^{(n)} \quad (0 \leqslant t \leqslant n, \text{一切 } n).$$

于是 $\bar{w} \in W^d$, $\bar{w} \in \bigcap_{n} A_n(w^{(n)})$。这说明 $\{\mathscr{B}_n(W^d)\}$ 满足"紧相交性质"。我们还需证明条件 (T_2) 也满足。

在引理 3.6 中，取 $U = (C[0,n])^d$，$V = (C[0,n-1])^d$，于是 $\mathscr{B}(U) = \mathscr{B}_n(W^d)$, $\mathscr{B}(V) = \mathscr{B}_{n-1}(W^d)$。取 ξ 为 U 到 V 的投影变换，$(U, \mathscr{B}(U))$ 上概率测度取 $\bar{P}_n$。

对于 $w \in V$, $\xi^{-1}(w)$ 就是 $A_{n-1}(w)$。我们对于 $w \in V$，$A \in \mathscr{B}(U)$ 定义

$$Q(n-1, n; w, A) = \begin{cases} \text{对应于(3.19)中的 } \hat{P}(w, A), \\ \quad \text{当 } \hat{P}(w, \xi^{-1}(w)) = 1, \\ I_{A \cap \xi^{-1}(w)}(w), \\ \quad \text{当 } \hat{P}(w, \xi^{-1}(w)) \neq 1. \end{cases}$$

由引理 3.6 可知它们满足条件 (T_2)。于是引理 4.7 断言存在定义在 $\mathscr{B}(W^d)$ 上的 P，使

$$\begin{cases} P|_{\mathscr{B}_0(W^d)} = \hat{P}_0; \\ P(A) = \int Q(n-1, n; w, A) P(\mathrm{d}w) \\ \qquad (A \in \mathscr{B}_n(W^d)). \end{cases} \tag{4.23}$$

我们注意到在条件(4.22)满足时，前面定义的 $\{\hat{P}_n\}$ 是相容的，即对 $A \in \mathscr{B}_{n-1}(W^d)$ 有 $\hat{P}_{n-1}(A) = \hat{P}_n(A)$，因此

$$\widetilde{P}_{n-1} = \widetilde{P}_n \xi^{-1}.$$

于是由(4.23)应用归纳法可证明 P 是 $\{\hat{P}_n\}$ 的扩张：事实上，设 $n-1$ 时对任意 $A \in \mathscr{B}_{n-1}(W^d)$ 恒有 $P(A) = \widetilde{P}_{n-1}(A)$，那么对于

任意 $A\in\mathscr{B}_n(W^d)$我们有

$$P(A)=\int Q(n-1,n;w,A)\tilde{P}_{n-1}(\mathrm{d}w)$$

$$=\int\tilde{P}_n(A|\zeta^{-1}(\mathscr{B}_{n-1}(W^d)))(\hat{P}_n\zeta^{-1})(\mathrm{d}w)$$

$$=\tilde{P}_n(A).$$

现在，我们来证明 P 是$\{P_k\}$的扩张。对于 $A\in\mathscr{B}_{\tau_k}(W^d)\cap\mathscr{B}_n(W^d)$，利用$\{P_l\}$的相容性及(4.22)，我们有

$$\begin{aligned}P(A)&=\hat{P}_n(A)=\lim_{l\to\infty}P_l(A\cap\{\tau_l>n\})\\&=\lim_{l\to\infty}[P_l(A)-P_l(A\cap\{\tau_l\leqslant n\})]\\&=P_k(A)-\lim_{l\to\infty}P_l(A\cap\{\tau_l\leqslant n\})\\&=P_k(A).\end{aligned}$$

但是 $\mathscr{B}_{\tau_k}(W^d)=\bigvee_{n=1}^{\infty}[\mathscr{B}_{\tau_k}(W^d)\wedge\mathscr{B}_n(W^d)]$，所以对 $A\in\mathscr{B}_{\tau k}$ 也有 $P(A)=P_k(A)$。因此 P 是$\{P_k\}$的扩张

最后，我们证明唯一性。显然 P 由$\{\tilde{P}_n\}$唯一确定，所以只要证明 $\tilde{P}_n$ 由$\{P_k\}$唯一确定。对于 $A\in\mathscr{B}_n(W^d)$，由(4.22)我们有

$$\begin{aligned}\hat{P}_n(A)&=\tilde{P}_n(A\cap\{\tau_k\leqslant n\})+\tilde{P}_n(A\cap\{\tau_k>n\})\\&=\lim_{k\to\infty}\tilde{P}_n(A\cap\{\tau_k\leqslant n\})+\lim_{k\to\infty}\tilde{P}_n(A\cap\{\tau_k>n\})\\&=\lim_{k\to\infty}\tilde{P}_n(A\cap\{\tau_k\leqslant n\})+\lim_{k\to\infty}\tilde{P}_k(A\cap\{\tau_k>n\}).\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\tilde{P}_n(A\cap\{\tau_k\leqslant n\})&\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\tilde{P}_n(\tau_k\leqslant n)\\&=\overline{\lim_{k\to\infty}}P_k(\tau_k\leqslant n)=0,\end{aligned}$$

因此 $\tilde{P}_n$ 由$\{P_k\}$唯一确定。引理证毕。

引理 4.9 若 $a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T$，$b(x)\in\mathscr{B}(R^d)$且局部有

界(即在一切紧集上有界)，令

$$a_n(x)=a\left(\left(1\wedge\frac{n}{|x|}\right)x\right),\quad b_n(x)=b\left(\left(1\wedge\frac{n}{|x|}\right)x\right).$$

假定鞅问题 $\mathfrak{M}(a_n,b_n)$ 适定，$P_x^{(n)}\in\mathscr{P}(x;a_n,b_n)$，$\tau_n$ 为 w_t 首达 $\{|x|\geqslant n\}$ 的时刻($=\inf\{t:\ |w_t|\geqslant n\}$)。那么下列论断彼此等价：

1° $\forall x,\mathscr{P}(x;a,b)\neq\varnothing$；

2° $P_x^{(n)}(\tau_n\leqslant t)\to 0(n\to\infty,\forall x,t>0)$；

3° $\mathfrak{M}(a,b)$ 适定。

证明 1°⇒2° 及 3°：设 $\sigma\sigma^T=a,\sigma_n(x)=\sigma\left(\left(1\wedge\frac{n}{|x|}\right)x\right)$.

对于任意 $P_x\in\mathscr{F}(x;a,b)$，由定理 3.4 SDE(σ_n,b_n) 在 $(W,\mathscr{B}_{\tau_n},(\mathscr{B}_{\tau_n\wedge t}),P_x)$ 及 $(W^d,\mathscr{B}_{\tau_n},(\mathscr{B}_{\tau_n\wedge t}),P_x^{(n)})$ 上都以 w^{τ_n} 为解(其中 $\mathscr{B}_t\equiv\mathscr{B}_t(W^d)$)。但是由引理 4.2 的推论知道 SDE$(\sigma_n,b_n)$ 弱解分布唯一，所以 $(\mathscr{B}_{\tau_n},P_x)=(\mathscr{B}_{\tau_n},P_x^{(n)})$。于是对于 $\{\tau_n\leqslant t\}\in\mathscr{B}_{\tau_n}$ 有

$$P_x^{(n)}(\tau_n\leqslant t)=P_x(\tau_n\leqslant t)=P_x\{\sup_{[0,t]}|w_s|\geqslant n\}\to 0.$$

此即 2°。同时由引理 4.8 可知 $\mathscr{P}(x;a,b)$ 只有一个元，此即3°。

3°⇒1°显然。

2°⇒1°：在前段推理中若用 $P_x^{(n+1)}$ 代替 P_x，我们就得到 $(\mathscr{B}_{\tau_n},P_x^{(n+1)})=(\mathscr{B}_{\tau_n},P_x^{(n)})$。由引理4.8得到 $\{P_x^{(n)}\}$ 在 $\mathscr{B}(W^d)$ 上的扩张 P_x，而且 $P_x\in\mathscr{P}(x;a,b)$。实事上，对于任意 $f\in C_K^2$，存在 n，使 f 的支集在 $\{x':\ |x'|\leqslant n\}$ 内。于是

$$M_{t\wedge\tau_n}^{(f)}=f(w_{t\wedge\tau_n})-f(w_0)-\int_0^{t\wedge\tau_n}Af(w_s)\mathrm{d}s$$

$$=f(w_{t\wedge\tau_n})-f(w_0)-\int_0^{t\wedge\tau_n}A_nf(w_s)\mathrm{d}s,$$

其中 $A_nf=\frac{1}{2}\sum a_n^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_n^i\frac{\partial f}{\partial x_i}$。所以 $M_t^{(f)}\in\mathscr{B}_{\tau_n\wedge t}$，

而且在 $P_x^{(n)}$ 下是 $(\mathscr{B}_{\tau_n\wedge t})$ 鞅。但是在 $\mathscr{B}_{\tau_n}$ 上 P_x 与 $P_x^{(n)}$ 相同，因此 $M_t^{(f)}$ 也是 $((\mathscr{B}_{\tau_n\wedge t}),P_x)$ 下的鞅，再由 Doob 停止定理的加强形式便知 $M_t^{(f)}$ 在 P_x 是 $(\mathscr{B}_t)$ 鞅。即 $P_x\in\mathscr{P}(x;a,b)$。引理证毕。

定理4.2 (Stroock–Varadhan) 若 $\sigma(x)$ 连续，在 $|x|\leqslant n$ 时 $a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T\geqslant c_1^{(n)}I>0, b(x)\in\mathscr{B}(R^d)$ 且局部有界。又设 $\sigma(x),b(x)$ 满足线性增长条件：存在 K 使

$$|\sigma(x)|_{dr}+|b(x)|_d\leqslant K(1+|x|) \tag{4.24}$$

(其中 $|\sigma(x)|_{dr},|b(x)|_d$ 分别指 R^{dr},R^d 中的欧氏模)，那么 $\mathrm{SDE}(\sigma(\cdot),b(\cdot))$ 存在具分布唯一性的解。

证明 记

$$\varphi(x)=1+|x|^2.$$

由(4.24)，我们可知存在常数 C，使

$$|a(x)|_{d^2}+|x^Tb(x)|\leqslant C\varphi(x).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}A\varphi(x)&=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i b^i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\\&=\mathrm{tr}a(x)+2x^Tb(x)\\&\leqslant\text{某个常数 }C_0\varphi(x).\end{aligned}$$

令 σ_n,a_n,b_n,τ_n 如引理4.9 $\left(\sigma_n(x)=\sigma\left(\left(1\wedge\frac{n}{|x|}\right)x\right)\right)$。由定理4.1推出鞅问题 $\mathfrak{M}(a_n,b_n)$ 适定。设 $P_x^{(n)}\in\mathscr{P}(x;a_n,b_n)$，那么坐标过程 $w.$ 在 $P_x^{(n)}$ 下是 $\mathrm{SDE}_x(\sigma_n(\cdot),b_n(\cdot))$ 的解。对 $e^{-\lambda t}\varphi(w_t)$ 应用 Ito 公式，我们得到

$$\begin{aligned}&E_x^{(n)}e^{-\lambda(t\wedge\tau_n)}\varphi(w_{t\wedge\tau_n})-\varphi(x)\\&=E_x^{(n)}\int_0^{t\wedge\tau_n}[-\lambda e^{-\lambda s}\varphi(w_s)+A(e^{-\lambda s}\varphi)(w_s)]ds\\&=E_x^{(n)}\int_0^{t\wedge\tau_n}e^{-\lambda s}(A\varphi-\lambda\varphi)(w_s)ds\end{aligned}$$

$\leqslant 0$ (当 $\lambda \geqslant C_0$ 时)。

这就是说，当 $\lambda \geqslant C_0$ 时应有

$$\varphi(x) \geqslant e^{-\lambda t} E_x^{(n)}[\varphi(w_{\tau_n}) I_{\tau_n < t}]$$

$$= e^{-\lambda t} E_x^{(n)}[(1 + |w_{\tau_n}|^2) I_{\tau_n < t}]$$

$$= e^{-\lambda t}(1 + n^2) P_x^{(n)}(\tau_n \leqslant t).$$

因此

$$P_x^{(n)}(\tau_n \leqslant t) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由引理 4.9 推出鞅问题 $\mathfrak{M}(a,b)$ 适定。再利用引理 4.2 的推论便得定理。

注 1 若 $\sigma(x)$ 连续，且对任意 n，恒有 $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T \geqslant c_1^{(n)} I > 0$ (当 $|x| \leqslant n$)，$b(x) \in \mathscr{B}(R^d)$ 且局部有界，而且存在 $\varphi \in C^2$ 满足：对充分大的 λ

$$\varphi(x) \geqslant 0, \quad \varphi(\infty) = \infty, \quad A\varphi(x) \leqslant \lambda\varphi(x) \quad (\forall x \in R^d), \tag{4.25}$$

那么 SDE($\sigma(\cdot), b(\cdot)$)存在具分布唯一性的解。

证明 只需用 $\varphi(x)$ 代替定理 4.2 中的 $C(1 + |x|^2)$，即可得。

比定理4.2更为精细一些的唯一性条件必须考虑到系数 $\sigma(x)$ 与 $b(x)$ 之间的某种联系。下面的 Hasiminskii 条件的出发点乃是找一个具有 $u(|x|^2/2)$ 形式的 $\varphi(x)$，并使它满足(4.25)。

定理4.3(Hasiminskii 定理) 若 $\sigma(x)$ 连续，

$$a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T \geqslant c_1^{(n)} I > 0 \quad (\text{当 } |x| \leqslant n, \forall n),$$

$b(x) \in \mathscr{B}(R^d)$ 且局部有界。令

$$A(r) = \text{二次型 } x^T a(x) x \text{ 在 } |x| = \sqrt{2r} \text{ 上的最大值；}$$

$$B(r) = \frac{\operatorname{tr} a(x) + 2x^T b(x)}{x^T a(x) x} \text{ 在 } |x| = \sqrt{2r} \text{ 上的最大值；}$$

$$C(r) = \exp\left(\int_{r_0}^{r} B(r')\,\mathrm{d}r'\right) \quad (r_0 \text{ 为非负常数})。$$

如果(例如 $a(x)\equiv 1$，且在∞邻域内满足 $x^T b(x)\leqslant 0$ 情形)

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{C(r)}\int_{r_0}^{\infty}\frac{C(r')}{A(r')}dr'=\infty, \qquad (4.26)$$

那么 SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$存在具有分布唯一性的解.

证明 取

$$\varphi(x)=u\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\quad (\text{且 } u(\cdot)>0).$$

为了使 φ 满足(4.25)，我们看 $u(\cdot)$应该满足什么要求. 由于

$$A\varphi=\frac{1}{2}x^T a(x)xu''\left(\frac{|x|^2}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(\operatorname{tr}a(x)+2x^T b(x))u'\left(\frac{|x|^2}{2}\right),$$

如果要求 $u'\geqslant 0$，那么

$$A\varphi(x)\leqslant\frac{1}{2}A\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\left[u''\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\right.$$

$$\left.+B\left(\frac{|x|^2}{2}\right)u'\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\right].$$

假如再要求 u 满足

$$\frac{1}{2}A(u''+Bu')=u,$$

我们就有

$$A\varphi(x)\leqslant u\left(\frac{|x|^2}{2}\right)=\varphi(x).$$

因此，只要函数 u 满足:

$$u>0,u'\geqslant 0,\ \frac{1}{2}A(u''+Bu')=u,\ u(\infty)=\infty. \qquad (4.27)$$

那么 $\varphi(x)\equiv u(|x|^2/2)$就满足(4.25),所以为了证明定理，我们只需证明满足(4.27)的函数 $u=u(r)$的存在性.

我们先用迭代法求常微分方程

$$u=\frac{1}{2}A(u''+Bu')$$

的一个递增正解：令

$$u_0=1, \frac{1}{2}A(u_n''+Bu_n')=u_{n-1}, \quad u=\sum_0^\infty u_n,$$

其中 u_n 可用积分子因子 $\exp\left(\int_{r_0}^r B(r')dr'\right)$解出(在两次求不定积分中，分别取任意常数为 1 和 0)：

$$u_n(r)=2\int_{r_0}^r \frac{dr}{C(r)}\int_{r_0}^r \frac{C(r')}{A(r')}u_{n-1}(r')dr'\geqslant 0.$$

于是

$$u_n'=\frac{2}{C(r)}\int_{r_0}^r \frac{C(r')}{A(r')}u_{n-1}(r')dr'\geqslant 0;$$

$$u_n''=\frac{2}{A(r)}u_{n-1}(r)-2\frac{B(r)}{C(r)}\int_{r_0}^r \frac{C(r')}{A(r')}u_{n-1}(r')dr'.$$

利用数学归纳法，我们推得

$$u_n(r)\leqslant\frac{2^n}{n!}\left(\int_{r_0}^r \frac{dr}{C(r)}\int_{r_0}^r \frac{C(r')}{A(r')}dr'\right)^n,$$

所以 $\sum u_n, \sum u_n', \sum u_n''$ 在任意有限区间上均为一致收敛。从而 u 有确定意义，而且可以两次逐项微分。又由于(4.26)

$$u(r)\geqslant u_1(r)=2\int_{r_0}^r \frac{dr}{C(r)}\int_{r_0}^r \frac{C(r')}{A(r')}dr'\to\infty,$$

于是 u 满足(4.27)。定理得证。

在这方面，我们还有，例如：

定理(Elworthy) 若 $\sigma(x)$连续，$a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T\geqslant c_1^{(n)}I>0$ (当$|x|\leqslant n$, $\forall n$)，$b(x)\in\mathscr{B}(R^d)$且局部有界。如果存在 R^d 上非负函数 $g(x)$及正数 $r_n\uparrow\infty$，使$\{g(x)\leqslant r_n\}$紧，且

$$\varliminf_n \frac{\sup\limits_{\{x: g(x)<r_n\}} Ag(x)}{r_n}\leqslant 0,$$

那么 SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$)存在具有分布唯一性的解。

证明 取

$$h_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } g(x)\leqslant r_n,\\ 0, & \text{当 } g(x)\geqslant r_{n+1},\\ \text{连续}.\end{cases}$$

令 τ_n 为坐标过程 w. 首次越出 $\{x:g(x)<r_n\}$ 的时刻。记

$$a^{(n)}(x)=a(x)h_n(x),\quad b^{(n)}(x)=b(x)h_n(x).$$

设 $a^{(n)},b^{(n)}$ 对应的微分算子为 $A^{(n)}$。那么 $\mathfrak{M}(a_n,b_n)$ 适定，而且对 $P_x^{(n)}\in\mathscr{D}(x;a^{(n)},b^{(n)})$ 有

$$\begin{aligned}r_nP_x^{(n)}(\tau_n\leqslant t)&\leqslant E_x^{(n)}(g(w_{t\wedge\tau_n})I_{\tau_n<t})\\&\leqslant E_x^{(n)}g(w_{t\wedge\tau_n})\\&=g(x)+E_x^{(n)}\int_0^{t\wedge\tau_n}A^{(n)}g(w_s)\mathrm{d}s\\&\leqslant g(x)+\sup_{\{y:g(y)<r_n\}}Ag(y).\end{aligned}$$

于是

$$P_x^{(n)}(\tau_n>t)\geqslant 1-\frac{g(x)}{r_n}-\frac{\left(\sup\limits_{\{y:g(y)<r_n\}}Ag(y)\right)}{r_n}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}P_x^{(n)}(\tau_n>t)\geqslant 1-\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\left(\sup\limits_{\{y:g(y)<r_n\}}Ag(y)\right)}{r_n}\geqslant 1.$$

仿引理 4.9 及引理 4.2 可知定理结论成立。

§4.2 有限时间可能爆炸的解

如果 $\sigma(x)$ 连续，$a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T\geqslant\gamma_1^{(n)}I(|x|\leqslant n,\forall n)$，$b(x)\in\mathscr{B}(R^d)$ 且局部有界，那么线性增长或 Hasiminskii 条件就保证了在 $0\leqslant t<\infty$ 上 SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$)“整体”(弱)解的存在并有分布唯一性。如果没有这一类条件，方程的解就会出现“爆炸”。即解过程有一个灭绝时间 ξ，在时刻 ξ 以及 ξ 以后，过程以

概率为 1 地被“杀”死在“死点”(记为 ∂)上(局部解)。

对 R^d 作单点紧化，被加进去的紧化点记成 ∂，记扩大的相空间为

$$\hat{R}^d = R^d \cup \{\partial\};$$

$$\hat{\mathscr{G}} = \{G: G \subset \hat{R}^d,\ G \text{是 } \mathscr{B}(R^d) \text{中开集或者 } \hat{R}^d \backslash G \text{ 是 } R^d \text{ 中紧集}\};$$

$$\mathscr{B}(\hat{R}^d) = \sigma(\hat{\mathscr{G}}).$$

在 $\hat{R}^d$ 距离化后，$(\hat{R}^d, \mathscr{B}(\hat{R}^d))$ 是紧距离可测空间。再记

$$\hat{W}^d = \{w = w_\cdot: w_t \text{ 是定义于}[0,\infty) \text{ 取值于 } \hat{R}^d \text{ 的连续函数，满足“}w_t = \partial \Rightarrow w_{t+\cdot} = \partial\text{”}\}$$

(一般地还可不要求在 ∂ 处的左连性)，其中

$$\zeta(w) = \inf\{t: w_t = \partial\}$$

称为轨道 $w_\cdot$ 的爆炸时刻。它是 $(\mathscr{B}_t(\hat{W}^d))$ 停时。定义 $w_\infty = \partial$。

由 $\hat{R}^d$ 中的距离，仿照 W^d，可在 $\hat{W}^d$ 定义距离，使 $\hat{W}^d$ 为完备距离空间。同样，$\hat{W}^d$ 全体开子集生成的 σ 代数与全体柱集生成的 σ 代数 $\mathscr{B}(\hat{W}^d)$ 是一样的。因而 $\hat{W}^d$ 是 Polish 空间。类似地可定义 $\mathscr{B}_t(\hat{W}^d)$ 等。不同之处仅在于 $\hat{R}^d$ 不是加群。所以 $\hat{W}^d$ 中没有线性运算，因此当在 $(\hat{W}^d, \mathscr{B}(\hat{W}^d))$ 上给定概率 P 后，Ew_t 没有确切定义。

定义4.3 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(\hat{W}^d, \mathscr{B}(\hat{W}^d))$ 的随机元(可测变换)X 称为 SDE$(\sigma(\cdot), b(\cdot))$ 的(可能有爆炸的)解，如果存在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上概率测度 P 及参考族 $(\mathscr{F}_t)$，$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B，使 ($X = (X_t)_{0 \leqslant t < \infty}$ 的 t“分量”)X_t 为 $\mathscr{F}_t$ 到 $\mathscr{B}(\hat{R}^d)$ 可测，而且在 $t < \zeta$ 时有

$$X_t - X_0 = \int_0^t \sigma(X_s) \mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s) \mathrm{d}s,$$

$$\int_0^t \sigma(X_s) \mathrm{d}B_s \equiv \int_0^{t \wedge \zeta_n} \sigma(X_s) \mathrm{d}B_s \quad (t \leqslant \zeta_n),$$

其中

$$\zeta_n \equiv \inf\{t: |w_t| \geqslant n\} \quad (\zeta_n \uparrow \zeta)$$

有时我们也称(X,B)为SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$的解。我们又称SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$存在解，如果以上的$(\Omega,\mathscr{F})$存在，且在$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上有解$X$。$\zeta(\omega)$称为$X$的爆炸时刻。

类似地也有分布唯一性概念。

在求X_t的期望时，我们用$E(X_t I_{t<\zeta})$来代替EX_t。

引理4.10 设$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上零初值$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动列$B^{(n)}$对递增$(\mathscr{F}_t)$停时列$\zeta_n$满足相容性条件：

$$B^{(n+1)}_{t\wedge\zeta_n} = B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n},$$

则存在概率空间$(\tilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},(\widetilde{\mathscr{F}}_t),\tilde{P})$，使在乘积空间

$$(\hat{\Omega},\hat{\mathscr{F}},(\hat{\mathscr{F}}_t),\hat{P}) \equiv (\Omega\times\tilde{\Omega},\ \mathscr{F}\times\widetilde{\mathscr{F}},\ (\mathscr{F}_t\times\widetilde{\mathscr{F}}_t),P\times\tilde{P})$$

上存在$(\hat{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动$B=(B_t(w,\tilde{\omega}))_{0\leqslant t<\infty}$，使

$$B_{t\wedge\zeta_n}(\omega) = B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}.$$

证明 取一个$(\tilde{\Omega},\hat{\mathscr{F}},(\widetilde{\mathscr{F}}_t),\tilde{P})$及$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动$\tilde{B}$，定义

$$B_t = \lim_{n\to\infty} B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n} + (\tilde{B}_t - \tilde{B}_{t\wedge\zeta}), \tag{4.28}$$

其中

$$\zeta = \lim_{n\to\infty}\zeta_n.$$

首先我们来证明(4.28)中的极限是存在的。事实上，令

$$y_n = B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n},$$

那么

$$\begin{aligned}\hat{E}(y_{n+1}|\hat{\mathscr{F}}_{t\wedge\zeta_n}) &= \hat{E}(B^{(n+1)}_{t\wedge\zeta_{n+1}}|\hat{\mathscr{F}}_{t\wedge\zeta_n})\\ &= E(B^{(n+1)}_{t\wedge\zeta_{n+1}}|\mathscr{F}_{t\wedge\zeta_n})\end{aligned}$$

$$= B^{(n+1)}_{t\wedge\zeta_n} = B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n} = y_n \quad (\text{a.e.d}\hat{P}),$$

而且

$$\hat{E}y_n^2 = \hat{E}[(B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n})^2 - (\zeta_n \wedge t)] + \hat{E}(t\wedge\zeta_n)$$
$$= \hat{E}(t\wedge\zeta_n) \leqslant t.$$

所以对 t 固定后 $B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}$ 是 $L^2(\mathrm{d}\hat{P})$收敛的$(\hat{\mathscr{F}}_{t\wedge\zeta_n})$鞅列。因此极限 $L^2(\mathrm{d}\hat{P})\lim\limits_{n\to\infty} B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}$ 存在，我们把它记成 η_t。

再则，我们证明 B 对于 $\hat{P}$ 属于$\mathscr{M}_2^c(\hat{\mathscr{F}}_t)$。事实上，因为 $B^{(n)}_{\zeta_n\wedge t} \xrightarrow{L_2(\mathrm{d}P)} \eta_t$，显然 B 为平方可积。此外对 $s<t$

$$\hat{E}(\eta_t\,|\,\hat{\mathscr{F}}_s) = L_2(\mathrm{d}\hat{P})\lim_{n\to\infty}\hat{E}(B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}\,|\,\hat{\mathscr{F}}_s)$$
$$= (L_2)\lim_{n\to\infty} E(B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}\,|\,\mathscr{F}_s)$$
$$= L_2(\mathrm{d}\hat{P})\lim_{n\to\infty} B^{(n)}_{s\wedge\zeta_n} = \eta_s.$$

所以结论成立。

最后，我们证明$\langle B\rangle_t = t$。事实上，由于$(B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n})^2 \xrightarrow{L_1(\mathrm{d}\hat{P})} \eta_t^2$，$B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}(\tilde{B}_t - \tilde{B}_{t\wedge\zeta}) \xrightarrow{L_1(\mathrm{d}\hat{P})} \eta_t(\tilde{B}_t - \tilde{B}_{t\wedge\zeta})$以及 $B^{(n)}$ 和 $\tilde{B}$ 的相互独立性，对于 $s<t$ 我们有

$$\hat{E}[(B_t^2 - B_s^2 - (t-s))\,|\,\hat{\mathscr{F}}_s]$$
$$= L_1(\mathrm{d}\hat{P})\lim_{n\to\infty}\hat{E}[([B^{(n)}_{\cdot\wedge\zeta_n} + (\tilde{B}_\cdot - \tilde{B}_{\cdot\wedge\zeta})]^2\,|_s^t$$
$$- [t-s])\,|\,\hat{\mathscr{F}}_s]$$
$$= L_1(\mathrm{d}\hat{P})\lim_{n\to\infty}\hat{E}[(\langle B^{(n)}_{\cdot\wedge\zeta_n}\rangle\,|_s^t$$
$$+ \langle\tilde{B}_\cdot - \tilde{B}_{\cdot\wedge\zeta}\rangle\,|_s^t - (t-s))\,|\,\hat{\mathscr{F}}_s]$$
$$= L_1(\mathrm{d}\hat{P})\lim_{n\to\infty}[E(\langle B^{(n)}_{\cdot\wedge\zeta_n}\rangle\,|_s^t\,|\,\mathscr{F}_s)$$
$$+ \hat{E}(\langle\tilde{B}_\cdot - \tilde{B}_{\cdot\wedge\zeta}\rangle\,|_s^t\,|\,\hat{\mathscr{F}}_s) - (t-s)]$$
$$= L_1(\mathrm{d}\hat{P})\lim_{n\to\infty}\{E[t\wedge\zeta_n - s\wedge\zeta_n)\,|\,\mathscr{F}_s]$$

$$+E([(t-t\wedge\zeta)-(s-s\wedge\zeta)]|\mathscr{F}_s)-(t-s)\}$$

$$=L_1(\mathrm{d}\hat{P})\lim_{n\to\infty}E([(t\wedge\zeta_n-t\wedge\zeta)$$

$$-(s\wedge\zeta_n-s\wedge\zeta)]|\mathscr{F}_s)$$

$$=0\quad(\text{有界收敛性}).$$

所以$\langle B\rangle_t=t$。这就推出B是$(\hat{\mathscr{F}}_t)$Brown运动。显然我们有$B_{t\wedge\zeta_n}=B^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}$。于是引理得证。

命题4.2 $X=(X_t)_{t\geq 0}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$可测变换。对参考系$(\mathscr{F}_t)$，$X_t$为$\mathscr{F}_t$到$\mathscr{B}(\hat{R}^d)$可测的。设$\zeta_n$与$\zeta$分别是$|X_t|$首达$n$与$\partial$的时刻，那么，$X$是SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$的解，当且仅当对任意$f\in C_K^2$，

$$M_t^{(f)}=f(X_t)-f(X_0)-\int_0^{t\wedge\zeta_n}Af(X_s)\mathrm{d}s\in\mathscr{M}_2^c(\mathscr{F}_t),$$

或者等价地对任意n及$f\in C^2$，$M^{(f)}_{t\wedge\zeta_n}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)$。

证明 若X是SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$的解，对于$f\in C_K^2$，它的支集必含于某个$|x|\leqslant n$之中。于是$M_t^{(f)}=M^{(f)}_{t\wedge\zeta_n}$，由定理3.4推出后者属于$\mathscr{M}_2^c$。

与定理3.4类似地我们可推出：

$$\forall f\in C_K^2,M^{(f)}\in\mathscr{M}_2^c\Longleftrightarrow\forall f\in C^2,\forall n,M^{(f)}_{\cdot\wedge\zeta_n}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}.$$

最后，如果$\forall f\in C^2$，$\forall n$有$M^{(f)}_{\cdot\wedge\zeta_n}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$，我们来证明$X$是SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$的解。分别取$f=x_1,\cdots,x_d$（$x=(x_1,\cdots,x_d)^T\in R^d$），把$M^{(x_1)}_{\cdot\wedge\zeta_n},\cdots,M^{(x_d)}_{\cdot\wedge\zeta_n}$排成列向量记成$M^{(n)}$，即

$$M_t^{(n)}=X_{t\wedge\zeta_n}-X_0-\int_0^{t\wedge\zeta_n}b(X_s)\mathrm{d}s\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}.$$

显然$M^{(n+1)}_{t\wedge\zeta_n}=M^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}$。由引理3.9可算得

$$\langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_t = \int_0^t \sigma(X_{s\wedge\zeta_n})\sigma^T(X_{s\wedge\zeta_n})^T ds.$$

再由引理3.8推出存在某个$(\Omega', \mathscr{F}', (\mathscr{F}'_t), P')$上$(\mathscr{F}'_t)$ Brown运动B'，使得按照(3.27)定义的

$$B_t^{(n)} \equiv \int_0^t \lim_{\varepsilon\to\infty} \sigma(\sigma\sigma^T + \varepsilon I)^{-1}\Big|_{X_{s\wedge\zeta_n}} dM_s^{(n)} + \int_0^t (I - E_1(s))dB'_s \tag{4.29}$$

是一个$(\mathscr{F}_t \times \mathscr{F}'_t)$Brown运动，并且使

$$M_t^{(n)} = \int_0^t \sigma(X_{s\wedge\zeta_n})dB_s^{(n)}. \tag{4.30}$$

显然由(4.29)定义的$B^{(n)}$满足相容性条件$B_{t\wedge\zeta_n}^{(n+1)} = B_{t\wedge\zeta_n}^{(n)}$。所以由引理4.10推出存在$(\mathscr{F}_t \times \mathscr{F}'_t \times \widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown运动

$$B = B_t((\omega, \omega'), \tilde{\omega}),$$

使

$$B_{t\wedge\zeta_n}(\omega) = B_{t\wedge\zeta_n}^{(n)}.$$

因此(4.30)可以改写为

$$M_t^{(n)} = \int_0^{t\wedge\zeta_n} \sigma(X_s)dB_s.$$

也就是

$$X_{t\wedge\zeta_n} - X_0 - \int_0^{t\wedge\zeta_n} b(X_s)ds = \int_0^{t\wedge\zeta_n} \sigma(X_s)dB_s.$$

于是X是SDE$(\sigma(\cdot), b(\cdot))$在$(\Omega\times\Omega'\times\widetilde{\Omega}, \mathscr{F}\times\mathscr{F}'\times\widetilde{\mathscr{F}}, (\mathscr{F}_t \times \mathscr{F}'_t \times \widetilde{\mathscr{F}}_t), P\times P'\times \bar{P})$上的解。命题得证。

定理4.4 若$\sigma(x), b(x)$连续，则对于$(\hat{R}^d, \mathscr{B}(\hat{R}^d))$上任意概率分布$\mu$，SDE$(\sigma(\cdot), b(\cdot))$存在(可能有爆炸的)解$X$，它具有初分布$\mu$。

证明 主要思想是对系数$\sigma(x), b(x)$作“压缩”，压成有界的，

并以此为系数求得方程的整体解，再用随机时间变换把这个解压缩到可能为有限的随机时间内。我们不妨设 μ 是 $(R^d, \mathscr{B}(R^d))$ 上的概率分布。首先我们要“压缩”系数。取连续函数 $\rho(x)$，使 $0<\rho(x)\leqslant 1$ 而且使 $\rho(x)\sigma(x)$，$\rho(x)b(x)$ 有界。由定理 3.5 可知存在 $(\Omega, \widetilde{\mathscr{F}}, (\widetilde{\mathscr{F}}_t), P)$ 使 SDE$(\rho\sigma(\cdot), \rho b(\cdot))$ 在这个概率空间上有初分布为 μ 的解 $\widetilde{X}$。

令
$$A_t = \int_0^t \rho(\widetilde{X}_s)\mathrm{d}s.$$
它是严格递增的 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 适应过程。记 $\zeta = A_\infty$。那么 A_t 有一个连续逆 τ_t，它定义于 $0\leqslant t<\zeta$ 上。在 $t\geqslant\zeta$ 时，我们补充定义 $\tau_t = \infty$。于是 τ_t 是一族对 t 连续的严格递增 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 停时族（直观地还可看到，在 t 处如果 $\widetilde{X}_t$ 很大，那么 $\rho(\widetilde{X}_t)$ 很小，于是 A_t 缓慢，因此 τ_t 速增）。

作随机时间变换，令
$$\mathscr{F}_t = \widetilde{\mathscr{F}}_{\tau_t};$$
$$X_t = \begin{cases} \widetilde{X}_{\tau_t}, & \text{当 } 0\leqslant t<\zeta, \\ \partial, & \text{当 } t\geqslant\zeta. \end{cases}$$
显然 X_t 是 $\mathscr{F}_t$ 到 $\mathscr{B}(R^d)$ 可测的。我们来证明 X 取值于 W^d，也就是要证明当 $\zeta<\infty$ 时有
$$\lim_{t\to\zeta} X_t = \partial \quad (\text{等价地} \lim_{t\to\infty}\widetilde{X}_t = \partial). \tag{4.31}$$
为此，对 $L<N$ 我们定义
$$\begin{cases} \hat{\sigma} \text{ 为 } \widetilde{X}_t \text{ 首达 } |x|\geqslant N \text{ 的时刻；} \\ \sigma \text{ 为 } \widetilde{X}_t \text{ 首达 } |x|\leqslant L \text{ 的时刻。} \end{cases}$$
再令
$$\begin{cases} \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}; & \\ \sigma_1 = \hat{\sigma}_0 + \theta_{\hat{\sigma}_0}\sigma; & \hat{\sigma}_1 = \sigma_1 + \theta_{\sigma_1}\hat{\sigma}; \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sigma_n = \hat{\sigma}_{n-1} + \theta_{\hat{\sigma}_{n-1}}\sigma; & \hat{\sigma}_n = \sigma_n + \theta_{\sigma_n}\hat{\sigma}. \end{cases}$$

记 Ω 中集合

$$\Omega^{(N)}=\{|\tilde{X}_0|<N\}=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3,$$

其中

$$\begin{cases}\Omega_1=\{\omega\in\Omega^{(N)}:\ \exists n \text{ 使 } \sigma_n<\infty,\hat{\sigma}_n=\infty\};\\ \Omega_2=\{\omega\in\Omega^{(N)}:\ \forall n \text{ 均有 } \sigma_n<\infty\};\\ \Omega_3=\{\omega\in\Omega^{(N)}:\ \exists n \text{ 使 } \hat{\sigma}_n<\infty,\sigma_{n+1}=\infty\}.\end{cases}$$

我们先证明在 $\Omega_1\cup\Omega_2$ 上有 $\zeta=\infty$(a.e.dP)。事实上，在Ω_1上我们有

$$\zeta=\int_0^\infty\rho(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s\geqslant\int_{\sigma_n}^\infty\rho(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s$$

$$\geqslant\min_{|x|\leqslant N}\rho(x)\int_{\sigma_n}^\infty\mathrm{d}s=\infty.$$

而在 Ω_2 上

$$\zeta=\int_0^\infty\rho(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s\geqslant\sum_n\int_{\sigma_n}^{\hat{\sigma}_n}\rho(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s$$

$$\geqslant\min_{|x|\leqslant N}\rho(x)\sum_n(\hat{\sigma}_n-\sigma_n).$$

我们来证明在 Ω_2 上有 $\sum\limits_n(\hat{\sigma}_n-\sigma_n)=\infty$(a.e.d$P$)。我们不妨假定 $(\Omega,\tilde{\mathscr{F}})$为$(W^d,\mathscr{B}(W^d))$，而且 $d=1$(因为 $d>1$时证明实质一样)。在 Ω_2 上我们有一切 $\sigma_n<\infty$，而且

$$\hat{\sigma}_n-\sigma_n\geqslant\inf\{t:\ |\tilde{X}_{\sigma_n+t}-\tilde{X}_{\sigma_n}|\geqslant N-L\}.$$

下面我们估计右面的表示式。仿照引理4.3并应用引理3.1，我们a.e.dP地有下述事实：在 $\sigma_n<\infty$ 上积分$\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+t}(\rho\sigma)(\tilde{X}_s)\mathrm{d}B_s$对于 $P(\,|\tilde{\mathscr{F}}_{\sigma_n})$的正则条件分布引起的条件测度$P^{\sigma_n}$是$(\tilde{\mathscr{F}}_{\sigma_n+t})$平方可积鞅，而且具有特征 $\varphi_t=\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+t}[(\rho\sigma)(\tilde{X}_s)]^2\mathrm{d}s$。再由定

理 1.6 可知存在与$\widetilde{\mathscr{F}}_{\sigma_n}$独立的零初值 Brown 运动 $\tilde{B}$，使

$$\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+t}(\rho\sigma)(\tilde{X}_s)\mathrm{d}B_s=\tilde{B}_{\varphi_t}.$$

于是我们在 $\sigma_n<\infty$上有

$$\{|\tilde{X}_{\sigma_n+t}-\tilde{X}_{\sigma_n}|\geqslant N-L\}$$

$$\subset\left\{|\tilde{B}_{\varphi_t}|\geqslant\frac{N-L}{2}\right\}\cup\left\{\left|\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+t}(\rho b)(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s\right|\geqslant\frac{N-L}{2}\right\}.$$

设 $\tilde{B}$ 初达$|x|\geqslant\dfrac{N-L}{2}$的时刻为 $\sigma_{\frac{N-L}{2}}$。如果我们记

$$C=\sup_x((\rho\sigma)(x))^2+|(\rho b)(x)|)+1.$$

那么$\left|\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+t}(\rho b)(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s\right|+\varphi_t<Ct$。因此在 $\sigma_n<\infty$上

$$\hat{\sigma}_n-\sigma_n\geqslant\inf\{t:\ |\tilde{X}_{\sigma_n+t}-\tilde{X}_{\sigma_n}|\geqslant N-L\}$$

$$\geqslant\inf\left\{t:\ |\tilde{B}_{\varphi_t}|\geqslant\frac{N-L}{2}\right\}$$

$$\wedge\inf\left\{t:\ \left|\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+t}(\rho b)(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s\right|\geqslant\frac{N-L}{2}\right\}$$

$$=\inf\{t:\ \varphi_t\geqslant\sigma_{\frac{N-L}{2}}\}$$

$$\wedge\inf\left\{t:\ \left|\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+t}(\rho b)(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s\right|\geqslant\frac{N-L}{2}\right\}$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{C}\sigma_{\frac{N-L}{2}}\right)\wedge\frac{1}{C}\frac{N-L}{2}=\frac{1}{C}\left(\sigma_{\frac{N-L}{2}}\wedge\frac{N-L}{2}\right).$$

这样我们就有

$$E\left[I_{\Omega_2}\exp\left(-\sum_n(\hat{\sigma}_n-\sigma_n)\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}E\left[\prod_{k=1}^n I_{\sigma_k<\infty}\exp\left(-\sum_{k=1}^n(\hat{\sigma}_k-\sigma_k)\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} E\Big[\prod_{k=1}^{n-1} I_{\sigma_k<\infty}\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n-1}(\hat\sigma_k-\sigma_k)\Big)$$

$$\times E(I_{\sigma_n<\infty}\exp(\sigma_n-\hat\sigma_n)\mid\widetilde{\mathscr F}_{\sigma_n})\Big].$$

但是

$$E(I_{\sigma_n<\infty}\exp(\sigma_n-\hat\sigma_n)\mid\widetilde{\mathscr F}_{\sigma_n})$$

$$\leqslant E^W\exp\Big(-\frac{1}{C}\Big(\sigma_{\frac{N-L}{2}}\wedge\frac{N-L}{2}\Big)\Big)$$

$$\equiv a<1,$$

所以 $$E\Big(I_{\Omega_2}\exp\Big(-\sum_n(\hat\sigma_n-\sigma_n)\Big)\Big)=0.$$

即 $$P\Big(I_{\Omega_2}\exp\Big(-\sum_n(\hat\sigma_n-\sigma_n)\Big)=0\Big)=1.$$

因此在 Ω_2 上 $\sum_n(\hat\sigma_n-\sigma_n)=\infty$ (a.e.dP).

这样我们就有

$$\Omega^{(N)}\cap\{\zeta<\infty\}\subset\Omega_3.$$

也就是说，只要 $\omega\in\Omega^{(N)}$ 且 $\zeta(\omega)<\infty$，就存在 n，使 $\hat\sigma_n<\infty$，而且当 $t\geqslant\hat\sigma_n$ 时恒有 $|\bar X_t|\geqslant L$.

但是我们还有

$$\{\zeta(\omega)<\infty\}=\bigcup_{N=2L}^{\infty}(\Omega^{(N)}\cap\{\zeta<\infty\}),$$

所以在 $\{\zeta<\infty\}$ 上 $|\bar X_t|$ 最终将概率为 1 地大于 L。又因为 L 可任意地大，因此在 $\{\zeta<\infty\}$ 上 $X_t\to\partial$ $(t\uparrow\zeta)$(a.e.dP).

最后，我们来证明 X 满足方程 SDE($\sigma(\cdot),b(\cdot)$)。任取 $f\in C_K^2$，必定存在 n，使 f 的支集在 $|x|\leqslant n$ 中。设 X 首次超出 $|x|\leqslant n$ 的时刻为 ζ_n，那么 $M_t^{(f)}=M_{t\wedge\zeta_n}^{(f)}$。另一方面由于 τ_t 的严格单调递增性，我们有

$$\tau_{t\wedge\zeta_n}\min_{|x|\leqslant n}\rho(x)\leqslant\int_0^{\tau_t\wedge\tau_{\zeta_n}}\rho(\bar X_s)\mathrm ds\leqslant\int_0^{\tau_t}\rho(\bar X_s)\mathrm ds=t.$$

因此$\tau_{t\wedge\zeta_n}$是有界$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$停时。于是由 Doob 停止定理知

$$M_t^{(f)}=M_{t\wedge\zeta_n}^{(f)}=f(X_{t\wedge\zeta_n})-f(X_0)-\int_0^{t\wedge\zeta_n}Af(X_s)\mathrm{d}s$$

$$=f(\tilde{X}_{\tau_{t\wedge\zeta_n}})-f(\tilde{X}_0)-\int_0^{t\wedge\zeta_n}Af(\tilde{X}_{\tau_s})\mathrm{d}s$$

$$=f(\tilde{X}_{\tau_{t\wedge\zeta_n}})-f(\tilde{X}_0)-\int_0^{\tau_{t\wedge\zeta_n}}Af(\tilde{X}_u)\mathrm{d}A_u$$

$$=f(\tilde{X}_{\tau_{t\wedge\zeta_n}})-f(\tilde{X}_0)-\int_0^{\tau_{t\wedge\zeta_n}}(\rho Af)(\tilde{X}_u)\mathrm{d}u$$

是$(\widetilde{\mathscr{F}}_{\tau_t})$鞅，也就是$(\mathscr{F}_t)$鞅。由命题4.2可知$X$是SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$的解。定理得证。

注　对应地有鞅问题，只是P_x应了解成$(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$上的测度。

§4.3　随机微分方程的解和扩散过程

定义4.4　$(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$上概率测度族$\{P_x:\ x\in\hat{R}^d\}$称为马氏族，如果它满足：

(M_1)　对于任意$A\in\mathscr{B}(\hat{W}^d)$固定，$P_x(A)$是$x\in R^d$的$\mathscr{B}(R^d)$可测函数；

(M_2)　对于任意$x\in\hat{R}^d$有$P_x\{w_0=x\}=1$；

(M_3)　对于任意$x\in\hat{R}^d$，$\Gamma\in\mathscr{B}(\hat{R}^d)$恒有

$$P_x(w_{s+t}\in\Gamma\mid\mathscr{B}_s(\hat{W}^d))=P_{w_s}(w_t\in\Gamma)\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P_x).\tag{4.32}$$

注　在(M_2)条件下，(M_1)与下述(M_1')等价：

(M_1')　对于任意$A\in\mathscr{B}(\hat{W}^d)$固定，$P_x(A)$是$x\in\hat{R}^d$的$\mathscr{B}(\hat{R}^d)$可测函数。

证明　如果$A=\{w_t\in\Gamma\}$，那么当$\lambda<1$时我们有

$\{x:\ x\in\hat{R}^d,P_x(A)\leqslant\lambda\}$

$$=\{x:\ x\in R^d, P_x(A)\leqslant\lambda\}\cup(\{\partial\}\cap\Gamma).$$

因此$P_x(A)\in\mathscr{B}(\hat{R}^d)$。一般$A\in\mathscr{B}(\hat{W}^d)$可用典型逼近得到$P_x(A)$对$x$的$\mathscr{B}(\hat{R}^d)$可测性。

定义4.5 给定$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P_x,X,\zeta)$，其中$(\mathscr{F}_t)$是$\mathscr{F}$的递增子$\sigma$代数族，$X=(X_t)_{t\geq 0}$，$X_t$为$\mathscr{F}_t$到$\hat{R}^d$的可测变换且$X$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$的可测变换，$P_x(x\in\hat{R}^d)$是概率测度族，$\zeta$是$X_t$首次到达$\partial$的时刻。我们称$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t^X),P_x,X,\zeta)$为连续马氏过程，如果$\{P_xX^{-1}:\ x\in\hat{R}^d\}$是马氏族，而且

$$\mathscr{F}_t^X=X^{-1}(\mathscr{F}_t(\hat{W}^d))$$

$$\left(\mathscr{F}_t(\hat{W}^d)=\bigcap_{x\in R^d}(\bar{\mathscr{B}}_{t+}(\hat{W}^d))^{P_x}\right).$$

有时我们简称X为(连续)马氏过程，称ζ为它的爆炸时刻。当对任意x均有$P_x(\zeta=\infty)=1$时，我们称马氏过程X为不断的，或保守的。

定义4.6 $(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$上概率测度族$\{P_x:\ x\in\hat{R}^d\}$称为强马氏族，如果它满足定义4.3中的$(M_1)$，$(M_2)$以及

(M_3') 对于任意$x\in\hat{R}^d$，$\Gamma\in\mathscr{B}(\hat{R}^d)$及$(\mathscr{F}_t(\hat{W}^d))$停时$\tau$，恒有

$$P_x(w_{t+\tau}\in\Gamma\mid\mathscr{F}_\tau(\hat{W}^d))=P_{w_\tau}(w_t\in\Gamma)\quad(\text{a.e.}dP_x)\tag{4.33}$$

(注意：$\mathscr{F}_t(\hat{W}^d)$是$\mathscr{B}_t(\hat{W}^d)$在一切P_x下的完备右连续化σ代数之交)。

注 (M_3')等价于

(M_3'') 对于任意$x\in\hat{R}^d$，$\hat{f}\in C_b(\hat{R}^d)$(或$f\in C_b(\hat{R}^d)$且$f(\partial)=0$)及$(\mathscr{F}_t(\hat{W}^d))$停时$\sigma$，恒有

$$E_x\hat{f}(w_{t+\sigma})=E_xE_{w_\sigma}f(w_t).\tag{4.34}$$

证明 由(M_3')取期望后再用典型逼近便得(M_3'')。另一方面，

对于任意 $A\in\mathscr{F}_\tau$，在(M_3'')中令 $\sigma=\tau_A$(在 A 上的限制)再用典型逼近便得(M_3')。

如果定义4.4中的$\{P_xX^{-1}: x\in\hat{R}^d\}$是强马氏族，则我们称该马氏过程为强马氏过程。

命题4.3 1° 若$\{P_x: x\in\hat{R}^d\}$是马氏族，则它由

$$\{P(t,x,\Gamma): P(t,x,\Gamma) = P_x(w_t\in\Gamma), t\geqslant 0, x\in\hat{R}^d, \Gamma\in\mathscr{B}(\hat{R}^d)\}$$

唯一确定。

2° 当(M_1),(M_2)两条都满足时，(M_3)等价于对任意有界

$$\eta\in\mathscr{B}(\hat{W}^d),\quad x\in\hat{R}^d,\quad s\geqslant 0,$$

恒有
$$E_x(\theta_s\eta\,|\,\mathscr{B}_s(\hat{W}^d)) = E_{w_s}\eta.$$

(M_3')等价于对任意有界 $\eta\in\mathscr{B}(\hat{W}^d)$及($\mathscr{F}_t(\hat{W}^d)$)停时 τ 及$x\in\hat{R}^d$ 恒有

$$E_x(\theta_\tau\eta\,|\,\mathscr{F}_\tau(\hat{W}^d)) = E_{w_s}\eta. \tag{4.35}$$

证明与(4.6)的证明类似。

引理4.11 对于 $A\in\mathscr{B}(\hat{W}^d)$固定，把 $P(A)$看成 $\mathscr{P}(\hat{W}^d)$上的泛函必是可测的。

特别地，如果 $\sigma(x), b(x)$有界$\in\mathscr{B}(R^d)$, $a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T$，鞅问题$\mathfrak{M}(a,b)$适定，那么对于任意 $A\in\mathscr{B}(\hat{W}^d)$固定，$P_x(A)$是$x\in R^d$ 的$\mathscr{B}(R^d)$可测函数。

证明 设G为任意$\mathscr{B}(\hat{W}^d)$开集，

$$P_n\in\mathscr{P}_1\equiv\{P: P\in\mathscr{P}(\hat{W}^d), P(G)\leqslant\lambda\},$$

而且 P_n 弱敛于P，那么我们有

$$P(G)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}P_n(G)\leqslant\lambda.$$

因此 $P\in\mathscr{P}_1$，即$\mathscr{P}_1$是$\mathscr{P}(\hat{W}^d)$中的闭集，从而是$\mathscr{P}(\hat{W}^d)$中的可测集。但是 λ 可以任意取，所以 $P(G)$作为 $P\in\mathscr{P}(\hat{W}^d)$的函数是可测的。

令

$$\mathscr{A}=\{A\in\mathscr{B}(\hat{W}^d),P(A)\text{是}P\in\mathscr{P}(\hat{W}^d)\text{的可测函数}\}.$$

易见$\mathscr{A}$是一个 d 系，而且$\mathscr{A}\supset\pi$ 系$\mathscr{G}\equiv\mathscr{B}(\hat{W}^d)$中的全体开集。因此$\mathscr{A}$应包含$\mathscr{G}$的 d 扩张，即包含$\mathscr{B}(\hat{W}^d)$。于是任意固定 $A\in\mathscr{B}(\hat{W}^d)$，$P(A)$是 P 的可测函数。

当$\mathfrak{M}(a,b)$适定时，由引理4.2可知 $x\to P_x$ 是可测的。因此复合变换 $x\to P_x\to P_x(A)$对 x 是可测的。

定义4.7 设$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t^X),P_x,X,\zeta)$是连续马氏过程。由

$$T_tf(x)=E_xf(X_t)$$

我们得到，全体有界$\mathscr{B}(\hat{R}^d)$函数按一致模组成的Banach空间（记为$M(\hat{R}^d)$）上的有界线性算子族 T_t。由(M_3)可见 $T_{t+s}=T_tT_s$。我们称单参数半群T_t为X生成的半群。在$M(\hat{R}^d)$中定义线性算子（一般是无界的）$\mathfrak{A}$ 如下：其定义域$\mathscr{D}(\mathfrak{A})$规定为

$$\mathscr{D}(\mathfrak{A})=\left\{f:\ \exists g,\ \text{使}\left\|\frac{T_tf-f}{t}-g\right\|_{M(\hat{R}^d)}\to 0(t\to 0)\right\},$$

对于 $f\in\mathscr{D}(\mathfrak{A})$，定义

$$\mathfrak{A}f=g.$$

这样的线性算子 $\mathfrak{A}$ 称为半群$\{T_t\}$的生成元。类似地可定义另一个线性算子$\tilde{\mathfrak{A}}$：令

$$\mathscr{D}(\tilde{\mathfrak{A}})=\left\{f:\ \exists\tilde{g},\ \text{使对}\forall x,\frac{T_tf(x)-f(x)}{t}\xrightarrow[t\to 0]{\text{有界收敛}}\tilde{g}(x)\right\},$$

对 $f\in\mathscr{D}(\tilde{\mathfrak{A}})$定义

$$\tilde{\mathfrak{A}}f=\tilde{g}.$$

这个算子$\tilde{\mathfrak{A}}$称为半群$\{T_t\}$的弱生成元。

给定 R^d 上具有连续系数 $a(x)=(a^{ij}(x)),c(x)$及局部有界可测系数 $b(x)=(b^i(x))$的二阶微分算符

$$Af=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}+c(x)f \quad (c(x)\leqslant 0).$$

定义4.8 $(W^d,\mathscr{B}(W^d))$上强马氏族$\{P_x: x\in\hat{R}^d\}$称为(Krylov 意义下的)A扩散族，如果对于任意$f\in C_0^\infty(R^d)$恒有

$$E_x f(w_t)-f(x)=\int_0^t E_x Af(w_s)\mathrm{d}s, \tag{4.36}$$

或者写成等价的形式

$$T_t f(x)-f(x)=\int_0^t T_s(Af)(x)\mathrm{d}s. \tag{4.37}$$

连续强马氏过程$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t^X),P_x,X,\zeta)$称为$A$扩散，如果$\{P_xX^{-1}\}$是$(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$上的$A$扩散族。这时我们也简称$X$为$A$扩散。

一般$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$的过程$X$称为具有初分布$PX_0^{-1}$的$A$扩散，如果$PX^{-1}$与$\int P_x(PX_0^{-1})(\mathrm{d}x)$同分布，其中$\{P_x: x\in\hat{R}^d\}$是$(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$上某个$A$扩散族。

定义4.8说明了：如果$b(x)$连续，$\{P_x: x\in\hat{R}^d\}$是A扩散族，那么由(4.37)利用有界收敛性就能得到$C_0^\infty\subset\mathscr{D}(\widetilde{\mathfrak{A}})$，而且对$f\in C_0^\infty$有$\widetilde{\mathfrak{A}}f=Af$。也就是说：$\widetilde{\mathfrak{A}}$是$A$限制在$C_0^\infty$后的扩张：

$$A|_{C_0^\infty}\subset\widetilde{\mathfrak{A}}.$$

注 半群$\{T_t\}$称为强 Feller 半群，如果对于任意$f\in M(\hat{R}^d)$，恒有$T_tf\in C(\hat{R}^d)$。当$b(x)$仅为可测时，如果半群为强 Feller的，那么我们显然仍有

$$A|_{C_0^\infty}\subset\widetilde{\mathfrak{A}}.$$

当$a(x)\geqslant CI$且鞅问题$\mathfrak{M}(a,b)$适定时，用较长的篇幅可以证明对应的A扩散X的半群必是强 Feller 的(参见：[SV])。

命题4.4 强马氏过程$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t^X),P_x,X,\zeta)$是$A$扩散，当且仅当对于任意$f\in C_0^\infty$及$x\in R^d$

$$M_t^{(f)}=f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t Af(X_s)\mathrm{d}s$$

对于P_x是$(\mathscr{F}_t^X)$鞅(这里“$\forall f\in C_0^\infty$”也可改为“$\forall f\in C_K^2$”)。

证明 充分性直接由A扩散的定义得到。

必要性。由马氏性及A扩散的定义，我们有

$$E_x\left[(f(X_{t+s})-f(X_s)-\int_s^{t+s}Af(X_u)\mathrm{d}u)\mid\mathscr{F}_s^X\right]$$

$$=E_x\left[\theta_s\left(f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t Af(X_u)\mathrm{d}u\right)\mid\mathscr{F}_s^X\right]$$

$$=E_{X_s}\left[f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t Af(X_u)\mathrm{d}u\right]\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P_x)$$

$$=T_tf(X_s)-f(X_s)-\int_0^t T_uAf(X_u)\mathrm{d}u=0.$$

因此命题得证。

命题4.5 如果$a(x),b(x),c(x)$连续，则强马氏过程$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t^X),P_x,X,\zeta)$为$A$扩散，当且仅当

$$A|_{C_0^\infty}\subset\widetilde{\mathfrak{A}}. \tag{4.38}$$

(如果X的半群$\{T_t\}$是强 Feller 的，那么$b(x)$只需是局部有界的$\mathscr{B}(R^d)$函数，充要条件仍然成立。)

证明 只须证明充分性。由T_t的定义，如果$f_n(x)$有界收敛到$f(x)$，就必有$T_tf_n(x)$有界收敛到$T_tf(x)$。于是对$f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathfrak{A}})$

$$\frac{\mathrm{d}T_tf}{\mathrm{d}t}=\lim_{h\to0}\frac{T_hT_tf(x)-T_tf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}T_t\frac{T_hf(x)-f(x)}{h}=T_t\widetilde{\mathfrak{A}}f(x),$$

而且收敛是有界的。这说明 $T_t f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathfrak{A}})$，同时

$$\widetilde{\mathfrak{A}}T_t f=T_t\widetilde{\mathfrak{A}}f.$$

再对 t 积分，我们得到

$$T_t f(x)-f(x)=\int_0^t T_s\widetilde{\mathfrak{A}}f(x)\mathrm{d}s. \qquad (4.39)$$

但是按命题假定对于 $f\in C_0^\infty$ 有 $Af=\widetilde{\mathfrak{A}}f$，因此

$$T_t f(x)-f(x)=\int_0^t T_s Af(x)\mathrm{d}s,$$

即 X 是 A 扩散。命题证毕。

推论 对马氏过程 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t^X),P_x,X,\zeta)$ 及任意 $f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathfrak{A}})$，

$$\widetilde{M}_t^{(f)}=f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t\widetilde{\mathfrak{A}}f(X_s)\mathrm{d}s \qquad (4.40)$$

对于 P_x 是 $(\mathscr{F}_t^X)$ 鞅。

证明 由(4.39)立得。

注 A 扩散的定义可以推广到一般的算子 A，并不一定要是微分算子。

命题4.6 对于任意 $x\in R^d$ 及任意 $P_x,P'_x\in\mathscr{P}(x;a,b)$（此处的鞅问题可以了解成 $(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$ 上的），如果恒有

$$E_x f(w_t)=E'_x f(w_t) \qquad (\forall f\in C_0^\infty),$$

那么 $\{P_x:\ x\in R^d\}\cup\{P_\partial\}$ 是强马氏族，其中 P_∂ 满足

$$P_\partial(w_0=\partial)=1.$$

证明 由引理4.11推出条件(M₁)成立。又对于 $x\in R^d$，有限 $(\mathscr{B}_{t+}(\hat{W}^d))$ 停时 τ 及有界 $\mathscr{B}(\hat{W}^d)$ 函数 η，我们应用命题4.1得到（命题4.1对于 $(\hat{W}^d,\mathscr{B}(\hat{W}^d))$ 上的鞅问题的情况下仍成立）

$$E_x(\theta_\tau\eta\,|\,\mathscr{B}_{\tau+}(\hat{W}^d))=E_{w_\tau}\eta \qquad (\text{a.e.d}P_x).$$

如果 τ 为有限 $(\mathscr{F}_t(\hat{W}^d))$ 停时，那么存在有限 $(\mathscr{B}_{t+}(\hat{W}^d))$ 停时 τ'，使 $\tau'=\tau$ (a.e.dP_x)（τ' 一般地依赖 x，事实上 τ 可用

可数值($\mathscr{F}_t(\hat{W}^d)$)停时 τ_n 近似，在每个取定值的集合上移动一个零测集，就得到与它 a.e.dP_x 相等的可数值($\mathscr{B}_t(\hat{W}^d)$) 停时 τ_n'，其极限就可取为 τ')。τ'当然也是有限($\mathscr{F}_t(\hat{W}^d)$)停时。

首先我们有：对于任意固定的 $A\in\mathscr{F}_{\tau'+}(\hat{W}^d)$必定存在 $A'\in\mathscr{B}_{\tau'+}(\hat{W}^d)$使 $P_x(A\Delta A')=0$。事实上，对于任意有理数 r_k，必有 $B_k\in\mathscr{B}_{r_k}(\hat{W}^d)$，使 $P_x((A\cap\{\tau'<r_k\})\Delta B_k)=0$。于是 A' 可取成 $\bigcup_k B_k$。因此我们有

$$\mathscr{F}_{\tau'+}(\hat{W}^d)\subset\overline{\mathscr{B}_{\tau'+}(\hat{W}^d)}^{P_x}\qquad(P_x\text{完备化})。$$

由命题 4.1 我们推出

$$\begin{aligned}E_x(\theta_{\tau'}\eta|\mathscr{F}_{\tau'+}(\hat{W}^d))&=E_x(\theta_{\tau'}\eta|\mathscr{B}_{\tau'+}(\hat{W}^d))\\&=E_{w_{\tau'}}\eta\quad(\text{a.e.d}P_x)。\end{aligned}$$

再则，对任意一个($\mathscr{G}_{t+}$)有限停时 σ 及概率测度 P，我们恒有

$$(\overline{\mathscr{G}_{\sigma+}})=(\overline{\mathscr{G}})_{\sigma+}\qquad(P\text{完备化})。$$

事实上，因为 $(\overline{\mathscr{G}})_{\sigma+}$是 P 完备的，所以$(\overline{\mathscr{G}_{\sigma+}})\subset(\overline{\mathscr{G}})_{\sigma+}$；另一方面，如果 $A\in(\overline{\mathscr{G}})_{\sigma+}$，那么对于任意有理数 r_k有 $A\cap\{\sigma<r_k\}=B_{r_k}\cup N_{r_k}$，其中 $B_{r_k}\in\mathscr{G}_{r_k}$，$P(N_{r_k})=0$。于是

$$A=\left(\bigcup_k B_{r_k}\cap\{\sigma<r_k\}\right)\cup\left(\bigcup_k N_k\cap\{\sigma<r_k\}\right)\in(\overline{\mathscr{G}_{\sigma+}})。$$

因此

$$(\overline{\mathscr{G}_{\sigma+}})=(\overline{\mathscr{G}})_{\sigma+}。$$

现在我们回来看 τ 及 τ'就有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\tau+}(\hat{W}^d)&\subset(\overline{\mathscr{F}_{\tau+}(\hat{W}^d)})^{P_x}=(\overline{\mathscr{F}}^{P_x})_{\tau+}\\&=(\overline{\mathscr{F}}^{P_x})_{\tau'+}=(\mathscr{F}_{\tau'+}(\hat{W}^d))^{P_x}。\end{aligned}$$

又因为 $E_{w_{\tau'}}\eta = E_{w_\tau}\eta$ (a.e.dP_x),所以 $E_{w_{\tau'}}\eta \in (\overline{\mathscr{F}_{\tau+}(\hat{W}^d)})^{P_x}$。

于是

$$E_x(\theta_\tau \eta \mid \mathscr{F}_{\tau+}(\hat{W}^d)) = E_x(\theta_{\tau'} \eta \mid \mathscr{F}_{\tau'+}(\hat{W}^d))$$
$$= E_{w_{\tau'}}\eta = E_{w_\tau}\eta \quad (\text{a.e.}dP_x).$$

这样我们就得到了：对于有限$(\mathscr{F}_t(\hat{W}^d))$停时 τ 及 $x \in R^d$，强马氏性质仍成立。所以对于有限停时(4.34)成立。

对于一般 $(\mathscr{F}_t(\hat{W}^d))$停时 $\sigma, x \in R^d$，$f \in C_b(\hat{R}^d)$且 $f(\partial) = 0$，我们取 $\sigma_n = \sigma \wedge n$。于是

$$E_x(f(w_{t+\sigma_n})I_{\sigma \leqslant n}) = E_x[(E_{w_{\sigma_n}}f(w_t))I_{\sigma \leqslant n}]$$
$$= E_x[(E_{w_\sigma}f(w_t))I_{\sigma \leqslant n}].$$

令 $n \to \infty$，便得

$$E_x f(w_{t+\sigma}) = E_x[(E_{w_\sigma}f(w_t))I_{\sigma < \infty}] = E_x E_{w_\sigma} f(w_t).$$

最后，令 $g(y) = E_y f(w_t)$，那么 $g(\partial) = 0$。于是

$$E_\partial E_{w_\sigma} f(w_t) = E_\partial g(w_\sigma) = 0 = E_\partial f(w_{t+\sigma}).$$

这就证明了(M_3'')，因而等价地有(M_3')。综上所证可知$\{P_x: x \in \hat{R}^d\}$是强马氏族。命题证毕。

定理4.5 设 (4.35)中的 $c(x) \equiv 0$。于是 A 扩散族的存在唯一性蕴含鞅问题 $\mathfrak{M}(a,b)$的适定性；如果还知道了 $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$，那么后者还等价于：对任意初值 x 的 SDE$(\sigma(\cdot), b(\cdot))$ 存在分布唯一的解。

在条件成立时的扩散族即为

$$\{P_x: P_x \in \mathscr{P}(x; a, b), x \in R^d\} \cup \{P_\partial\}$$
$$= \{PX^{(x)-1}; x \in R^d\} \cup \{P_\partial\},$$

其中 $X^{(x)}$是某个概率空间上初值为 x 的SDE$(\sigma(\cdot), b(\cdot))$的解。

证明 由命题4.4，命题4.6 以及引理4.2 的推论立刻可推得本定理。

推论 下列条件之一均为 $c(x)\equiv 0$ 的 A 扩散族存在唯一的充分条件：

(A_1) $a(x)$连续，局部一致正定二次增长，$b(x)$ 可测且线性增长；

(A_2) $a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T$，$\sigma(x),b(x)\in \mathrm{Lip}^{loc}$($a(x)$一般可以退化)。当 $\sigma(x)$与 $b(x)$ 线性增长时，A扩散族是保守的，即有：$\forall x, P_x(\zeta=\infty)=1$。

从上面的充分条件，我们可看到对于 $a(x)$来说，选取一个满足(A_2)的 $\sigma(x)$是很重要的。

命题4.7 (Freidlin) R^d上 $r\times r$ 非负定矩阵 $a(x)$有

1° 若 $a(x)\in C_b^2(R^d)$，则存在 $\sigma(x)\in \mathrm{Lip}$，使 $a=\sigma\sigma^T$；

2° 若 $a(x)\in C^2(R^d)$，则存在 $\sigma(x)\in \mathrm{Lip}^{loc}$，使 $a=\sigma\sigma^T$。

证明 首先我们注意正定矩阵H的平方根

$$H^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(I-\frac{H}{\lambda_2}\right)^n$$

是H的解析函数，其中a_n是$(1-x)^{\frac{1}{2}}$在 $x=0$处的 Taylor 系数，λ_2满足 $H\leqslant\lambda_2 I$。

事实上，$\exists\lambda_1$，使$0<\lambda_1 I<H\leqslant\lambda_2 I$。于是$H=\lambda_2\left(I-\left(I-\frac{H}{\lambda_2}\right)\right)$。而且

$$\begin{aligned}\left\|I-\frac{H}{\lambda_2}\right\|&\equiv\sup_{\substack{x^Tx=1\\x\in R^d}}x^T\left(I-\frac{H}{\lambda_2}\right)x\\&=\sup_{x^Tx=1}\left(1-\frac{1}{\lambda_2}x^THx\right)\leqslant 1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}<1.\end{aligned}$$

因此$I-\dfrac{H}{\lambda_2}$的谱点均在$|x|\leqslant 1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$内，从而都在$(1-x)^{\frac{1}{2}}=\sum\limits_0^\infty a_nx^n$展开式的收敛区$|x|<1$内。于是

$$H^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda_2}\left(I - \left(I - \frac{H}{\lambda_2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\lambda_2}\sum_0^{\infty} a_n \left(I - \frac{H}{\lambda_2}\right)^n.$$

现在我们对 $d=1$ 且 $a(x) \in C_b^2(R^1)$ 证明命题。任意取定 x_0，选取正交阵 $O = (\theta_1, \cdots, \theta_r)$，使

$$a(x_0) = O^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_r \end{pmatrix} O.$$

令
$$H(x)(=(h_{ij}(x))) = Oa(x)O^T + \varepsilon I;$$

$$f(x) = \lambda^T H(x) \lambda; \quad L(x)(=(l_{ij}(x))) = H(x)^{\frac{1}{2}}.$$

于是 $H(x) \in C_b^2(R_1)$，因此 $L(x) = H(x)^{\frac{1}{2}} \in C_b^2(R^1)$（注意 $H(x)$，$L(x)$ 依赖 ε，但是为了记号方便，我们暂且略写成 ε）。

设 $|a''_{ij}(x)| \leqslant K$。于是我们有：$\exists\, \theta \in (0,1)$ 使

$$f''(x) = \lambda^T O a''(x) O^T \lambda \leqslant K|\lambda|^2;$$

$$0 \leqslant f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$$

$$\leqslant f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}K|\lambda|^2 h^2.$$

这是 h 的一个非负多项式，因此它的判别式非正，即

$$f'(x)^2 \leqslant 2K|\lambda|^2 f(x).$$

分别选取 $\lambda = e_i$ 和 $e_i + e_j$（e_i 为列向量，除第 i 个分量为 1 外其余都取0），我们相应地得到

$$h'^2_{ii} \leqslant 2Kh_{ii};$$

$$(h'_{ii} + 2h'_{ij} + h'_{jj})^2 \leqslant 8K(h_{ii} + 2h_{ij} + h_{jj})$$

$$\leqslant 8K(\sqrt{h_{ii}} + \sqrt{h_{jj}})^2 \qquad (i \neq j).$$

因此

$$|h'_{ii}|\leqslant\sqrt{2K}(\sqrt{h_{ii}}+\sqrt{h_{jj}});$$

$$|h'_{ij}|\leqslant\frac{1}{2}[\sqrt{8K}(\sqrt{h_{ii}}+\sqrt{h_{jj}})+|h'_{ii}|+|h'_{jj}|]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{8K}+2\sqrt{2K})(\sqrt{h_{ii}}+\sqrt{h_{jj}})\quad(i\neq j).$$

这说明存在一个不依赖 ε 及 x_0的常数 C，使

$$|h'_{ij}|\leqslant C(\sqrt{h_{ii}}+\sqrt{h_{jj}})\quad(\text{一切 }i,j\leqslant r).$$

另一方面由 $H=LL^T$，我们有

$$h'_{ij}(x_0)=\sum_k(l'_{ik}(x_0)l_{jk}(x_0)+l_{ik}(x_0)l'_{jk}(x_0)).$$

又因为

$$H(x_0)=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_r\end{pmatrix}+\varepsilon I,$$

所以 $L(x_0)$也是对角形矩阵，即 $l_{ik}(x_0)=0(i\neq k)$。此外，由于 $L(x)$对称，所以 $L'(x_0)$也对称，于是

$$h'_{ij}(x_0)=l'_{ij}(x_0)(l_{ii}(x_0)+l_{jj}(x_0))$$

$$=l'_{ij}(x_0)(\sqrt{h_{ii}(x_0)}+\sqrt{h_{jj}(x_0)}).$$

因此我们得到

$$|l'_{ij}(x_0)|\leqslant C.$$

记

$$\sigma_\varepsilon(x)(=(\sigma^\varepsilon_{ij}(x)))=(a(x)+\varepsilon I)^{\frac{1}{2}}=O^TL(x)O.$$

我们有

$$\sigma^{(\varepsilon)'}_{ij}(x_0)=\theta^T_iL'(x_0)\theta_j.$$

由 Schwarz 不等式及 θ_i与 θ_j的正交性得到

$$|\sigma^{(\varepsilon)'}_{ij}(x_0)|\leqslant\sqrt{\theta^T_i\theta_i}\cdot\sqrt{\theta^T_jL^T(x_0)L'(x_0)\theta_j}$$

$$=\sqrt{\operatorname{tr}L'(x_0)\theta_j\theta^T_jL'(x_0)}$$

$$= \sqrt{\operatorname{tr} L'(x_0) L'(x_0)} \leqslant rC \quad (与\ \varepsilon, x_0 无关).$$

现在我们可以让x_0变动，从而推出

$$|\sigma_{ij}^{(\varepsilon)}(x) - \sigma_{ij}^{(\varepsilon)}(y)| \leqslant rC|x-y|.$$

但是当$\varepsilon \downarrow 0$时，$a+\varepsilon I$ 的特征值趋于a 的特征值，所以 $(a+\varepsilon I)^{\frac{1}{2}}$ 对ε 连续，即$\sigma_\varepsilon(x)$对ε 连续。令$\varepsilon \downarrow 0$便得

$$|\sigma_{ij}(x) - \sigma_{ij}(y)| \leqslant rC|x-y|.$$

当$d>1$但是$a(x) \in C_b^2(R^d)$时，我们因此有

$$\begin{aligned}&|\sigma_{ij}(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_d) \\ &\qquad - \sigma_{ij}(x_1, \cdots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \cdots, x_d)| \\ &\leqslant rC|x_k - y_k|,\end{aligned}$$

由此可得$\sigma \in \mathrm{Lip}$。

一般地，若$a(x) \in C^2(R^d)$，我们取

$$a_n(x) = a(x)\int I_{S_{n+1}}(y)\rho_n(x-y)\mathrm{d}y \in C_b^2(R^d),$$

其中S_n是R^d中半径为n 的开球，$\int \rho_n(x)\mathrm{d}x = 1$，且

$$\rho_n(x) = 常数\ I_{|x|<\frac{1}{n}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{|x|^2 - \frac{1}{n^2}}\right)$$

是"光滑核"。那么$a_n(x)$ 与$a(x)$ 在S_n内相同。于是$\sigma_n(x) = a_n(x)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{Lip}$，从而$\sigma(x) \in \mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$。命题得证。

由定理4.5及命题4.7我们得到

定理4.6 如果$a(x) \in C^2, b(x) \in C^1, c(x) \equiv 0$，那么$A$扩散族存在唯一。如果还有$a(x) \in C_b^2, b(x) \in C_b^1$，那么这个$A$扩散族是保守的。

应用(Poisson 方程解的概率表示) 设在R^d中有界开域G上给定有界连续函数矩阵$a(x)$及向量$b(x)$。又设∂G足够光滑以至$\sigma(x)(a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T)$，$b(x)$可以扩张为$C(R^d)$ 函数。如果定理4.5推论中的(A_1)满足或(A_2)满足，且σ, b 满足线性增长条

件，于是存在一个不断的A扩散过程X。

设$f\in C_b(G)$，$g\in C(\partial G)$且 Poisson 方程

$$\begin{cases}Au=f,\\ u|_{\partial G}=g\end{cases}$$

存在$C^2(G)$解u。我们要把$u(x)$表示成X的泛函。

取一列紧集$K_n\uparrow G$，并使$K_n\subset K_{n+1}^0$。取$\varphi_n\in C_0^\infty(R^d)$使$\varphi_n|_{K_n}=1$，$\varphi_n|_{G^c}=0$（可以用"光滑核"作卷积算子来实现）。令

$$u_n=u\varphi_n,\quad f_n=Au_n.$$

利用 Ito 公式，我们得到$u_n(X_t)-\int_0^t f_n(X_s)\mathrm{d}s$是鞅。记

$$\tau_n=\inf\{t:\ X_t\bar{\in}K_n\},\quad \tau=\inf\{t:\ X_t\bar{\in}G\}.$$

于是$\tau_n\uparrow\tau$，而且

$$u(X_{t\wedge\tau_n})-\int_0^{t\wedge\tau_n}f(X_s)\mathrm{d}s$$

$$=u_n(X_{t\wedge\tau_n})-\int_0^{t\wedge\tau_n}f_n(X_s)\mathrm{d}s$$

是对n一致有界的鞅。所以其极限

$$u(X_{t\wedge\tau})-\int_0^{t\wedge\tau}f(X_s)\mathrm{d}s$$

也是鞅。于是

$$u(x)=E_xu(X_{t\wedge\tau})-E_x\int_0^{t\wedge\tau}f(X_s)\mathrm{d}s.$$

定义$v(x)=C\exp(\lambda^\tau x)$，其中$C,\lambda$的分量都充分大，使

$$Av(x)|_{x\in G}\geqslant 1,\quad v(x)|_{x\in G}\leqslant K.$$

同样用 Ito 公式推出$v(X_{t\wedge\tau})-\int_0^{t\wedge\tau}Av(X_s)\mathrm{d}s$是鞅。所以

$$v(x)=E_xv(X_{t\wedge\tau})-E_x\int_0^{t\wedge\tau}Av(X_s)\mathrm{d}s.$$

于是

$$E_x\int_0^{t\wedge\tau}ds\leqslant E_x\int_0^{t\wedge\tau}Av(X_s)ds$$

$$=E_xv(X_{t\wedge\tau})-v(x)\leqslant 2K.$$

令 $t\uparrow\infty$，我们得到 $E\tau\leqslant 2K<\infty$。

因此，利用控制收敛定理，并让 $t\uparrow\infty$，我们便得到

$$u(x)=E_xg(X_\tau)-E_x\int_0^\tau f(X_s)ds.$$

这就是 Poisson 方程解的概率表示公式。

当 $b(x)$ 仅为局部有界且可测时，只要 Poisson 方程的解 u 存在，则上面的表示公式仍正确。关于解 u 的存在性，当然可以用偏微分方程的结论。Dynkin，Stroock 等定义了一种"概率意义下"的解，并证明了它与 Sobolev 的弱解是一致的，这样也就对 Poisson 方程解的存在性给出了纯粹概率的方法。这不仅在理论上有意义，而且也提供了解的 Monte Carlo 计算方法。

此外，还可以把 A "局部地"扩张为 $\mathscr{B}_b(\bar{G})$（有界 $\mathscr{B}(\bar{G})$ 类）上的"算符" $\bar{A}_G$，其定义如下：

$$\mathscr{D}(\bar{A}_G)=\{u\in\mathscr{B}_b(\bar{G}):\ \exists v(x)\in\mathscr{B}_b(\bar{G}),\ 对\ \forall x\in\bar{G},$$

$$u(X_{t\wedge\tau})-\int_0^{t\wedge\tau}v(X_s)ds\ 对于\ P_x 是(\mathscr{F}_t^X)鞅\};$$

$$\bar{A}_Gu(x)\equiv v(x)\quad(x\in\bar{G}).$$

并且规定：如果 $\int_0^{t\wedge\tau}(v_1(X_s)-v_2(X_s))ds$ 对 $\forall x\in\bar{G}$ 是 P_x 鞅，那么应认为 v_1 与 v_2 等价。于是 $\bar{A}_Gu=v$ 应理解为 v 所在的等价类。这是 Stroock 用鞅方法讨论椭圆型方程的弱解的一个基本概念。

§4.4 扩散族的弱收敛

定理4.7 设 $a_n(x)$ 有一致上界，并在任意 $|x|\leqslant N$ 上有一致正下界，$b_n(x)$ 一致有界，$a_n(x)$ 连续，$b_n(x)\in\mathscr{B}(R^d)$，而且在

R^d 的任意紧子集上分别一致收敛到 $a(x), b(x)$。又 $x_n \to x$，那么 $P_{x_n}^{(n)}$ 弱敛到 P_x，其中 $P_{x_n}^{(n)}, P_x$ 分别是 $\mathrm{SDE}_{x_n}(\sigma(\cdot), b_n(\cdot))$，$\mathrm{SDE}_x(\sigma(\cdot), b(\cdot))$ 的解 $X^{(n)}, X$ 的分布，$a_n = \sigma_n \sigma_n^T$，$a = \sigma\sigma^T$，其中 N 是任意正整数。

证明 由定理 4.1 可知 $X^{(n)}, X$ 都有分布唯一性。我们不妨设概率空间为 Wiener 空间，$X^{(n)}, X$ 均为坐标过程。为了证明定理，我们只要证明 $\{P_{x_n}^{(n)}\}$ 弱紧，而且它的任意一个弱敛子列均有弱极限 P_x。

先证 $\{P_{x_n}^{(n)}\}$ 的弱紧性。为此只需验证命题 3.2 中条件 (C_1')，(C_2') 满足。显然

$$E_{x_n}^{(n)}|w_0| = |x_n| \to |x|,$$

所以 $E_{x_n}^{(n)}|w_0|$ 一致有界，即(C_1') 满足。其次，对于 $t \leqslant T$ 应用矩不等式我们有

$$\begin{aligned}
E_{x_n}^{(n)}|w_t - w_s|^4 &= E_{x_n}^{(n)}\left|\int_s^t b_n(w_u)\mathrm{d}u + \int_s^t \sigma_n(w_u)\mathrm{d}w_u\right|^4 \\
&\leqslant 8\left[E_{x_n}^{(n)}\left(\int_s^t b_n(w_u)\mathrm{d}u\right)^4\right. \\
&\quad \left. + C_T E_{x_n}^{(n)}\left(\int_s^t \mathrm{tr}(\sigma_n \sigma_n^T)(w_u)\mathrm{d}u\right)^2\right] \\
&\leqslant \text{常数}\,|t-s|^2 \quad (\text{当}\ |t-s|<1\ \text{时})。
\end{aligned}$$

于是命题 3.2 的推论的条件满足，从而(C_2')满足。由命题 3.2 我们就得到 $\{P_{x_n}^{(n)}\}$ 的弱紧性。

现在我们证明 $P_{x_n}^{(n)}$ 的任意弱收敛子列必弱敛到 P_x。不妨设弱敛子列就是 $P_{x_n}^{(n)}$。设 $P_{x_n}^{(n)}$ 弱敛到 Q，我们证明 $Q \in \mathscr{P}(x; a, b)$。

由于 Q 是有限测度，所以存在 $\varepsilon_k \downarrow 0$，使 $Q(\{w_0 = x \pm \varepsilon_k\}) = 0$。即 $\{|w_0 - x| < \varepsilon_k\}$ 是 Q 连续集。因此

$$P_{x_n}^{(n)}(|w_0 - x| < \varepsilon_k) \to Q(|w_0 - x| < \varepsilon_k) \quad (n \to \infty)。$$

但是当 k 固定时，只要 n 充分大就有 $|x_n - x| < \varepsilon_k$。于是

$$P_{x_n}^{(n)}(|w_0-x|<\varepsilon_k)\geqslant P_{x_n}^{(n)}(w_0=x_n)=1.$$

因此
$$Q(|w_0-x|<\varepsilon_k)=1.$$

从而
$$Q(\{w_0=x\})=1.$$

再则，对于 $\Lambda\in\mathscr{F}_s$ 且 $Q(\partial\Lambda)=0$，$s<t$ 及 $f\in C_0^\infty$，我们有

$$E_{x_n}^{(n)}\left(\left[f(w_t)-f(w_s)-\int_s^t A_nf(w_u)\mathrm{d}u\right]I_\Lambda\right)$$

$$-\ E^Q\left(\left[f(w_t)-f(w_s)-\int_s^t Af(w_u)\mathrm{d}u\right]I_\Lambda\right)$$

$$=E_{x_n}^{(n)}\left(\left[f(w_t)-f(w_s)-\int_s^t A_nf(w_u)\mathrm{d}u\right]I_\Lambda\right.$$

$$\left.-\left[f(w_t)-f(w_s)-\int_s^t Af(w_u)\mathrm{d}u\right]I_\Lambda\right)$$

$$+\left[E_{x_n}^{(n)}\left(\left[f(w_t)-f(w_s)-\int_s^t Af(w_u)\mathrm{d}u\right]I_\Lambda\right)\right.$$

$$\left.-E^Q\left(\left[f(w_t)-f(w_s)-\int_s^t Af(w_u)\mathrm{d}u\right]I_\Lambda\right)\right]$$

$$\overset{记}{=}\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

由于在f的支集上$\sum_{i,j}a_{ij}^{(n)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$，$b_n^T\nabla f$ 一致收敛到$\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$，$b^T\nabla f$，我们有当 $n\to\infty$时，

$$|I|=E_{x_n}^{(n)}\left|I_\Lambda\left[\int_s^t\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}^{(n)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)(w_u)\mathrm{d}u\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_s^t(b_n^T\nabla f-b^T\nabla f)(w_u)\mathrm{d}u\right]\right|\to 0.$$

又因为 Λ 是Q连续集，$P_{x_n}^{(n)}$弱敛到Q，仿引理4.2的证明便得 $\mathrm{II}\to 0\ (n\to\infty)$。因此

$$E^Q\left(I_A\left[f(w_t)-f(w_s)-\int_s^t Af(w_u)\mathrm{d}u\right]\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty} E_{x_n}^{(n)}\left(I_A\left[f(w_t)-f(w_s)-\int_s^t A_n f(w_u)\mathrm{d}u\right]\right)$$
$$=0.$$

但是$\mathscr{F}_s$可由$\mathscr{F}_s$中的全体连续集生成，用典型方法及有界收敛定理推出上式对一切$A\in\mathscr{F}_s$仍成立。于是$Q\in\mathscr{P}(x;a,b)$。由唯一性推出$Q=P_x$。因此$P_{x_n}^{(n)}\xrightarrow{w}P_x$。定理证毕。

习　题

1．设由 Laplace 算子Δ确定的算子A为：

$$A=\frac{1}{2}\left(\Delta-\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

试证：如果初值x取在单位球上，那么A确定了一个在单位球上的扩散。

2．如果$F\in C^2$，而且其梯度满足

$$(a_{ij}(x))\cdot\nabla F(x)=0\qquad (a_{ij}(x))\ 一致正定,$$

那么由如下算子

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

确定的扩散X概率为 1 地在曲面“$F(X_t)=$常数”上。

3．证明 Brown 运动不存在有限不变测度。

4．证明 Brown 运动B的正部B^+不是马氏过程。

5．设$a(x),b(x)$可测并局部有界，$\mathfrak{M}(a,b)$适定。求证对于任意x及$A\in\mathscr{B}_{0-}$，恒有$P_x(A)=0$或 1。

6．设X是一维常返的连续强马氏过程，$\tau_x=\inf\{t;\ X_t=x\}$，$\sigma=\tau_a+\vartheta_{\tau_a}\tau_b$，即$X$从$a$出发经$b$又回到$a$所需的时间。又设

$\{P_x\}$是使X成为强马氏过程的测度族。求证在测度P_a之下，$\theta_\sigma^{n-1}\sigma$是独立同分布序列。

7. 设X是d维常返的连续强马氏过程，对应的测度族为$\{P_x\}$，$\tau_y=\inf\{t:\ |X_t|\geqslant y\}$，$\mathscr{F}_t=\sigma(X_s:\ s\leqslant t)$，$\sigma$定义如第6题，求证：$(\theta_\sigma^{n-1}X_\sigma, \mathscr{F}_{\theta_\sigma^{n-1}\sigma}, P_x)$是齐次马氏链，其中$|x|=a$。

8. 如果$a(x),b(x)$可测且局部有界，$\mathfrak{M}(a,b)$适定，则求证转移半群T_t是Feller半群，即P_x关于$x(\in R^d)$连续，其中$P_x\in\mathscr{P}(x;a,b)$。

第五章　一维随机微分方程与一维扩散

本章中假定$d=1$。我们首先给出弱解存在及唯一的条件，然后指出轨道唯一解及分布唯一解的存在条件可以减弱，再证明解的比较定理。最后讨论解的性质，如常返性、保守性以及在边界附近的性态。

需要注意的是，在一维情形∂可以分裂成两个点：$-\infty$及$+\infty$，即应该用两点紧化代替一点紧化更为自然。这时$\hat{W}^d$应该略作修改，定义

$$\hat{W}=\{w_t:\ w_t\text{是在}[0,\infty)\text{上连续的取值于}[-\infty,\infty]\text{的函数，}$$
$$\text{满足}\ w_t=w_{t\wedge\zeta}，\text{其中}\ \zeta\ \text{为}\ w_t\ \text{首达}\{-\infty,\infty\}\text{的时刻}\}.$$

只要略作一些相应的修改，我们可以与定理3.1及定理4.4类似地证明分别在这两个定理的假定条件下，对任何初值，随机微分方程取值于$\hat{W}$的轨道唯一解与分布唯一解的存在性以及它们之间关系的定理3.3。

§5.1　可测系数情形的弱解与分布唯一性·强解

对于Borel可测函数$\sigma(x)$的一维SDE$(\sigma,0)$，Engelbert-Schmidt在1984年给出了完整的结论。

首先我们指出，一维SDE$(\sigma,0)$的弱解X一定不会在有限时刻爆炸，即爆炸时间$\zeta=+\infty$，a.e.dP。事实上，在$\zeta<+\infty$上有$X_{\zeta_n}\to X_\zeta$，其中$\zeta_n=\inf\{t:\ |X_t|\geqslant n\}$，而且$X_\zeta$只能取$+\infty$或$-\infty$，也就是说$\int_0^{\zeta_n}\sigma(X_s)dB_s$在$n\to\infty$时符号是尾定的(当然依

轨道 ω 而不同)。另一方面,由于 $\int_0^{\zeta}\sigma(X_s)\mathrm{d}B_s$ 不是有限的,因此

$$t^*(\zeta_n)\doteq\int_0^{\zeta_n}\sigma^2(X_s)\mathrm{d}s\to\infty.$$

由定理1.6应该有某个 Brown 运动 $\tilde{B}$,使

$$\int_0^{\zeta_n}\sigma(X_s)\mathrm{d}B_s=\tilde{B}_{t^*(\zeta_n)}.$$

当 $\zeta_n\to\zeta$ 时,$t^*(\zeta_n)\to\infty$,$\tilde{B}_{t^*(\zeta_n)}$ 应始终在正负值之间振荡,即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{B}_{t^*(\zeta_n)}=-\infty,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{B}_{t^*(\zeta_n)}=+\infty.$$

这就导致了矛盾。因此只可能有

$$P(\zeta<+\infty)=0.$$

引理5.1 令

$$\sigma_t=\int_0^{t+}\frac{\mathrm{d}s}{\sigma^2(B_s)}\tag{5.1}$$

(注意被积函数可在某些 s 上不可积,所以 σ_t 的值可取 $+\infty$,这样这个积分就未必是 t 的连续函数,而只能保证对 t 为右连续)。记它的右连续逆为 A_t,那么

(1) σ_t 在 $[0,A_\infty)$ 严格递增,其中 $A_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}A_t$;

(2) A_t 连续,而且在 $[0,\sigma_{A_\infty-})$ 上严格递增;

(3) $\sigma_{A_t}=t\ (t<\sigma_{A_\infty-})$; $A_{\sigma_s}=s\ (s<A_\infty)$。

这个引理的证明是显见的。

引理5.2 记

$$\mathscr{I}(\sigma)=\left\{\frac{1}{\sigma^2}\text{的不可积点全体}\right\},$$

即

$$\left\{x:\ \frac{1}{\sigma^2}\overline{\in}L(x-\varepsilon,x+\varepsilon),\ \ \forall\varepsilon>0\right\},$$

则 Brown 运动 B 击中 $\mathscr{I}(\sigma)$ 的时刻(记为 τ_∞ a.e.dP 地)为 A_∞,因此 $\int_0^{\tau_\infty+}\frac{\mathrm{d}u}{\sigma^2(B_u)}=\infty$。

证明 由定义$\mathscr{I}(\sigma)$是闭集，记

$$\tau_n = B\text{击中}(\mathscr{I}(\sigma))^{\frac{1}{n}}\text{的时刻}, \quad \tau_\infty = \lim_n \tau_n, \tag{5.2}$$

其中$(\mathscr{I}(\sigma))^{\frac{1}{n}}$记$\mathscr{I}(\sigma)$的$\frac{1}{n}$邻域。往证$\tau_\infty = A_\infty$, a.e.d$P$。

令

$$\sigma_n(x) = \sigma(x) I_{((\mathscr{I}(\sigma))^{\frac{1}{n}})^c}(x) + I_{(\mathscr{I}(\sigma))^{\frac{1}{n}}}(x).$$

显见$\sigma_n \in L^{loc}$。由Engelbert-Schmidt零一律可知

$$\int_0^t \frac{ds}{\sigma_n^2(B_s)} < \infty \quad (\text{a.e.d}P).$$

于是

$$\int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{ds}{\sigma^2(B_s)} < \int_0^t \frac{ds}{\sigma_n^2(B_s)} < \infty \quad (\text{a.e.d}P).$$

当$t<\tau_\infty$时，让$n\to\infty$得到$\sigma_t<\infty$。由此推出$\tau_\infty \leqslant A_\infty$。a.e.d$P$。另一方面，如果$\mathscr{I}(\sigma)=\varnothing$，则显然$\tau_\infty=\infty$；如果$\mathscr{I}(\sigma)\neq\varnothing$，那么$\tau_\infty<\infty$。a.e.d$P$。由$B$的强马氏性，$\tilde{B}_t \equiv B_{\tau_\infty+t} - B_{\tau_\infty}$仍是一个Brown运动。由于$B_{\tau_\infty}\in\mathscr{I}(\sigma)$，我们有

$$\int_0^{\tau_\infty+t} \frac{ds}{\sigma^2(B_s)} \geqslant \int_0^t \frac{ds}{\sigma^2(B_{\tau_\infty} + \tilde{B}_t)} = \infty \quad (\forall t).$$

令$t\to 0$得$\int_0^{\tau_\infty} \frac{ds}{\sigma^2(B_s)} = \infty$，即$A_\infty \leqslant \tau_\infty$。从而$\tau_\infty = A_\infty$。

定理5.1(Engelbert-Schmidt) 若σ Borel可测，则方程SDE$(\sigma,0)$

$$dX_t = \sigma(X_t)dBt$$

对于任意初分布有

(1) 存在不爆炸的弱解$\Longleftrightarrow\mathscr{I}(\sigma)$点都是$\sigma$的零点；

(2) 存在分布唯一的弱解$\Longleftrightarrow\mathscr{I}(\sigma)$恰是$\sigma$的零点集。

证明 令A_t,σ_t定义为引理5.1。记

$$\widetilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{A_t},\ M_t=B_{A_t}-B_0,$$

$$B_0=X_0,\ X_t=X_0+M_t, \tag{5.3}$$

其中 $X_0(\in\widetilde{\mathscr{F}}_t)$具有事先给定的初分布。

易见 $M\in\mathscr{M}_2^{c,loc}(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$，且$\langle M\rangle_t=A_t$。此外，当 $t<\sigma_{A_\infty^-}$时，

$$A_t=\int_0^{A_t}\sigma^2(B_s)\mathrm{d}\sigma_s=\int_0^t\sigma^2(X_s)\mathrm{d}s\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P)。\tag{5.4}$$

先证(1)中的充分性。为此我们指出在所假定的条件下，(5.4)对一切 t 成立。只须看 $\sigma_{A_\infty^-}<\infty$ 情形。由连续性立知(5.4)对 $t=\sigma_{A_\infty^-}$ 也成立。而当 $t>\sigma_{A_\infty^-}$ 时，易见 $A_t=A_\infty=\tau_\infty$（τ_∞ 为(5.2)定义）a.e.$\mathrm{d}P$。

在 $\tau_\infty=\infty$上，$A_\infty=\infty$，a.e.$\mathrm{d}P$，于是 $\sigma_{A_\infty^-}=\infty$，a.e.$\mathrm{d}P$，故这时候(5.4)恒成立。

在 $\tau_\infty<\infty$上，当 $t>\sigma_{A_\infty^-}$ 时有$X_t=B_{A_t}=B_{\tau_\infty}\in\mathscr{F}(\sigma)$。由(1)的假定知 X_t 是 σ 的零点，因此这时候(5.4)仍然成立。

现在，我们利用引理 3.8 的表示，由(5.4)可得存在Brown运动 $\bar{B}$，使

$$M_t=\int_0^t\sigma(X_s)\mathrm{d}\bar{B}_s。$$

于是我们得到了 SDE$(\sigma,0)$的解$(X,\bar{B})$。

其次，我们证明(1)中的必要性。

设(X,B)是 SDE$(\sigma,0)$的解。不妨设 $B_0=X_0$。令 $M=X-X_0$，则 $M\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$，$\langle M\rangle_t=\int_0^t\sigma^2(X_s)\mathrm{d}s$。由(1.51)存在Brown运动 $\bar{B}$，使

$$M_t=\bar{B}_{\langle M\rangle_t}。$$

记$\langle M\rangle_t$ 的右连续逆为 $\tilde{\sigma}_t$，注意 $s\wedge\langle M\rangle_\infty=\langle M\rangle_{\tilde{\sigma}_s}$及$\mathrm{d}\langle M\rangle_t$ 在 $\sigma^2(X_t)$的零点上不负荷，我们有

$$\int_0^{s\wedge M_\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\sigma^2(B_u)}=\int_0^{M_{\tilde{\sigma}_s}}\frac{\mathrm{d}u}{\sigma^2(B_u)}$$
$$=\int_0^{\tilde{\sigma}_s}\frac{\mathrm{d}\langle M\rangle_v}{\sigma^2(X_v)}$$
$$=\int_0^{\tilde{\sigma}_s}I_{(0,\infty)}(\sigma^2(X_v))\mathrm{d}v\leqslant\tilde{\sigma}_s. \quad (5.5)$$

如果 $X_0=x$ 不是 σ 的零点，那么 $\forall t$，$\langle M\rangle_t\neq0$。事实上，如果 $\langle M\rangle_t=0$，那么 $X_s\equiv x$ $(s\leqslant t)$，从而

$$\langle M\rangle_t=\int_0^t\sigma^2(x)\mathrm{d}s=\sigma^2(x)t,$$

引起了矛盾。

于是 $P(\langle M\rangle_\infty\neq0)>0$。但是 $\langle M\rangle_\infty\neq0$ 推出 $\tilde{\sigma}_0<\infty$，由 $\tilde{\sigma}_s$ 右连性，这蕴含 s 充分小时 $\tilde{\sigma}_s<\infty$。从而我们有

$$P(\tilde{\sigma}_s<\infty,\ \langle M\rangle_\infty\neq0)>0.$$

在引理2.30中取

$$t(w)=\begin{cases}s\wedge\langle M\rangle_\infty, & \omega\in\{\tilde{\sigma}_s<\infty,\ \langle M\rangle_\infty\neq0\},\\ s, & \text{其他 }\omega.\end{cases}$$

由(5.5)及命题2.34（Engelbert-Schmidt 零一律）立得 $x\in\mathscr{I}(\sigma)$。

我们再来证明(2)中的必要性。

反设如果存在 σ 的零点 $x\in\mathscr{Z}(\sigma)$，那么 $\bar{X}_t\equiv x$ 是 $X_0=x$ 的一个解。而在(1)的充分性部分中构造的解 $X_t=B_{A_t}$ 在击中 $\mathscr{I}(\sigma)$ 前不会是常数。这就得到了初值为 x 的两个不同的弱解。这导致了矛盾。

最后证明(2)中的充分性。

设 $\bar{X}$ 是任意一个初值为 X_0 的弱解。令 $M_t=\bar{X}_t-X_0$，τ 为 $\bar{X}$ 击中 $\mathscr{Z}(\sigma)$ 的时刻。那么由假定知 $t<\tau$ 时有 $\sigma^2(\bar{X}_t)>0$，故 $\langle M\rangle_t$ 严格递增。记 $\langle M\rangle_t$ 的右连续逆为 σ_t。由(1.51)存在

Brown 运动$\tilde{B}$,使 $\tilde{B}_0 = X_0$, $M_t = \tilde{B}_{\langle M\rangle_t}$. 那么 $\tilde{B}$ 击中$\mathscr{I}(\sigma)$的时刻为$\langle M\rangle_\tau$. 往证

$$\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(\tilde{B}_u)} = \sigma_s \quad (0\leqslant s<\langle M\rangle_\infty) \quad \text{a.e.}\,dP. \tag{5.6}$$

我们注意在$\langle M\rangle_\tau < \langle M\rangle_\infty$ 上有 $\sigma_{\langle M\rangle_\tau} < \infty$. 在(5.5)中令 $s \downarrow \langle M\rangle_\tau$ 便应有

$$\int_0^{\langle M\rangle_\tau +} \frac{du}{\sigma^2(\tilde{B}_u)} \leqslant \sigma_{\langle M\rangle_\tau} < \infty.$$

但是由引理5.2, 上式左边概率为1地等于$+\infty$. 这就推出了

$$P(\langle M\rangle_\tau < \langle M\rangle_\infty) = 0,$$

从而以概率为1地有$\langle M\rangle_\tau \geqslant \langle M\rangle_\infty$. 这样, 若 $s<\langle M\rangle_\infty$, 就能推出 $\sigma_s<\tau$. 于是(5.5)中应该是等式. 这就得到了(5.6). 同时还有

$$\langle M\rangle_\tau = \langle M\rangle_\infty \quad (\text{a.e.}\,dP).$$

事实上我们有

$$\sigma_s = \int_0^{s+} \frac{du}{\sigma^2(\tilde{B}_u)} \quad (0\leqslant s<\infty), \tag{5.6$'$}$$

这是因为: 当 $s<\langle M\rangle_\infty$ 时由(5.6)及右连续性便得(5.6)$'$; 而且 $s\geqslant\langle M\rangle_\infty$ 时, 注意到$\langle M\rangle_\tau$ 为 $\tilde{B}$ 击中 $\mathscr{I}(\sigma)$时刻, 由引理5.2 可知(5.6)$'$两边都是$+\infty$.

由(5.6)$'$, 我们可见$\langle M\rangle_t$ 与引理 5.1 中的 A_t 有相同的形式. 从而 $\tilde{X}$ 与我们在证明(1)的充分性时所构造的解X具相同的分布. 较具体地说, 如果对 $w\in W = C[0,\infty)$定义 $\mathscr{B}([0,\infty)\times W)$函数:

$$A_t(w) = \inf\left\{s: \int_0^{s+} \frac{du}{\sigma^2(w_u)} > t\right\} \quad (0\leqslant t<\infty),$$

$$\Phi(t,w) = w_0 + w_{A_t(w)},$$

$$B_t = \tilde{B} + \tilde{B}_0,$$

那么我们有

$$X_t = X_0 + B_{M_t} = \Phi(t, X_0, B).$$

可见 X 的分布由 $X_0 + B$ 唯一地确定。

注 如果 σ 的零点包含在 $\mathscr{I}(\sigma)$ 中，那么在击中 $\mathscr{I}(\sigma)$ 后，解保持常值 $X_0 + B_{M_\tau}$。

下面讨论对于可测函数 $\sigma(x), b(x)$ 而言，如何把一维 SDE(σ, b) 的研究化归 SDE$(\sigma, 0)$ 的问题。

命题5.1(Zvonkin 方法) 记 SDE(σ, b) 相应的扩散算符

$$Au \equiv a(x)u'' + b(x)u' \quad \left(a(x) \equiv \frac{1}{2}\sigma^2(x)\right).$$

假定 $a(x) > 0$ ($\forall x \in R$), $\frac{b(x)}{a(x)} \in L^{\mathrm{loc}}$. 考虑

$$\begin{cases} Au = 0 \quad (\mathrm{a.e.}\ \mathrm{d}x), \\ u(c) = 0, \ u'(c) = 1 \end{cases}$$

的解，记为 $s(x)$(确切地应记为 $s^{(c)}(x)$)：

$$s(x) = \int_c^x \exp\left(\int_c^z \frac{b}{a}\mathrm{d}z\right) \quad (x \in \boldsymbol{R}). \tag{5.7}$$

那么 $s(x)$ 严格递增，因此 $s(-\infty), s(+\infty)$ 有确切含义，记 $s(x)$ 的反函数为 $q(x)$，令

$$\tilde{\sigma}(y) = s'(q(y))\sigma(q(y))I_{(s(-\infty), s(+\infty))}(y). \tag{5.8}$$

于是在 X 爆炸时刻 ζ 前满足方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s, \tag{5.9}$$

当且仅当 $Y_t = s(X_t)$ 满足($s(-\infty) < Y_0 < s(+\infty)$)

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}(Y_s)\mathrm{d}B_s. \tag{5.10}$$

证明 令 ζ_n 为 X 越出 $[-n,n]$ 的时刻，$\zeta_n \uparrow \zeta$，对 $X_{t\wedge\zeta_n}$ 用 Ito 公式，我们得到

$$Y_{t\wedge\zeta_n} = s(X_0) + \int_0^{t\wedge\zeta_n} \sigma(Y_s)\mathrm{d}B_s. \tag{5.11}$$

在 $\{\zeta<\infty\}$ 上对一维过程 X 而言，X_ζ 有确切含义（$-\infty$ 或 $+\infty$），我们补充定义 $X_t = X_\zeta$ $(t>\zeta)$，于是 X_t $(0\leqslant t<\infty)$ 是取值于 $[-\infty,\infty]$ 的连续过程。再则，$s(x)$ 是 $[-\infty,\infty]$ 上连续函数，所以 $Y_{t\wedge\zeta_n}\to Y_{t\wedge\zeta}$，从而 $\lim\limits_n \int_0^{t\wedge\zeta_n}\sigma(Y_s)\mathrm{d}B_s$ 存在。用本节初的一段推理就得到 $\lim\limits_n \int_0^{t\wedge\zeta_n}\sigma^2(Y_s)\mathrm{d}s<\infty$，因此 $\int_0^{t\wedge\zeta}\sigma^2(Y_s)\,\mathrm{d}s$ 存在。但是 $t\geqslant\zeta$ 时 X 取常值（可能是 $-\infty$ 或 $+\infty$），从而 Y 也取常值。于是对一切 t，$\int_0^t\sigma^2(Y_s)\mathrm{d}s$ 存在。它蕴含 $\int_0^t\sigma(Y_s)\mathrm{d}B_s$ 存在且连续，由连续性及(5.11)我们推出(5.10)对 $t<\zeta$ 成立，并且在 $t=\zeta<\infty$ 上也成立。再注意到 $t>\zeta$ 时 $X_t=-\infty$ 或 $+\infty$，由定义 $\sigma(Y_t)=0$，因此(5.10)对一切 t 成立。

反之，如果 Y 是(5.10)的解，则定义 $X=q(Y)$，注意

$$q'(y) = \frac{1}{s'(q(y))},$$

$$q''(y) = -\frac{s''(q(y))}{s'(q(y))}(q'(y))^2 = \left(\frac{b}{a}\right)(q(y))\frac{1}{s'(q(y))^2},$$

用 Ito 公式得

$$X_{t\wedge\zeta_n} = X_0 + \int_0^{t\wedge\zeta_n} q'(Y_s)\mathrm{d}Y_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\zeta_n} q''(Y_s)\mathrm{d}\langle Y\rangle_s$$

$$= X_0 + \int_0^{t\wedge\zeta_n}\frac{1}{s'(X_s)}\sigma(Y_s)\mathrm{d}B_s$$

$$+\int_0^{t\wedge\zeta_n}\left(\frac{b}{\sigma^2}\right)(X_s)\frac{1}{(s'(X_s))^2}\sigma^2(Y_s)\mathrm{d}s$$

$$= X_0 + \int_0^{t\wedge\zeta_n}\sigma(X_s)dB_s + \int_0^{t\wedge\zeta_n}b(X_s)ds,$$

从而(5.9)成立。

推论 若 $\sigma(x)>0$，$\frac{b}{\sigma^2}\in L^{loc}$，则 SDE$(\sigma,b)$的解$X$满足：

$$s(\infty)=\infty \Longrightarrow P(\zeta<\infty,\ X_\zeta=+\infty)=0;$$

$$s(-\infty)=-\infty \Longrightarrow P(\zeta<\infty,\ X_\zeta=-\infty)=0.$$

证明 若 $\zeta(\omega)<\infty$，且 $X_{\zeta(\omega)}(w)=-\infty$，那么 $Y_{\zeta(\omega)}(w)=s(\infty)$。由于$Y$是 SDE$(\tilde{\sigma},0)$的解，$Y$ a.e.dP 地不会爆炸，所以推论成立。

定理5.2 如果

$$\sigma(x)>0,\ \frac{b}{\sigma^2},\ \frac{1}{\sigma^2}\in L^{loc}, \tag{5.12}$$

则 SDE(σ,b)对任意初分布存在分布唯一的弱解。

证明 由命题5.1及定理5.1，我们只须验证$\frac{1}{\sigma^2}$的不可积点与σ的零点一致。为此也只须验证$(s(-\infty),s(\infty))$的点y_0都是$\frac{1}{\tilde{\sigma}^2}$的局部可积点。取$\varepsilon$充分小，使

$$s(-\infty)<y_0-\varepsilon<y_0+\varepsilon<s(+\infty).$$

于是

$$\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon}\frac{dy}{\tilde{\sigma}^2(y)} = \int_{q(y_0-\varepsilon)}^{q(y_0+\varepsilon)}\frac{dx}{s'(x)\sigma^2(x)}$$

$$\leqslant 常数\int_{q(y_0-\varepsilon)}^{q(y_0+\varepsilon)}\frac{dx}{\sigma^2(x)}<\infty.$$

定理5.3 若 $\sigma(x)\in \mathrm{Lip}^{loc}$ 且在任意紧集K上σ有正下界，$b(x)$有界 Borel 可测，则 SDE$_{x_0}(\sigma,b)$存在唯一且不爆炸的强解。

证明 我们首先证明方程的弱解不会在有限时刻爆炸。事实

上，由于 $b(x)$ 有界，我们有

$$\int_0^{t\wedge\zeta_n} b(X_s)\mathrm{d}s \to \int_0^{t\wedge\zeta} b(X_s)\mathrm{d}s.$$

此外我们有 $X_{t\wedge\zeta_n}\to X_{t\wedge\zeta}$，所以 $\lim\limits_n \int_0^{t\wedge\zeta_n}\sigma(X_s)\mathrm{d}B_s$ 存在．由本节开始那段推理立知 $P(\zeta<\infty)=0$。

其次，由定理 5.2 可知弱解存在。

再则，在假定下，由 $s''=-\dfrac{2b}{\sigma^2}s'$ 是局部有界的就推出 $s'\in \mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$，从而 $\tilde\sigma$ 在 $(s(-\infty),\ s(+\infty))$ 上也属于 $\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$。同时由于 SDE$(\sigma,b)$ 的解 X 不会爆炸，所以 $Y\equiv s(X_t)$ 永远在 $(s(-\infty),(s+\infty))$ 中，这样由定理 3.2 SDE$(\tilde\sigma,0)$ 有轨道唯一性．利用命题5.1，SDE(σ,b) 也就有轨道唯一性．再利用 Yamada–Watanabe 定理(定理3.3)的推论便得

注1 作为特例，对于有界可测的 $b(x)$，

$$\mathrm{d}X_t = B + \mathrm{d}b(X_t)\mathrm{d}t$$

对任意初值有唯一强解，且不爆炸。这一结论是 Zvonkin 定理的齐次情形。

定理5.3′ 若 $\sigma(x)\in\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$，且在任意紧集 K 上有一致正下界，$b(x)$ 局部有界，Borel 可测，则 $\mathrm{SDE}_{X_0}(\sigma,b)$ 存在唯一强解。

证明 令

$$b_n(x)=b\left(\left(1\wedge\frac{n}{|x|}\right)x\right),\quad X_0^{(n)}=X_0\left(1\wedge\frac{n}{|X_0|}\right),$$

则 $\mathrm{SDE}_{X_0^{(n)}}(\sigma,b_n)$ 有唯一强解 $X^{(n)}$。以下证明就与定理 3.2 中的方法类似。令

$$\zeta_n=\inf\{t:\ |X_t^{(n)}|\geqslant n\},$$

它对于 n 递增，记

$$\zeta=\lim_{n\to 0}\zeta_n.$$

定义

$$X_t=\begin{cases}X_t^{(n)}, & 0\leqslant t<\zeta_n,\\ X_\zeta, & t\geqslant\zeta,\end{cases}$$

其中 X_ζ 可取 $+\infty$ 或 $-\infty$。于是 X 是 SDE(σ,b) 的唯一强解。

注2 Veretennikov 证明了：对 d 维

$$\mathrm{d}X_t=\mathrm{d}B+b(t,X_t)\mathrm{d}t$$

存在唯一强解满足初值 X_0，其中 $b(t,x)$ 为有界 Borel 可测。

§5.2 轨轨道唯一性与强解

引理5.3 (Le Gall) 如果对于连续半鞅 X 存在一个非负增函数 $\rho(t)$，满足

(L_1) $\exists\varepsilon>0$，$\frac{1}{\rho(t)}\in L(0,\varepsilon)$；

(L_2) $\forall t>0$，

$$\int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s)\frac{\mathrm{d}\langle X\rangle_s}{\rho(X_s)}<\infty\quad(\mathrm{a.e.\ d}P),\tag{5.12}$$

则

$$L_t^0\equiv0\quad(\mathrm{a.e.\ d}P).$$

证明 用占位时公式及(L_2)

$$\int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s)\frac{\mathrm{d}\langle X\rangle_s}{\rho(X_s)}=\int_{(0,\infty)}\frac{1}{\rho(a)}L_t^a\mathrm{d}a,$$

右式应有限，再由(L_1)可知 $L_t^0=0$。

引理5.4 如果 $\sigma(t,x),b(t,x)$ 有界 Borel 可测，(X,B)，(Y,B) 是 SDE(σ,b) 的解，$X_0=Y_0$，则下列三个叙述彼此等价：

1° $X\vee Y$ 是解；

2° $L_t^0(Y-X)=0$；

3° $X\wedge Y$ 是解。

证明 利用 Tanaka 公式及 X,Y 是解，$X_0=Y_0$ 我们得到

$X_t\vee Y_t=X_t+(Y_t-X_t)^+$

$$= X_t + \int_0^t I_{\{Y_s > X_s\}} \mathrm{d}(Y-X)_s + \frac{1}{2} L_t^0(Y-X)$$

$$= X_0 \vee Y_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s \vee Y_s) \mathrm{d}B_s + \int_0^t b(s, X_s \vee Y_s) \mathrm{d}s$$

$$+ \frac{1}{2} L_t^0(Y-X).$$

由此立得1°与2°之等价性。注意 $X \wedge Y = X - (Y-X)^-$，类似可得3°与2°之等价性。

下面的引理是 Yamada-Watanabe 定理的部分逆定理。

引理5.5 如果 $\sigma(t,x), b(t,x)$ 有界 Borel 可测，SDE(σ, b) 具有分布唯一性，而且对于给定 Brown 运动 B 的任意两个有相同初值的解 X, Y 恒有 $L_t^0(Y-X) = 0$，则 SDE(σ, b) 具有轨道唯一性。

证明 由引理 5.4，这时 $X \vee Y$ 也是与 X 有相同初值的解。再利用分布唯一性就必须有 $X \vee Y = X$，也就是 $Y = X$。

定理5.4 在下列三种情形之一成立时，SDE(σ, b) 具有轨道唯一性：

1°(Okabe-Shimizu) $b = b(t,x)$ 有界可测，$\sigma = \sigma(x)$ 有界，且 $\geqslant$ 某个 $\varepsilon_0 > 0$ 而且对 $\forall n$ 存在严格正 Borel 可测函数 ρ_n，使

$$(1°.1)\quad \exists \varepsilon > 0 \text{ 使 } \frac{1}{\rho_n} \in L(0, \varepsilon); \tag{5.13}$$

$$(1°.2)\quad |\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leqslant \rho_n(|x-y|)\ (\forall |x|, |y| \leqslant n).$$

2°(Yamada-Watanabe) 对 $\forall T$, n 存在满足(1°.1)的正严增函数 $\rho_{n,T}$ 及满足(1°.1)的非负严增凹函数 $\kappa_{n,T}$，使

$$\begin{aligned} |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 &\leqslant \rho_{n,T}(|x-y|), \\ |b(t,x) - b(t,y)| &\leqslant \kappa_{n,T}(|x-y|), \end{aligned} \tag{5.14}$$

对 $t \leqslant T, |x|, |y| \leqslant n$ 成立。

3°(Nakao-Perkins-Le Gall) $b(t,x)$ 有界 Borel 可测，$\sigma(x)$

有界且$\geqslant$(某个)$\varepsilon>0$，而且存在递增有界函数f，使

$$|\sigma(x)-\sigma(y)|^2\leqslant|f(x)-f(y)|. \tag{5.15}$$

证明 在1°或3°条件下，由定理5.1之(2)可知要验证引理5.5的条件得到满足只需证：对任意解$(X,B),(Y,B')$，只要$B=B'$就有$L_t^0(X-Y)=0$。在2°条件下，我们将同样证明$L_t^0(X-Y)=0$，但不再用引理5.5，而是用Tanaka-Meyer公式估算$E|X_t-Y_t|$。下证分别进行。

1°的证明 先设ρ_n不依n。把引理5.3中的半鞅取成$X-Y$，则有

$$\int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s-Y_s)\frac{\mathrm{d}\langle X-Y\rangle_s}{\rho(X_s-Y_s)}$$

$$=\int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s-Y_s)\frac{(\sigma(X_s)-\sigma(Y_s))^2}{\rho(|X_s-Y_s|)}\mathrm{d}s\leqslant t.$$

由引理5.3立得$L_t^0(X-Y)=0$。

3°的证明 我们令$\rho(t)=t$来验证引理5.5的条件。取$\delta>0$，我们有

$$E\int_0^t I_{(\delta,\infty)}(X_s-Y_s)\frac{\mathrm{d}\langle X-Y\rangle_s}{|X_s-Y_s|}$$

$$\leqslant E\int_0^t I_{(\delta,\infty)}(X_s-Y_s)\frac{f(X_s)-f(Y_s)}{X_s-Y_s}\mathrm{d}s$$

$$\stackrel{\text{记}}{=}\alpha^\delta(f).$$

用卷积一个光滑的近似幺元的方法可以构造f_n一致有界递增，$f_n\in C_1$，且$f_n(x)\to f(x)$在f的连续点成立。由于f的不连续点只有可列个，所以用占位时公式可知X_s或Y_s停留在这些点上的全部时间为零Lebesgue测度。因此

$$f_n(X_s)-f_n(Y_s)\to f(X_s)-f(Y_s)\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}s).$$

从而$\alpha^\delta(f_n)\to\alpha^\delta(f)$。用占位时公式我们有

$$a^{\delta}(f_n)=E\int_0^t\int_0^1 f'_n(\lambda X_s+(1-\lambda)Y_s)\,\mathrm{d}\lambda I_{(\delta,\infty)}(X_s-Y_s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_0^1 E\left(\int_0^t f'_n(\lambda X_s+(1-\lambda)Y_s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant\int_0^1 E\int_0^t f'_n(\lambda X_s+(1-\lambda)Y_s)$$

$$\times\frac{(\lambda\sigma(X_s)+(1-\lambda)\sigma(Y_s))^2}{\varepsilon^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 E\left(\int_{-\infty}^{\infty} f'_n(a)L_t^a(\lambda X+(1-\lambda)Y)\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}\lambda.$$

另一方面，由 $E^{\lambda}\equiv\lambda X+(1-\lambda)Y$ 的 Tanaka-Meyer 公式

$$L_t^a(E^{\lambda})=|E_t^{\lambda}-a|-|E_0^{\lambda}-a|-\int_0^t \mathrm{sgn}(E_s^{\lambda}-a)\mathrm{d}E_s^{\lambda}$$

$$\leqslant|E_t^{\lambda}-E_0^{\lambda}|-\int_0^t \mathrm{sgn}(E_s^{\lambda}-a)\mathrm{d}E_s^{\lambda}.$$

再利用 σ,b 的有界性，我们得到

$$\sup_{a,\lambda} EL_t^a(E^{\lambda})<\infty.$$

于是由 $f'_n\geqslant 0$ 及 f_n 的一致有界性推出

$$a^{\delta}(f_n)\leqslant 常数\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

从而

$$a^{\delta}(f)\leqslant 常数\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

再令 $\delta\to 0$，便得

$$E\int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s-Y_s)\frac{\mathrm{d}\langle X-Y\rangle_s}{|X_s-Y_s|}<\infty.$$

故由引理 5.3 即推出 $L_t^0(X-Y)=0$。

2°的证明 首先设 $\rho_{n,T}$，$\kappa_{n,T}$ 都与 n,T 无关。这时有

$$X_t - Y_t = X_0 - Y_0 + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) \mathrm{d}B_s$$

$$+ \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) \mathrm{d}s.$$

所以

$$\int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s - Y_s) \frac{\mathrm{d}\langle X - Y \rangle_s}{\rho \langle X_s - Y_s \rangle} \leqslant t.$$

从而由引理 5.3 得到 $L_t^0(X - Y) = 0$。如果 $X_0 = Y_0$，那么

$$|X_t - Y_t| = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s - Y_s) \mathrm{d}(X_s - Y_s).$$

由 σ 的有界性我们有

$$E|X_t - Y_t| \leqslant \int_0^t E\kappa(|X_s - Y_s|) \mathrm{d}s.$$

利用 κ 的凹性可推出

$$E|X_t - Y_t| \leqslant \int_0^t \kappa(E|X_s - Y_s|) \mathrm{d}s.$$

记左方为 $\varphi(t)$，那么

$$\varphi(t) \leqslant \int_0^t \kappa(\varphi(s)) \mathrm{d}s.$$

由于 $\kappa(\cdot)$递增凹且 $\kappa(0) = 0$，我们由微分方程知道

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \kappa(\psi), \\ \psi(0) = \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \end{cases} \tag{5.16}$$

存在唯一解 $\psi(t)$，即

$$\psi(t) = \varepsilon + \int_0^t \kappa(\psi(s)) \mathrm{d}s.$$

令

$$\tau^* = \sup\{t;\ \varphi(t) < \psi(t)\}.$$

如果 $\tau^* < \infty$，那么

$$\int_0^{\tau^*} \kappa(\varphi(s)) \mathrm{d}s < \int_0^{\tau^*} \kappa(\psi(s)) \mathrm{d}s.$$

于是存在$h>0$，使

$$\int_0^{\tau^*+h}\kappa(\varphi(s))\mathrm{d}s<\int_0^{\tau^*+h}\kappa(\psi(s))\mathrm{d}s.$$

因而$\varphi(\tau^*+h)<\psi(\tau^*+h)$，这与$\tau^*$的定义矛盾。所以我们应有$\tau^*=\infty$，也就是有$\varphi(t)<\psi(t)$。现在我们从(5.16)反解$t$：

$$t=\int_\varepsilon^{\psi(t)}\frac{\mathrm{d}u}{\kappa(u)}.$$

另一方面由$\frac{1}{\kappa}$在0点不可积，这就必须有$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(t)=0$。从而$\varphi(t)\equiv 0$，这就是$P(X_\cdot=Y_\cdot)=1$。

现在我们讨论2°所设的一般情况。令

$$X_0^{(n)}=X_0\left(1\wedge\frac{n}{|X_0|}\right);$$

$$\sigma_n=\sigma\left(t,\left(1\wedge\frac{n}{x}\right)x\right);\quad b_n=b\left(t,\left(1\wedge\frac{n}{|x|}\right)x\right).$$

于是σ_n,b_n适合前面的条件，因此SDE(σ_n,b_n)的解有轨道唯一性。从而对$\forall n$，解在越出区间$[-n,n]$之前并且在T前有轨道唯一性，因此SDE(σ,b)的局部解也就有轨道唯一性。

推论 若σ,b均不依赖t，且定理中各项叙述中有一项满足，则SDE$_{X_0}(\sigma,b)$存在唯一的强解。

证明 在定理假定2°下，σ,b连续。由定理4.4，SDE(σ,b)存在解。于是在1°—3°中有一项假定满足时，定理3.3的条件满足，由定理3.3的推论可知方程存在唯一强解。

注 定理的情形3°的含义为：σ的平方变差局部有界。这推广了Nakao关于σ局部有界变差的假定；情形1°与2°中典例的σ为$\frac{1}{2}$阶(或大于$\frac{1}{2}$阶)Hölder函数。

下面一个定理是SDE$(\sigma,0)$在定理5.4第1°情形的推广。

定理5.5(Perkins) 如果在R和$[0,\infty)$上分别存在非负函数f与ρ，满足

(P_1) $\frac{1}{\sigma^2}$的可积点也是$\frac{f}{\sigma^2}$的可积点，$f\in L^{loc}$；

(P_2) ρ严格递增，且$\forall\varepsilon>0$使$\frac{1}{\rho}\in L(0,\varepsilon)$；

(P_3) $\exists A>0$使对$\forall x$有

$$|\sigma(x+y)-\sigma(x)|^2\leqslant f(x)\rho(|y|)\quad(y\in[-A,A]),\tag{5.17}$$

则SDE$(\sigma,0)$有轨道唯一性。

证明 我们首先指出任意一个解X在击中$\mathscr{F}(\sigma)$的时刻τ后保持常值X_τ。对这个事实，由定理5.1后的注，我们只需验证σ的零点都是$\frac{1}{\sigma^2}$的不可积点。事实上，如果x是σ的零点，那么由(P_2)，(P_3)，我们有

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{dy}{\sigma^2(y)}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{dy}{\sigma^2(x+y)}\geqslant\frac{2}{f(x)}\int_0^{\varepsilon}\frac{dy}{\rho(y)}=\infty.$$

这样就验证了我们要的事实。

对于解(X,B)，令$M_t\equiv X_t-X_0$，于是

$$\langle M\rangle_t=\langle X-X_0\rangle_t=\int_0^t\sigma^2(X_s)ds,$$

而且存在Brown运动$\tilde{B}$，使

$$X_t-X_0=\tilde{B}_{\langle M\rangle_t}.$$

记τ_n为X击中$\mathscr{F}(\sigma)$的$\frac{1}{n}$邻域的时刻，于是$\langle M\rangle_{\tau_n}$是$X_0+\tilde{B}$击中$\mathscr{F}(\sigma)$的$\frac{1}{n}$邻域的时刻。定义

$$\begin{cases}f_n=fI_{(\mathscr{F}(\sigma)^{\frac{1}{n}})^c}+I_{(\mathscr{F}(\sigma))^{\frac{1}{n}}};\\ \sigma_n=\sigma I_{(\mathscr{F}(\sigma)^{\frac{1}{n}})^c}+I_{(\mathscr{F}(\sigma))^{\frac{1}{n}}}.\end{cases}$$

于是$\frac{f_n(x+\cdot)}{\sigma_n^2(x+\cdot)}\in L^{loc}(\forall x)$，由Engelbert-Schmidt 零一律便得到：对于任意x有

$$P_0\left(\int_0^t\left(\frac{f_n}{\sigma_n^2}\right)(x+\tilde{B}_s)\mathrm{d}s<\infty,\ \forall t<\infty\right)=1.$$

上式即对任意x有

$$P_x\left(\int_0^t\left(\frac{f_n}{\sigma_n^2}\right)(\tilde{B}_s)\mathrm{d}s<\infty,\ \forall t<\infty\right)=1.$$

从而对任意X_0有

$$P_0\left(\int_0^t\left(\frac{f_n}{\sigma_n^2}\right)(X_0+\tilde{B}_s)\mathrm{d}s<\infty,\ \forall t<\infty\right)=1.$$

因此

$$\int_0^{\tau_n}f(X_s)\mathrm{d}s=\int_0^{M\tau_n}\left(\frac{f}{\sigma^2}\right)(X_0+\tilde{B}_s)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{M\tau_n}\left(\frac{f_n}{\sigma_n^2}\right)(X_0+\tilde{B}_s)\mathrm{d}s<\infty\quad(\text{a.e.}\,\mathrm{d}P).$$

我们对任意$k\geqslant\frac{1}{A}$，选取ε_k使

$$\int_{\varepsilon_k}^{\frac{1}{k}}\frac{1}{\rho(y)}\mathrm{d}y=k. \tag{5.18}$$

利用局部时的连续性及占位时公式，对任意$t(\omega)$及SDE$(\sigma,0)$的另一解(Y,B)，利用(5.18)有

$$L^0_{t(\omega)}(X-Y)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int_{\varepsilon_k}^{1/k}L^a_{t(\omega)}(X-Y)\ \frac{1}{\rho(a)}\mathrm{d}a$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int_0^{t(\omega)}\left(I_{[\varepsilon_k,\frac{1}{k}]}\frac{1}{\rho}\right)(Y_s-X_s)(\sigma(Y_s)-\sigma(X_s))^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{k}\int_0^{t(\omega)}f(X_s)\mathrm{d}s.$$

取$t(\omega)=\tau_n$，使得$L^0_{\tau_n}(Y-X)=0$。如果还有$X_0=Y_0$，那么

$$E|Y_{t\wedge\tau_n}-X_{t\wedge\tau_n}|=\int_0^{t\wedge\tau_n}\text{sgn}(Y_s-X_s)\,\text{d}(Y_s-X_s).$$

另一方面，

$$E(Y_{t\wedge\tau_n}-X_{t\wedge\tau_n})^2=E\int_0^t(\sigma(Y_{s\wedge\tau_n})-\sigma(X_{s\wedge\tau_n}))^2\text{d}s$$

$$\leqslant\int_0^t E(f(X_{s\wedge\tau_n})\rho(|Y_{s\wedge\tau_n}-X_{s\wedge\tau_n}|))\text{d}s,$$

由于 $f\in L^{\text{loc}}$ 及 ρ 的性质，被积函数一致有界，因此右方为有限值。即 $Y_{t\wedge\tau_n}-X_{t\wedge\tau_n}$ 的局部鞅部分是平方可积鞅，从而有

$$E|Y_{t\wedge\tau_n}-X_{t\wedge\tau_n}|=0.$$

令 $n\to\infty$ 便得

$$E|Y_{t\wedge\tau}-X_{t\wedge\tau_n}|=0.$$

最后利用证明开始那段结论，我们得到 $X=Y$。

推论 如果在定理条件上再加条件：$\frac{1}{\sigma^2}$的不可积点必是 σ 的零点，则 $\text{SDE}_{X_0}(\sigma,0)$存在唯一强解，且不爆炸。

§5.3 比较定理

引理5.6 若 $b_1(t,x)<b_2(t,x)$，而且它们都是$[0,T]\times[\alpha,\beta]$上的连续函数，则存在 $b(t,x)$，它对 $t\leqslant T$ 一致地是 x 的Lip 函数，并满足

$$b_1(t,x)<b(t,x)<b_2(t,x).$$

证明 设在$[0,T]\times[\alpha,\beta]$上 $b_2(t,x)-b_1(t,x)$之下确界为 m。显然 $m>0$。由 $b_i(t,x)$的一致连续性可知，存在 $\delta>0$，只要 $|x-y|<\delta$ 就有

$$|b_i(t,x)-b_i(t,y)|<m/4.$$

把$[\alpha,\beta]$分成相等的间隔，使间隔长小于 δ。设等分间隔数

为N。对于固定的t，我们定义

$$b(t,x)=\begin{cases}\dfrac{b_1(t,x)+b_2(t,x)}{2}, & \text{当 } x \text{ 是某间隔的端点 } x_n \text{ 时},\\ \text{折线连结}, & \text{其余部分}.\end{cases}$$

于是在间隔$[x_{n-1},x_n]$上恒有

$$b_1(t,x)<b(t,x)<b_2(t,x),$$

并且

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}b(t,x)\right|$$

$$\leqslant\frac{\left|\dfrac{b_1(t,x_n)+b_2(t,x_n)}{2}-\dfrac{b_1(t,x_{n-1})+b_2(t,x_{n-1})}{2}\right|}{\dfrac{\beta-\alpha}{N}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{m}{4}\Big/\frac{\beta-\alpha}{N}=\frac{Nm}{4(\beta-\alpha)}.$$

因此

$$|b(t,x)-b(t,y)|\leqslant\frac{Nm}{4(\beta-\alpha)}|x-y|.$$

定理5.6 如果$\sigma=\sigma(t,x)$满足(5.14)或$\sigma=\sigma(x)$满足(5.15)，$b_i(t,x)$二元连续$(i=1,2)$，$X^{(i)}$是SDE(σ,b_i)在同一个概率空间上对同一个Brown运动的解，而且$X_0^{(1)}\leqslant X_0^{(2)}$，那么我们有

1° 若$b_1(t,x)<b_2(t,x)$，则$P(X_t^{(1)}\leqslant X_t^{(2)},\ \forall t)=1$；

2° 若$b_1(t,x)\leqslant b_2(t,x)$，且其中有一个对$t\leqslant T$一致地满足对$x$的$\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$条件，则$P(X_t^{(1)}\leqslant X_t^{(2)},\ \forall t)=1$。

证明 2° 设$b_1(t,x)$对$t\leqslant T$一致地对x为$\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$函数，令此$\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$常数为$K_T$。记

$$\tau_n^{(i)}=\inf\{t:\ |X_t^{(i)}|\geqslant n\};$$

$$\tau_{n,T}=\tau_n^{(1)}\wedge\tau_n^{(2)}\wedge T.$$

由定理 5.4 $L_t^0(X^{(1)}-X^{(2)})=0$。于是用 Tanaka-Meyer 公式可以得到

$$
\begin{aligned}
&(X^{(1)}_{t\wedge\tau_{n,T}}-X^{(2)}_{t\wedge\tau_{n,T}})^+\\
&\quad=(X_0^{(1)}-X_0^{(2)})^+ + \int_0^{t\wedge\tau_{n,T}} I_{(0,\infty)}(X_s^{(1)}-X_s^{(2)})\\
&\qquad\cdot \mathrm{d}(X_s^{(1)}-X_s^{(2)})\\
&\quad=\int_0^{t\wedge\tau_{n,T}} I_{(0,\infty)}(X_s^{(1)}-X_s^{(2)})[(\sigma_1(s,X_s^{(1)})\\
&\qquad-\sigma_2(s,X_s^{(2)})\mathrm{d}B_s+(b_1(s,X_s^{(1)})-b_2(s,X_s^{(2)}))\mathrm{d}s].
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&E(X^{(1)}_{t\wedge\tau_{n,T}}-X^{(2)}_{t\wedge\tau_{n,T}})^+\\
&\quad\leqslant E\int_0^{t\wedge t_{n,T}} I_{(0,\infty)}(X_s^{(1)}-X_s^{(2)})\cdot|b_1(s,X_s^{(1)})\\
&\qquad-b_1(s,X_s^{(2)})|\mathrm{d}s\\
&\quad\leqslant K_T E\int_0^{t\wedge\tau_{n,T}}(X_s^{(1)}-X_s^{(2)})^+\mathrm{d}s\\
&\quad=K_T\int_0^t E(X^{(1)}_{s\wedge\tau_{n,T}}-X^{(2)}_{s\wedge\tau_{n,T}})^+\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由Gronwall 不等式得

$$E(X^{(1)}_{t\wedge\tau_{n,T}}-X^{(2)}_{s\wedge\tau_{n,T}})^+=0.$$

因而

$$X_t^{(1)}\leqslant X_t^{(2)}\quad(t\leqslant\tau_{n,T}).$$

让 $n,T\to\infty$ 便得到 $X^{(1)}\leqslant X^{(2)}$.

现在来证明 1°. 令 $b^{(n)}(t,x)$ 为 $[0,T]\times[-n,n]$ 上关于 t 一致地对 x 满足 Lip 条件，并且满足

$$b_1(t,x)<b^{(n)}(t,x)<b_2(t,x)\quad(0\leqslant t\leqslant T,|x|\leqslant n)$$

的函数，其存在性由引理 5.6 所保证。记 X 为 $\mathrm{SDE}_{X_0^{(1)}}(\sigma,\tilde{b}^{(n)})$ 的解，其中 $\tilde{b}^{(n)}$ 为 $b^{(n)}$ 的扩展，满足

$$\tilde{b}^{(n)}(t,x)=\begin{cases} b^{(n)}(T,x), & t>T, \\ b^{(n)}(t,-n), & x<-n, \\ b^{(n)}(t,n), & x>n. \end{cases}$$

由 2° 我们得到 $X^{(1)}\leqslant X$，$X\leqslant X^{(2)}$，从而推出 1°.

注 条件 2° 可减弱为(5.14)，即 b_1,b_2 中有一个满足(5.14).

§5.4 Stratonovich 方程及其近似

定理5.7(Doss) 如果 $\sigma\in C^2$，且 σ',σ'' 有界，$b\in \mathrm{Lip}$，则一维 Stratonovich 方程

$$\mathrm{d}X_t=b(X_t)\mathrm{d}t+\sigma(X_t)\circ \mathrm{d}B_t \tag{5.19}$$

存在唯一给定初值的强解，而且 X 可以通过常微分方程求得. 具体地，令 $u(x,y)$ 为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sigma(u), \\ u(0)=y \end{cases} \tag{5.20}$$

的解，记

$$f(x,y)=b(u(x,y))e^{-\int_0^x \sigma'(u(\alpha,y))\mathrm{d}\alpha},$$

$Y=Y_t(w)$ 为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(B_t,y), \\ y(0)=X_0 \end{cases} \tag{5.21}$$

的解，那么

$$X_t=u(B_t,Y_t).$$

证明 (5.19)显见存在唯一解，往证 f 关于 x 局部一致地对 y 为 $\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$ 且对 x 局部一致地关于 y 线性增长，从而(5.20)有唯一解. 我们注意到(5.20)可推出$\dfrac{\partial u}{\partial y}$满足

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = \sigma'(u)v, \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\int_0^x \sigma'(u(a,y))da}. \tag{5.21}$$

假定$|\sigma'|,|\sigma''| \leqslant A$，$b(x)$的 Lip 常数为$K$。令

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = e^{-\int_0^x \sigma'(u(a,y))da}, \tag{5.22}$$

那么$\rho(x,y) \leqslant e^{A|x|}$，且

$$|u(x,y_1) - u(x,y_2)| \leqslant e^{A|x|}|y_1 - y_2|,$$

$$|b(u(x,y_1)) - b(u(x,y_2))| \leqslant Ke^{A|x|}|y_1 - y_2|. \tag{5.23}$$

注意$|e^Z - e^W| \leqslant (e^Z \vee e^W)|Z - W|$，我们由(5.22)得到

$$\begin{aligned} &|\rho(x,y_1) - \rho(x,y_2)| \\ &\leqslant (\rho(x,y_1) \vee \rho(x,y_2)) \int_0^{|x|} |\sigma'(u(a,y_1)) - \sigma'(u(a,y_2)|da \\ &\leqslant e^{A|x|}\int_0^{|x|} A|u(a,y_1) - u(a,y_2)|da \\ &\leqslant A|x|e^{2A|x|}|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

从它与(5.23)就推出我们要的关于$f(x,y)$的结论。

其次，方程(5.19)即$\mathrm{SDE}\left(\sigma, b + \dfrac{1}{2}\sigma\sigma'\right)$，其系数$b,\sigma \in$ Lip，$\sigma\sigma' \in \mathrm{Lip}^{loc}$且线性增长，因此由定理3.2存在唯一强解。

最后我们证明：对(5.20)，(5.21)定义的u, Y_t，过程$X_t = u(B_t, Y_t)$确实是(5.19)的解。显见Y_t是有限变差过程。用 Ito 公式及$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sigma(u)\sigma'(u)$，我们有

$$du(B_t,Y_t) = \frac{\partial u}{\partial x}(B_t,Y_t)dB_t + \frac{\partial u}{\partial y}(B_t,Y_t)dY_t$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(B_t,Y_t)\mathrm{d}t$$

$$=\sigma(u(B_t,Y_t))\mathrm{d}B_t+b(u(B_t,Y_t))\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}(\sigma\sigma')(u(B_t,Y_t))\mathrm{d}t.$$

这就证明了 X_t 是(5.19)的解。

定理5.8 σ,b 满足定理 5.7条件，B 为$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，$A_t^{(n)}$ 为$(\mathscr{F}_t)$有限变差适应过程，满足 $\forall t$，

$$P(\sup_{s\leqslant t}|A_s^{(n)}-B_s|\to 0)=1. \tag{5.24}$$

设X为(5.19)的解，而 $X^{(n)}$为

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{(n)}=\sigma(X_t^{(n)})\mathrm{d}A_t^{(n)}+b(X_t^{(n)})\mathrm{d}t, \\ X_0^{(n)}=X_0 \end{cases} \tag{5.25}$$

的解，那么对 $\forall t$，

$$P(\sup_{s\leqslant t}|X_s^{(n)}-X_s|\to 0)=1. \tag{5.26}$$

证明 令 u,f 定义为定理5.7。定义 $Y_t^{(n)}$ 为：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(A_t^{(n)},y), \\ y(0)=X_0. \end{cases}$$

那么 $X_t^{(n)}=u(A_t^{(n)},Y_t^{(n)})$ 可同样得自 Ito 公式。往证(5.26)成立。记 f 的 Lip 常数为 L_k：

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L_k|y_1-y_2| \quad (|x|\leqslant k).$$

令

$$\tau_k=\inf\{s: |B_s|\geqslant k-1\}.$$

对给定 $\varepsilon>0$，利用 f 的二元连续性，对满足(5.24)的 ω 固定，只要 n 充分大(n 依 ω)，$s\leqslant\tau_k\wedge t$，就有

$$|f(A_s^{(n)}(\omega),Y_s(\omega))-f(B_s(\omega),Y_s(\omega))|\leqslant\varepsilon^2$$

及

$$|A_s^{(n)}(\omega)|\leqslant k.$$

于是

$$|f(A_s^{(n)}(\omega),Y_s^{(n)}(\omega))-f(A_s^{(n)}(\omega),Y_s(\omega))|$$

$$\leqslant L_k|Y_s^{(n)}(\omega)-Y_s(\omega)|,$$

从而

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(Y_s^{(n)}(\omega)-Y_s(\omega))\right|\leqslant L_k|Y_s^{(n)}(\omega)-Y_s(\omega)|+\varepsilon^2.$$

用 Gronwall 不等式便得到

$$|Y_s^{(n)}(\omega)-Y_s(\omega)|\leqslant\varepsilon^2 e^{L_k t}\quad(0\leqslant s\leqslant t\wedge\tau_k(\omega)).$$

如果我们选取 $\varepsilon<e^{-L_k t}$，则上式小于 ε。于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s<\tau_k(\omega)}|Y_s^{(n)}(\omega)-Y_s(\omega)|=0.$$

让 $k\to\infty$，利用(5.24)便得(5.26)。

§5.5 一维随机微分方程解的性质与边界点的分类

研究随机微分方程解的性质与边界性态是很重要的课题。在一维情形有相当圆满的结果。

设 $-\infty\leqslant r_1<r_2\leqslant\infty$，$\sigma(x),b(x)$是定义在$(r_1,r_2)$上的连续函数，$\sigma(x)>0$，$\frac{b}{\sigma^2},\frac{1}{\sigma^2}\in\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$。我们用 r_1,r_2 两点来紧化 (r_1,r_2) 成为$[r_1,r_2]$。记

$$\hat{W}=\{w:\ w=(w_t)_{t\geq0}\text{是取值于}[r_1,r_2]\text{的连续函数，且满足 }w_t=w_{t\wedge\zeta}\text{，其中 }\zeta\text{ 是 }w_t\text{ 首达}\{r_1,r_2\}\text{的时刻}\}.$$

由定理5.2我们有：SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$对任意初值 X_0 存在解X。它是取值于$(\hat{W},\mathscr{B}(\hat{W}))$的随机元。设初值为 x 的解记为 $X^{(x)}$，其分布记成 P_x。那么$\{P_x:\ x\in(r_1,r_2)\}$是一个 A 扩散族，这里 A 是算符

$$Au=a(x)u''+b(x)u' \quad \left(a(x)=\frac{1}{2}\sigma(x)^2\right).$$

注意到为了方便，我们这里把$\frac{\sigma^2(x)}{2}$记为$a(x)$替代§4.3中定义的$a(x)=\sigma^2(x)$。

X的概率行为与A及其在"边界点"r_1,r_2的性质是紧密联系的。以下我们不妨假定X是$(\hat{W},\mathscr{B}(\hat{W}))$上的坐标过程。

定义5.1 任取$c\in(r_1,r_2)$，定义

$$s(x)=\int_c^x\left\{\exp\left[-\int_c^y\frac{b}{a}\right]\right\}dy.$$

它称为A的(Feller)自然尺度(对不同的c，对应的$s(x)$之间只差一个一次变换)。

命题5.2 自然尺度$s(x)$满足方程

$$Au=0,$$

而且它是严格递增的。X对尺度$s(x)$具有"均匀性"，即对于$r_1<\alpha\leqslant x\leqslant\beta<r_2$，有

$$P_x(X_{\tau[\alpha,\beta]}=\alpha)=\frac{s(\beta)-s(x)}{s(\beta)-s(\alpha)},$$

$$P_x(X_{\tau[\alpha,\beta]}=\beta)=\frac{s(x)-s(\alpha)}{s(\beta)-s(\alpha)}, \tag{5.27}$$

其中$\{P_x:\ x\in(r_1,r_2)\}$是A扩散族，$\tau[\alpha,\beta]$是X_t首达$\{\alpha,\beta\}$的时刻。即按$s(\cdot)$作比例分配，此外这个比值并不依赖c。

又如果$\alpha_n\downarrow r_1,\beta_n\uparrow r_2$，那么$\tau[\alpha_n,\beta_n]\uparrow\zeta$，

$$\lim_{n\to\infty}\tau[\alpha,\beta_n]=\tau[\alpha,r_2].$$

证明 直接计算可得到$As=0$。

对$s(X_t)$用Ito公式，我们得到(以下简记$\tau=\tau[\alpha,\beta]$)

$$E_x s(X_{t\wedge\tau})=s(x).$$

利用有界收敛性及$\alpha\leqslant X_{t\wedge\tau}\leqslant\beta$，令$t\to\infty$便得

$$s(x)=E_x s(X_\tau)=s(\alpha)P_x(X_\tau=\alpha)+s(\beta)P_x(X_\tau=\beta).$$

将它与

$$P_x(X_\tau=\alpha)+P_x(X_\tau=\beta)=1$$

联立，解出 $P_x(X_\tau=\alpha),P_x(X_\tau=\beta)$便得到(5.27)。

又如果 $\alpha_n\downarrow r_1,\beta_n\uparrow r_2$，则 $\tau[\alpha_n,\beta_n]$递增而且$\leqslant\zeta$。设 $\tau[\alpha_n,\beta_n]\uparrow\tau_0$，那么 $\tau_0=\zeta$。事实上，如果相反，则 $\tau_0<\zeta\leqslant\infty$。于是 X_t 在$[0,\tau_0]$达到其上、下确界 m_2与 m_1，而且 $r_1<m_1\leqslant m_2<r_2$，取 n 充分大，使 $\alpha_n<m_1\leqslant m_2<\beta_n$，就应该有 $\tau[\alpha_n,\beta_n]>\tau_0$，这与 τ_0的定义矛盾。

另一个极限式的证明与以上完全类似，命题证毕。

定义5.2 X称为在(r_1,r_2)是常返的，如果对于任意 $x,y\in(r_1,r_2)$，恒有

$$P_x(\sigma_y<\infty)=1, \tag{5.28}$$

其中 σ_y 是 X_t 初达 y 的时刻。

下面的定理说明了，$s(x)$在边点 r_1,r_2 的性态描述了X的常返性。

定理5.9(以下的论断都与 $s(x)$中 c 的取法无关)

1° X在(r_1,r_2)常返，当且仅当 $s(r_1)=-\infty,s(r_2)=+\infty$。在条件满足下，过程$X$是不断的：对于$\forall x$

$$P_x(\zeta=\infty)=1,$$

并且还有

$$P_x[(\varliminf_{t\to\infty}X_t=r_1)\cap(\varlimsup_{t\to\infty}X_t=r_2)]=1.$$

2° 若X在(r_1,r_2)不是常返的，则 $\lim\limits_{t\to\zeta}X_t$存在且等于$X_\zeta$ (a.e.$\mathrm{d}P_x$)。这时有两种可能：

① $s(r_1),s(r_2)$ 都有限，那么 $P_x(X_\zeta=r_1),P_x(X_\zeta=r_2)$仍按 $s(\cdot)$作比例分配：对于任意 $x\in(r_1,r_2)$有

$$P_x(X_\zeta=r_1)=\frac{s(r_2)-s(x)}{s(r_2)-s(r_1)},$$

$$P_x(X_\zeta = r_2) = \frac{s(x) - s(r_1)}{s(r_2) - s(r_1)}, \tag{5.29}$$

而且

$$P_x(X_\zeta = r_1, \sup_{t<\zeta} X_t = r_2) = 0;$$

$$P_x(X_\zeta = r_2, \inf_{t<\zeta} X_t = r_1) = 0. \tag{5.30}$$

② $s(r_1), s(r_2)$恰有一个有限，例如$s(r_1) > -\infty, s(r_2) = \infty$，则对于任意$x \in (r_1, r_2)$有

$$P_x(X_\zeta = r_1, \sup_{t<\zeta} X_t < r_2) = 1. \tag{5.30'}$$

证明 先证1°中的必要性部分。如果$s(r_1) = -\infty, s(r_2) = \infty$，那么对于$x < \beta(< r_2)$我们有

$$P_x(\sup_{t<\zeta} X_t \geq \beta) \geq P_x(X_{\tau[\alpha,\beta]} = \beta).$$

让$\alpha \downarrow r_1$，由(5.27)及$s(r_1) = -\infty$，我们得到

$$P_x(\sup_{t<\zeta} X_t \geq \beta) \geq \lim_{\alpha \to r} P_x(X_{\tau[\alpha,\beta]} = \beta) = 1.$$

但是$\beta(< r_2)$可以任意，因此

$$P_x(\sup_{t<\zeta} X_t = r_2) = 1 \quad (\text{从而} P_x(\lim_{t\to\zeta} X_t = r_2) = 1). \tag{5.31}$$

同理

$$P_x(\inf_{t<\zeta} X_t = r_1) = 1 \quad (\text{从而} P_x(\lim_{t\to\zeta} X_t = r_1) = 1). \tag{5.32}$$

此时必有$P_x(\zeta = \infty) = 1$。事实上，如果情形相反，那么在一个P_x的正测集Λ_1上$\zeta < \infty$。于是在Λ_1上$X_\zeta = r_1$(或r_2)，而且X_t在$[0, \zeta]$上应取到所有的值$r_2 - (1/n)$(或$r_1 + (1/n)$)。从而应取到其上确界r_2(或下确界r_1)，因而$X_\zeta = r_2$(或r_1)。这就引起了矛盾。

(5.28)是(5.31)与(5.32)的推论。这样，1°中必要性得证。

其次，我们证明如果2°中②成立能推出X不是常返的。事实上，按前段的推理仍可得到(5.32)。取$\alpha_n \downarrow r_1, \beta_n \uparrow r_2$，利用$As(x) = 0$及Ito公式推出：对于任意$x \in (r_1, r_2)$我们有

$$s(X_{t\wedge\tau[\alpha_n,\beta_n]})-s(r_1)\text{是非负 }P_x\text{ 鞅。}$$

令 $n\to\infty$，由 Fatou 引理及命题5.2我们得到 $s(X_{t\wedge\zeta})-s(r_1)$是非负 P_x 上鞅。因而 a.e.dP_x 地存在极限 $\lim\limits_{t\to\zeta}s(X_t)-s(r_1)$。但是 $s(x)-s(r_1)$严格递增，所以 $\lim\limits_{t\to\zeta}X_t$(a.e.d$P_x$)存在。另一方面，由$X$满足(5.32)导致唯一的可能是$\lim\limits_{t\to\zeta}X_t=r_1$(a.e.d$P_x$)，而且 $P_x(\sup\limits_{t<\zeta}X_t=r_2)=0$。我们如果取 $x_n\uparrow r_2$，那么必有这样的 x_n，使 $P_x(\sigma_{x_n}<\infty)<1$。所以$X$不是常返的，同时(5.30′)成立。

再则，如果 $s(r_1),s(r_2)$都有限，由命题5.2 立得(5.29)。所以如果我们记 $\Omega_i=\{\omega:X_\zeta=r_i\}$，那么 $P_x(\Omega_i)>0$。与前段推理相仿地可得 $P_x(\Omega_1,\sup\limits_{t<\zeta}X_t=r_2)=0,P_x(\Omega_2,\inf\limits_{t<\zeta}X_t=r_1)=0$。此即(5.30)。类似地可推出$X$不是常返的。

最后，综合以上三段可知1°的条件对常返性也是充分的。定理证毕。

定义5.3 在$\mathscr{B}((r_1,r_2))$上的测度

$$m(\Gamma)=\int_\Gamma\frac{1}{a(x)s'(x)}\mathrm{d}x,\quad \Gamma\in\mathscr{B}((r_1,r_2))\tag{5.33}$$

称为A的(Feller)标准测度。

命题5.3 1° 令

$$m(x)=\int_c^x\mathrm{d}m\quad(c\in(r_1,r_2)),$$

则

$$A=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}.$$

2° 对于 $r_1<\alpha<\beta<r_2$ 及 $x,y\in[\alpha,\beta]$，定义非负对称函数(或称对称核)

$$G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(s(x)-s(\alpha))(s(\beta)-s(y))}{s(\beta)-s(\alpha)}, & x\leqslant y,\\ G(y,x), & x>y.\end{cases}\tag{5.34}$$

它相对于标准测度 m 定义了一个 $C_b((\alpha,\beta))$ 到 $C^2[(\alpha,\beta)]\cap C([\alpha,\beta])$ 的一个非负变换 S:

$$(Sf)(x)=\int_\alpha^\beta G(x,y)f(y)m(\mathrm{d}y). \qquad (5.35)$$

这个 Sf 是方程

$$\begin{cases} Au=-f, \\ u(\alpha)=u(\beta)=0 \end{cases} \qquad (5.36)$$

的唯一解。

如果还有 $s(r_2)<\infty$(或 $s(r_1)>-\infty$),那么 β 还可取成 r_2(α 还可取成 r_1)。

证明 直接计算得1°。又 $G(x,y)$ 二元连续,按定义我们有

$$(Sf)(x)=\frac{s(\beta)-s(x)}{s(\beta)-s(\alpha)}\int_\alpha^x (s(y)-s(\alpha))f(y)m(\mathrm{d}y)$$

$$+\frac{s(x)-s(\alpha)}{s(\beta)-s(\alpha)}\int_x^\beta (s(\beta)-s(y))f(y)m(\mathrm{d}y).$$

由此立得(5.36)。又因为 $u(x)\equiv(Sf)(x)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数,所以由两点边值决定了唯一性。

命题5.4 设 X 为 A 扩散,那么对 $r_1<\alpha<\beta<r_2$ 必有

$$E_x\tau[\alpha,\beta]=\int_\alpha^\beta G(x,y)m(\mathrm{d}y)(=(S1)(x)), \qquad (5.37)$$

因而它是 x 的连续函数。如果还有 $s(r_2)<\infty$,则 β 还可取成 r_2。

证明 把(5.37)右边的函数 $(S1)(x)$ 记成 $v(x)$。由(5.36)得到

$$\begin{cases} Av=-1, \\ v(\alpha)=v(\beta)=0. \end{cases} \qquad (5.38)$$

对 $v(X_{t\wedge\tau})$($\tau[\alpha,\beta]$ 简记为 τ)用 Ito 公式,我们得到

$$E_x v(X_{t\wedge\tau})-v(x)=E_x\int_0^{t\wedge\tau}(-1)\mathrm{d}u=-E_x(t\wedge\tau).$$

再用单调收敛定理及控制收敛性，我们就有

$$E_x\tau=\lim_{t\to\infty}E_x(t\wedge\tau)=\lim_{t\to\infty}(v(x)-E_xv(X_{t\wedge\tau}))$$
$$=v(x)-E_xv(X_\tau)=v(x).$$

于是由命题5.3便推出 $E_x\tau=(S1)(x)$。命题得证。

$s(r_1),s(r_2)$是第一对用来刻划A扩散X的量。它们的有限与否表示边点r_1,r_2的可达与否(即定理5.9)。如果它们都有限，接着的问题是：X能否平均地在有限时间到达边点？也就是问，例如说，在$s(r_2)<\infty$的条件下，什么时候$E_x[a,r_2]$有限？

引理5.7 若$s(r_2)<\infty$，则

$$E_x\tau[a,r_2]<\infty\Longleftrightarrow\int_c^{r_2}\int_c^y m(dz)s(dy)<\infty$$

(右边条件与$c\in(r_1,r_2)$的取法无关)。

证明 由命题5.4

$$E_x\tau[a,r_2]=\frac{s(r_2)-s(x)}{s(r_2)-s(a)}\int_a^x(s(y)-s(a))m(dy)$$
$$+\frac{s(x)-s(a)}{s(r_2)-s(a)}\int_x^{r_2}(s(r_2)-s(y))m(dy).$$

所以

$$E_x\tau[a,r_2]<\infty\Longleftrightarrow\int_x^{r_2}(s(r_2)-s(y))m(dy)<\infty$$
$$\Longleftrightarrow\int_x^{r_2}\int_x^y m(dz)s(dy)<\infty.$$

定义5.4 定义函数κ：任意取定$c\in(r_1,r_2)$，令

$$\kappa(x)=\int_c^x\int_c^y m(dz)s(dy)\left(=\int_c^x\int_z^x s(dy)m(dz)\right)$$

(显然它非负，而且$\kappa(r_i)$有限与否与c的取法无关)。

易见$\kappa(r_2)<\infty\Longrightarrow s(r_2)<\infty$；$\kappa(r_1)<\infty\Longrightarrow s(r_1)>-\infty$。

注意，在$s(r_1),s(r_2)$都有限时，定理5.9的2°虽然给出了X

到达两个边点的概率分配，但是并未给出爆炸时刻ζ是否有限的判据，然而由下面的定理5.10立刻可知：当κ在两个边点处的值均无限时，X在有限时间内达不到边点(故过程是保守的，即是不断的)。为此我们先证明下面的引理：

引理5.8 方程

$$\begin{cases}Au=u,\\ u'(c)=0,\ u(c)=1\end{cases} \tag{5.39}$$

有唯一解$u(x)$，它是严格正的，在$x\geqslant c$时严增，在$x\leqslant c$时严降。并且还有

$$1+\kappa(x)\leqslant u(x)\leqslant e^{\kappa(x)}\quad (r_1<x<r_2) \tag{5.40}$$

(因而κ与u在边点是否有限是一致的)。

证明 先证(5.39)的解的存在性。由命题5.3的1°可知(5.39)等价于积分方程

$$u(x)=1+\int_c^x\int_c^y u(z)m(\mathrm{d}z)s(\mathrm{d}y). \tag{5.39'}$$

我们递推地定义

$$u_0(x)=1;\ u_{n+1}(x)=1+\int_c^x\int_c^y u_n(z)m(\mathrm{d}z)s(\mathrm{d}y).$$

于是u_n可以写成$u_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$，其中

$$v_0(x)=1,\ v_1(x)=\kappa(x),\cdots,$$

$$v_{n+1}(x)=\int_c^x\int_c^y v_n(z)m(\mathrm{d}z)(\mathrm{d}y)\quad (n\geqslant 1).$$

由归纳法可证明

$$0\leqslant v_n(x)\leqslant\frac{\kappa(x)^n}{n!}.$$

因此$u_n(x)$在一切紧集上均一致收敛到某个正函数$u(x)$，它是积分方程(5.39')的解，并且满足

$$1+\kappa(x)=v_0(x)+v_1(x)\leqslant u_2(x)<u(x)\leqslant e^{\kappa(x)}.$$

最后我们来证明唯一性。设(5.39')有两个解u_1,u_2，那么

$v(x) \equiv u_1(x) - u_2(x)$满足

$$v(x) = \int_c^x \int_c^y v(z) m(\mathrm{d}z) s(\mathrm{d}y).$$

它是连续的，所以在$[c,x]$上有$|v(x)| \leqslant C$。把上式迭代n次后再进行估计，我们便得到

$$|v(x)| \leqslant C \frac{\kappa(x)^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

这样，方程(5.39)解的唯一性得证。

定理5.10 X在有限时间的爆炸概率

$$e(x) \equiv P_x(\zeta < \infty) \tag{5.41}$$

具有两歧性：$e(x) \equiv 0$或对于一切$x \in (r_1, r_2)$都有$e(x) > 0$。第一种情况即X是保守的，这种情况发生，当且仅当

$$\kappa(r_1) = \kappa(r_2) = \infty.$$

证明 首先我们证明$\kappa(r_1) = \kappa(r_2) = \infty$蕴含$e(x) \equiv 0$。由定理5.9我们不妨假定$s(r_1), s(r_2)$中至少一个为有限。为了确定起见，设$s(r_1) > -\infty$。设$u(x)$为引理5.8中的解。那么$u(r_1) = u(r_2) = \infty$。对于$e^{-t}u(x)$应用Ito公式，利用(5.39)我们得到

$$e^{-t}u(X_t) - u(X_0) = \int_0^t e^{-s} u'(X_s) \sigma(X_s) \mathrm{d}B_s.$$

所以

$$e^{-t \wedge \tau(\alpha,\beta)} u(X_{t \wedge \tau(\alpha,\beta)})$$

是连续P_x非负鞅。因而也是连续P_x非负上鞅。取$\alpha = \alpha_n \downarrow r_1, \beta = \beta_n \uparrow r_2$，其极限$e^{-t \wedge \zeta} u(X_{t \wedge \zeta})$就是连续$P_x$非负上鞅。因此

$$e^{-n \wedge \zeta} u(X_{n \wedge \zeta}) (\text{a.e.}\ \mathrm{d}P_x)\text{收敛}.$$

于是 $$P_x\{e^{-n \wedge \zeta} u(X_{n \wedge \zeta})\text{对}n\text{有界}\} = 1.$$

但是由定理5.9的2°可知在$\{\zeta < \infty\}$上应有

$$e^{-n \wedge \zeta} u(X_{n \wedge \zeta}) \to e^{-\zeta} u(X_\zeta) = e^{-\zeta} u(r_1) (\text{或} e^{-\zeta} u(r_2)) = \infty.$$

这是不可能的。因此$P_x(\zeta < \infty) = 0$。

其次，我们证明当$\kappa(r_1), \kappa(r_2)$不全为∞时，对任意$x \in (r_1, r_2)$

恒有$e(x)>0$。事实上，我们不妨设$\kappa(r_2)<\infty$。于是$s(r_2)<\infty$。由引理5.8推出$u(r_2)<\infty$。与上段类似地可得$e^{-t\wedge\tau[a,\beta]}\times u(X_{t\wedge\tau[a,\beta]})$是连续非负$P_x$有界鞅。设$X$初达$a$的时刻为$\tau_a$，那么

$$\tau[a,r_2]=\tau_a\wedge\zeta.$$

取$\beta=\beta_n\uparrow r_2$，由$u(r_2)<\infty$及有界收敛定理，我们得到$e^{-t\wedge(\tau_a\wedge\zeta)}\times u(X_{t\wedge(\tau_a\wedge\zeta)})$仍为非负$P_x$有界鞅。在引理5.8中取$c=a$，于是对$a<x<r_2$我们有

$$u(a)<u(x)=E_x e^{-t\wedge\tau_a\wedge\zeta}u(X_{t\wedge\tau_a\wedge\zeta})$$

$$\to E_x e^{-\tau_a\wedge\zeta}u(X_{\tau_a\wedge\zeta})$$

$$\leqslant u(a)+E_x(e^{-\zeta}u(r_2)I_{\{X_{\tau_a\wedge\zeta}=r_2\}}).$$

所以

$$E_x(e^{-\zeta}I_{\{X_{\tau_a\wedge\zeta}=r_2\}})>0.$$

由此导致

$$P_x(\zeta<\infty,\{X_{\tau_a\wedge\zeta}=r_2\})>0.$$

从而

$$e(x)=P_x(\zeta<\infty)>0.$$

定理5.11 $e(x)\equiv1$，当且仅当下面条件之一成立：

1° $\kappa(r_1),\kappa(r_2)$都有限；

2° $\kappa(r_1),\kappa(r_2)$有一个有限(设为$\kappa(r_2)<\infty$)，另一个无限($\kappa(r_1)=\infty$)，但是后者对应的$s(\cdot)$无限($s(r_1)=-\infty$)。

证明 充分性。如果1°成立，那么$s(r_1),s(r_2)$也都有限。所以命题5.2—5.4中的a,β可以分别取成r_1及r_2。于是$\tau[r_1,r_2]=\zeta$，而且$E_x\zeta<\infty$。因此$e(x)=P_x(\zeta<\infty)=1$。如果2°成立，类似地有$E_x\tau[a,r_2]<\infty$。因此$P_x(\tau[a,r_2]<\infty)=1$，又因为这时候$s(r_1)=-\infty$，$s(r_2)<\infty$。利用定理5.9的2°便得到$P_x(\inf X_t>r_1)=1$。于是对于分别首达$r_2$及$r_1+(1/n)$的时刻$\tau_{r_2}$及$\tau_{r_1+(1/n)}$就应有

$$\lim_{n\to\infty}P_x(\tau_{r_1+\frac{1}{n}}>\tau_{r_2})=\lim_{n\to\infty}\frac{s(x)-s\left(r_1+\frac{1}{n}\right)}{s(r_2)-s\left(r_1+\frac{1}{n}\right)}=1.$$

所以$\zeta=\tau[r_1,r_2]=\tau_{r_2}$(a.e.$\mathrm{d}P_x$)。因此

$$e(x)=P_x(\zeta<\infty)=P_x(\tau_{r_2}<\infty)$$

$$\geqslant P_x\left(\bigcup_n\{\tau_{r_1+\frac{1}{n}}>\tau_{r_2}\}\right)=1.$$

必要性．用反证法．如果1°,2°无一满足，则无非有两种可能：

若$\kappa(r_1)$与$\kappa(r_2)$均无限，则由定理5.9便得$e(x)\equiv0$．这与假定$e(x)\equiv1$矛盾．

若$\kappa(r_1)$，$\kappa(r_2)$之中有一个有限(例如$\kappa(r_2)<\infty$)，而另一个满足$\kappa(r_1)=\infty$，$s(r_1)>-\infty$，则由定理5.9的2°之②，$P_x(X_\zeta=r_1)>0$．仿照定理5.10证明的第一段可得到在$\{\zeta<\infty\}$上$e^{-\zeta}u(X_\zeta)$为有限．但是在$X_\zeta=r_1$上$u(r_1)\geqslant\kappa(r_1)=\infty$，所以$P_x(\zeta<\infty,X_\zeta=r_1)=0$．于是

$$e(x)=P_x(\zeta<\infty)=P_x(\zeta<\infty,X_\zeta=r_2)$$

$$\leqslant P_x(X_\zeta=r_2)=1-P_x(X_\zeta=r_1)<1.$$

这与假设$e(x)\equiv1$也是矛盾的．

定义5.5 边点r_2(相应地r_1)称为(Skorohod)自然边界点，如果$s(r_2)=\infty$(相应地$s(r_1)=-\infty$)；称为吸引边界点，如果$s(r_2)<\infty$，$\kappa(r_2)=\infty$(相应地$s(r_1)>-\infty,\kappa(r_1)=\infty$)．

由定理5.9的1°及2°之②可知，X不论在有限时间或无限时间都以概率为1地不能到达(绝不可达)自然边界点．

定理5.12 若r_2是吸引边界点，则对于$\forall x\in(a,r_2)(a>r_1)$有

1° $P_x(\tau[a,r_2]<\infty,X_{\tau[a,r_2]}=r_2)=0$； (5.42)

2° 在$\tau[a,r_2]=\infty$上有$\lim_{t\to\infty}X_t=r_2$．

这就是说，不论什么情形，X_t在有限时间均以概率为1地不能到达吸引边界点。

证明 简记$\tau=\tau[a,r_2]$。对1°用反证法。如果(5.42)不满足，即等式左方为正，那么存在$x\in(a,r_2)$，C_1及$\delta_1>0$使

$$P_x(\tau\leqslant C_1,X_\tau=r_2)\geqslant\delta_1. \tag{5.43}$$

对于$x<y<r_2$及任意$C\geqslant C_1$，对初达y的时刻τ_y用强马氏性，我们便得到

$$\begin{aligned}
\delta_1&\leqslant P_x(\tau\leqslant C_1,X_\tau=r_2)\\
&=E_x(P_x(\tau\leqslant C_1,X_\tau=r_2)\mid\mathscr{F}_{\tau_y})\\
&=E_x(P_x[\tau_y+\theta_{\tau_y}\tau\leqslant C_1,\theta_{\tau_y}X_\tau=r_2\mid\mathscr{F}_{\tau_y}])\\
&\leqslant E_x(P_x[\theta_{\tau_y}\tau\leqslant C_1,\theta_{\tau_y}X_\tau=r_2\mid\mathscr{F}_{\tau_y}])\\
&=E_x(P_{X_{\tau_y}}(\tau\leqslant C_1,X_\tau=r_2))\\
&=P_y(\tau\leqslant C_1,X_\tau=r_2)\\
&\leqslant P_y(\tau\leqslant C_1)\leqslant P_y(\tau\leqslant C).
\end{aligned} \tag{5.44}$$

对于$a\leqslant y\leqslant x$及$C_1,C_2>0$，我们有相应的估计：

$$\begin{aligned}
&P_y(\tau\leqslant C_1+C_2)\\
&\quad\geqslant P_y(\tau[a,x]\leqslant C_2,\tau(\theta_{\tau[a,x]}w)\leqslant C_1)\\
&\quad=E_y(I_{\tau[a,x]}\leqslant C_2,P_y[\tau(\theta_{\tau[a,x]}w)\leqslant C_1\mid\mathscr{F}_{\tau[a,x]}])\\
&\quad=E_y(I_{\tau[a,x]}\leqslant C_2,P_{X_{\tau[a,x]}}(\tau\leqslant C_1)).
\end{aligned}$$

又因为$P_a(\tau\leqslant C_1)=1$，所以

$$P_{X_{\tau[a,x]}}(\tau\leqslant C_1)\geqslant P_x(\tau\leqslant C_1).$$

再利用(5.43)及Chebyshev不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
P_y(\tau\leqslant C_1+C_2)&\geqslant E_y(I_{\tau[a,x]}\leqslant C_2,P_x(\tau\leqslant C_1))\\
&=P_x(\tau\leqslant C_1)P_y(\tau[a,x]\leqslant C_2)\\
&\geqslant\delta\left(1-\frac{E_y\tau[a,x]}{C_2}\right)
\end{aligned}$$

$$\geqslant \delta_1\left(1-\frac{\max\limits_{a<y<x} E_y\tau[a,x]}{C_2}\right) \xlongequal{\text{记成}} \delta > 0. \qquad (5.45)$$

取$C=C_1+C_2$，并把(5.44),(5.45)结合起来推得

$$P_y(\tau\leqslant C)\geqslant\delta.$$

于是

$$\begin{aligned}P_x(\tau>2C)&=P_x(\tau>C,\theta_C\tau>C)\\&=E_x[I_{(\tau>C)}P_x(\theta_C\tau>C|\mathscr{F}_C)]\\&=E_x[I_{(\tau>C)}P_{x_C}(\tau>C)]\\&\leqslant(1-\delta)E_xI_{(\tau>C)}\leqslant(1-\delta)^2.\end{aligned}$$

用归纳法立得

$$P_x(\tau>kC)\leqslant(1-\delta)^k.$$

因此

$$\begin{aligned}E_x\tau&\leqslant\sum_k(k+1)CP_x(kC<\tau\leqslant(k+1)C)\\&\leqslant C\sum_k(k+1)(1-\delta)^k<\infty.\end{aligned}$$

由引理5.7立刻推得$\kappa(r_2)<\infty$。这与假定r_2是吸引边界相矛盾，所以1°成立。

现在我们来证明2°。因为r_2是吸引边界点，所以$s(r_2)<\infty$，$\kappa(r_2)=\infty$。当$a<x<r_2$时，如果把a也看成是“边界点”，那么$|s(a)|<\infty$。于是由定理5.9推出$\lim\limits_{t\uparrow\tau[a,r_2]}X_t$(a.e.$dP_x$)存在。令$\Omega_0=\{\omega:\ \tau_{[a,r_2]}=\infty\}$。那么在$\Omega_0$上a.e.$dP_x$地必有$X_t\to r_2(t\to\tau[a,r_2])$。事实上，如果情况相反，就存在$\Omega_0$的正概率子集$\Lambda$，在$\Lambda$上$X_t\to a$(当$t\uparrow\tau[a,r_2]$时)。取$\beta$使$a<\beta<r_2$。由于$E_x\tau[a,\beta]<\infty$，当然就有$\tau[a,\beta]<\infty$(a.e.$dP_x$)。但是在$\Lambda$上应该有$\tau[a,r_2]=\tau[a,\beta]$，于是在$\Lambda$上有$\tau[a,r_2]<\infty$(a.e.$dP_x$)。这和$\Lambda\subset\Omega_0$矛盾。定理得证。

如果过程X_t的轨道到达边界后，并不停留在边界上(这时X

不再取值于$\hat{W}$了),能不能加些条件使它保持马氏性质且重返(r_1, r_2)呢?

我们称$\{X_t: (t<\zeta)\}$为最小A扩散过程,并用一个专门的记号X_t^0来代替它。我们要寻找使X_t^0从边界点能连续地返回(r_1, r_2)的条件。在返回(r_1, r_2)后当然还让它按原来的概率方式运动。下面我们要给从边界点r_2(或r_1)"连续地返回内部"(也称"弹性返回"或从边界"流入")以一个较为确切的含义。设$X^{(a,\varepsilon)}$($a<r_2-\varepsilon$)为方程

$$X_t=(r_2-\varepsilon)+\int_0^t\sigma(X_s)\mathrm{d}B_s+\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$$

在相空间(a, r_2)的解,设其爆炸时刻为τ_0(依赖于ε与a)。让$X^{(a,\varepsilon)}$局限在$0\leqslant t<\tau_0$上。在$t=\tau_0$时,我们补充定义(但是并不连续)

$$\begin{cases}X_{\tau_0}^{(a,\varepsilon)}=r_2-\varepsilon,\\ \tilde{B}_t=(B_{t+\tau_0}-B_t)I_{\tau_0<\infty}.\end{cases}$$

于是$\tilde{B}$也是Brown运动(关于$\mathscr{F}_{t+\tau_0}$)。令$\tilde{X}_t$为方程

$$Y_t=X_{\tau_0}+\int_0^t\sigma(Y_s)\mathrm{d}\tilde{B}_s+\int_0^t b(Y_s)\mathrm{d}s$$

在相空间(a, r_2)的解,设其爆炸时刻为τ_1。我们补充定义$X_t^{(a,\varepsilon)}$:

$$X_{\tau_0+t}^{(a,\varepsilon)}=\tilde{X}_t,\quad 0\leqslant t<\tau_1.$$

于是$X_t^{(a,\varepsilon)}$在$[0, \tau_0+\tau_1)$有定义。记

$$\zeta_1=\tau_0+\tau_1.$$

现在我们用ζ_1代替τ_0,重复上面的步骤,得到相应的"$\tilde{X}_t$"。设其爆炸时刻为$\tau_2, \cdots$,这样我们就得到了一串$\tau_0, \tau_1, \cdots$,及$\zeta_k=\tau_0+\tau_1+\cdots+\tau_k$。由SDE$(\sigma(\cdot), b(\cdot))$解的轨道唯一性可推出$\tau_k$只依赖$(B_{t+\zeta_k}-B_{\zeta_k})I_{\zeta_k<\infty}$及初值$r_2-\varepsilon$,而且是它们的确定的泛函:$\tau_k=\Phi((B_{\cdot+\zeta_k}-B_{\zeta_k})I_{\zeta_k<\infty}, r_2-\varepsilon)$($\Phi(w, x)$是$w\in\hat{W}$的泛函)。因此$\{\tau_k\}$是独立同分布列,从而$\zeta_k\to\infty$(a.e. $\mathrm{d}P_{r_2-\varepsilon}$)。

这样 $X_t^{(a,\varepsilon)}$ 可以一直修改定义到 $0\leqslant t<\infty$，成为 $[0,\infty)$ 上右连续过程。

定义5.6 设 $\kappa(r_2)<\infty$。我们称最小过程 X_t^0 能自 r_2 连续返回(或流入) (r_1,r_2)，如果存在 $\delta>0, T>0$，使对于任意 $\varepsilon>0$ 恒有

$$P_{r_2-\varepsilon}(X_t^{(a,\varepsilon)}\text{在}[0,T]\text{内击中 } a)\geqslant\delta$$

(即对 ε 一致地正)。

定理5.13 设 $\kappa(r_2)<\infty$。那么最小过程 X_t^0 能自 r_2 连续返回 (r_1,r_2)，当且仅当它的标准测度满足 $m(r_2)<\infty$。

证明 如上段一样，用 ζ_k 记 $X_t^{(a,\varepsilon)}$ 第 k 次击中"边界" $\{a,r_2\}$ 的时刻，并令 $\zeta_0=0$。正如前面所叙述的那样，

$$\tau_k=\zeta_{k+1}-\zeta_k \tag{5.46}$$

是 i.i.d 的(独立同分布的)。同样集合列 $\{X_{\zeta_k-}^{(a,\varepsilon)}=a\}$ 也是 i.i.d 的。但是由 $s(r_2)<\infty$，定理5.9及命题5.3，我们有

$$\begin{cases} P_{r_2-\varepsilon}(X_{\zeta_k-}^{(a,\varepsilon)}=a)=\dfrac{s(r_2)-s(r_2-\varepsilon)}{s(r_2)-s(a)}, & (5.47)\\ E_{r_2-\varepsilon}\tau_k=(S1)(r_2-\varepsilon)\overset{\text{记成}}{=\!=}V(r_2-\varepsilon). & (5.48)\end{cases}$$

于是

$$P_{r_2-\varepsilon}(X_t^{(a,\varepsilon)}\text{在 } 0\leqslant t\leqslant\zeta_n \text{ 上击中 } a)$$

$$=1-\left[1-\frac{s(r_2)-s(r_2-\varepsilon)}{s(r_2)-s(a)}\right]^n.$$

当 a 固定但是又与 r_2 充分近时，由定理5.9及已给假定 $\kappa(r_2)<\infty$，我们得到

$$V(r_2-\varepsilon)=(S1)(r_2-\varepsilon)$$

$$=\frac{s(r_2)-s(r_2-\varepsilon)}{s(r_2)-s(a)}\int_a^{r_2-\varepsilon}(s(y)-s(a))m(dy)$$

$$+\frac{s(r_2-\varepsilon)-s(a)}{s(r_2)-s(a)}\int_{r_2-\varepsilon}^{r_2}(s(r_2)-s(y))m(dy)$$

$$\to 0\quad(\varepsilon\downarrow 0).$$

所以其倒数的整数部分

$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{V(r_2-\varepsilon)}\right] \to \infty \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

记依赖于 ε, a 的事件 A_T 为

$$A_T = \{X_t^{(a,\varepsilon)} \text{在}[0,T]\text{内击中 } a\}.$$

于是

$$P_{r_2-\varepsilon}(A_T) = P_{r_2-\varepsilon}(A_T, T\leqslant \zeta_{n_\varepsilon}) + P_{r_2-\varepsilon}(A_T, T>\zeta_{n_\varepsilon})$$

$$\leqslant P_{r_2-\varepsilon}(A_{\zeta_{n_\varepsilon}}) + P_{r_2-\varepsilon}(T>\zeta_{n_\varepsilon});$$

$$P_{r_2-\varepsilon}(A_T) \geqslant P_{r_2-\varepsilon}(A_T, T>\zeta_{n_\varepsilon})$$

$$\geqslant P_{r_2-\varepsilon}(A_{\zeta_{n_\varepsilon}}, T>\zeta_{n_\varepsilon})$$

$$= P_{r_2-\varepsilon}(A_{\zeta_{n_\varepsilon}}) - P_{r_2-\varepsilon}(T>\zeta_{n_\varepsilon}).$$

但是 $\zeta_{n_\varepsilon} \to \infty (\text{a.e.d}P_{r_2-\varepsilon})$，所以当 T 固定时，$P_{r_2-\varepsilon}(T>\zeta_{n_\varepsilon}) \to 0 (\varepsilon \to 0)$。因此当 T 固定时有

$$\text{“}P_{r_2-\varepsilon}(A_T)\text{对 }\varepsilon\text{一致正”} \Longleftrightarrow \text{“}P_{r_2-\varepsilon}(A_{\zeta_{n_\varepsilon}})\text{对 }\varepsilon\text{ 一致正”}$$

$$\Longleftrightarrow \text{“}1-\left[1-\frac{s(r_2)-s(r_2-\varepsilon)}{s(r_2)-s(a)}\right]^{n_\varepsilon}\text{对 }\varepsilon\text{ 一致正”}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\left[1-\frac{s(r_2)-s(r_2-\varepsilon)}{s(r_2)-s(a)}\right]^{n_\varepsilon} < 1$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\left[1-\frac{n_\varepsilon(s(r_2)-s(r_2-\varepsilon))}{s(r_2)-s(a)}\right] < 1$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} n_\varepsilon(s(r_2)-s(r_2-\varepsilon)) > 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V(r_2-\varepsilon)}{s(r_2)-s(r_2-\varepsilon)} < \infty$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to r_2}\frac{V'(x)}{s'(x)} < \infty \Longleftrightarrow z(r_2) < \infty,$$

其中

$$z(x)=-\frac{V'(x)}{s'(x)}.$$

根据命题5.4我们应该有 $aV''+bV'=-1$，所以

$$z'=-\frac{V''s'-V's''}{s'^2}=-\frac{aV''s'-aV's''}{as'^2}$$

$$=-\frac{aV''+bV'}{as'}=\frac{1}{as'}.$$

于是 $z(x)\uparrow$，而且

$$z(x)=\int_c^x\frac{1}{(as')(y)}\mathrm{d}y+C_1=m[c,x]+C_1.$$

从而得到

$$z(r_2)<\infty\Longleftrightarrow m[c,r_2]<\infty\quad(\text{即 } m(r_2)<\infty).$$

定理得证。

定义5.7 r_2称为(Skorohod)吸附边界点，如果 $\kappa(r_2)<\infty$而且 $m[c,r_2]=\infty$（对 r_1也可类似定义）。

定义5.8 r_2 称为正则边界点，如果 $\kappa(r_2)<\infty,m[c,r_2]<\infty$。

由定理5.9，定理5.12及定理5.13可知，X在有限时间以正概率能到达吸附边界点和正则边界点。但是在吸附边界点不能连续返回，在正则边界点则能连续返回(例如，过程 $\lim\limits_{s\to0}X_t^{(a,s)}$就能以正概率返回 a)。

以上的 Skorohod 关于边界点的概率分类法有明确的概率含义，我们总结如下：以 r_2为例，边界点 r_2为

自然：$s(r_2)=\infty$，r_2绝不可达(有限或无限时间)；

吸引：$s(r_2)<\infty$，$\kappa(r_2)=\infty$，r_2在有限时间不能到达；

吸附：$\kappa(r_2)<\infty$，$m[c,r_2]=\infty$，r_2在有限时间能到达，不能返回；

正则：$\kappa(r_2)<\infty$，$m[c,r_2]<\infty$，r_2在有限时间能到达，且

能返回。

注 为了与某些书上常引用的一维扩散边界点的 Feller 的分析分类法比较，这里扼要地列出 Feller 的边界分类如下：设 $A=\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$ 的形式共轭为 $A^*=\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$。对 $\forall\lambda>0$（其实只需 $\exists\lambda>0$ 就够了，即并不依赖 λ 的具体数值），如果方程

$$(\lambda-A)u=0$$

有两个线性无关且在 r_2 附近有界的解，则称 r_2 为可流出的边界点；如果方程

$$(\lambda-A^*)v=0$$

有两个线性无关且在 r_2 附近可积的解，则称 r_2 为可流入的边界点。Feller 分别称边界点 r_2 为

自然的：若 r_2 不可流出也不可流入；

流入的：若 r_2 不可流出但可流入；

流出的：若 r_2 可流出但不可流入；

正则的：若 r_2 既可流出又可流入。

Feller 证明了：

r_2 可流出 $\Longleftrightarrow \kappa(r_2)<\infty$；

r_2 可流入 $\Longleftrightarrow \hat{\kappa}(r_2)<\infty$，

其中 $\hat{\kappa}(x)$ 为在 $\kappa(x)$ 中把 $s(x)$ 与 $m(x)$ 对换位置后所得的函数。于是 Feller 的分析分类法与 Skorohod 的概率分类法之间的对应关系为：对 r_2 有

(S) 自然 $\Longleftrightarrow (F)$ 流入或“(F) 自然且 $s(r_2)=\infty$”；

(S) 吸引 $\Longleftrightarrow (F)$ 自然且 $s(r_2)<\infty$；

(S) 吸附 $\Longleftrightarrow (F)$ 流出；

(S) 正则 $\Longleftrightarrow (F)$ 正则。

根据 Feller 的上述结论可知在 r_2 为流入边界时必有

$$m[c,r_2]<\infty.$$

§5.6 例　　子

例 1(线性扩散)　考虑$(0,\infty)$上A算符：

$$Af(x)=axf''+(cx+d)f' \quad (a,c,d \text{ 常数}, a>0). \tag{5.49}$$

对应的SDE$(\sigma(\cdot),b(\cdot))$有系数

$$\sigma(x)=\sqrt{2ax},\ b(x)=cx+d. \tag{5.50}$$

它们在$(0,\infty)$均属于Lip^{loc}，所以存在轨道唯一解X，它就是A扩散。在$c<0$时称为Laguerre扩散。

现在我们有

$$s(x)=\int_1^x \exp\left\{-\int_1^y \frac{cz+d}{az}\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{e}^{c/a}\int_1^x \mathrm{e}^{-(c/a)y}y^{-d/a}\mathrm{d}y; \tag{5.51}$$

$$m[1,x]=\int_1^x \frac{\mathrm{d}y}{ays'(y)}=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-c/a}\int_1^x \mathrm{e}^{(c/a)y}y^{(d/a)-1}\mathrm{d}y; \tag{5.52}$$

$$\kappa(x)=\int_1^x m[1,y]s'(y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\int_1^x\left(\int_1^y \mathrm{e}^{(c/a)z}z^{(d/a)-1}\mathrm{d}z\right)\mathrm{e}^{-(c/a)y}y^{-d/a}\mathrm{d}y. \tag{5.53}$$

于是对于边界点0及∞有

$$s(\infty)=\infty \Longleftrightarrow c<0 \text{ 或 “} c=0 \text{ 且 } d\leqslant a\text{”};$$

$$s(0)=-\infty \Longleftrightarrow d\geqslant a.$$

$c\geqslant 0$时对$x\to\infty$用L'Hospital法则，我们得到

$$\int_0^x \mathrm{e}^{ay}y^r\mathrm{d}y \sim \begin{cases} \mathrm{e}^{ax}x^r, & a>0, \\ x^{r+1}, & a=0, r>-1, \\ \ln x, & a=0, r=-1, \\ \text{常数}, & a=0, r<-1. \end{cases}$$

因此当$x\to\infty$时

$$m[1,x]\sim\begin{cases}\text{常数}\cdot e^{(c/a)x}x^{(d/a)-1}, & c>0,\\ \text{常数}\cdot x^{d/a}, & c=0,\ \dfrac{d}{a}>0,\\ \text{常数}\cdot \ln x, & c=0,\ \dfrac{d}{a}=0.\end{cases}\tag{5.54}$$

其他情形都有 $m[1,\infty)<\infty$。所以

$$m[1,\infty)<\infty\Longleftrightarrow c<0\text{ 或 “}c=0\text{ 且 }d<0\text{”}.$$

又当 $x\to\infty$ 时

$$\kappa(x)=\begin{cases}\text{常数}\cdot\displaystyle\int_1^x y^{-1}\mathrm{d}y, & c>0,\\ \text{常数}\cdot\displaystyle\int_1^x 1\mathrm{d}y, & c=0,\ \dfrac{d}{a}>0,\\ \text{常数}\cdot\displaystyle\int_1^x y^{-d/a}\ln y\mathrm{d}y, & c=0,\ \dfrac{d}{a}=0,\\ \text{常数}\cdot\displaystyle\int_1^x y^{-d/a}\mathrm{d}y, & c=0,\ \dfrac{d}{a}<0,\\ \text{常数}\cdot\displaystyle\int_1^x e^{(|c|/a)y}y^{-d/a}\mathrm{d}y, & c<0,\end{cases}\tag{5.55}$$

因此我们恒有 $\kappa(\infty)=\infty$。

这样边界点∞为

自　　然	吸　　引
$c<0$ 或 “$c=0$ 且 $d\leqslant a$”	$c>0$ 或 “$c=0$ 且 $d>a$”

对于边界点 0，我们有

$$s(0)=-\infty\Longleftrightarrow-\frac{d}{a}\leqslant-1\Longleftrightarrow d\geqslant a;$$

$$m[0,1]=\infty\Longleftrightarrow\frac{d}{a}-1\leqslant-1\Longleftrightarrow d\leqslant 0.$$

而当 $x\to 0$ 时

$$\kappa(x)\sim\begin{cases}\text{常数}\cdot\int_1^x y^{-d/a}\ln y\mathrm{d}y, & d=0,\\ \text{常数}\cdot\int_1^x y^{-d/a}(y^{d/a}-1)\mathrm{d}y, & d\neq 0.\end{cases}\tag{5.56}$$

所以 $\kappa(0)<\infty\Longleftrightarrow -\frac{d}{a}>-1\Longleftrightarrow d<a$。于是边界点 0 为

自然	吸附	正　则
$d\geqslant a$	$d\leqslant 0$	$0<d<a$

总起来，我们得到

$$X\text{保守}\Longleftrightarrow d\geqslant a.$$

如果不把 0 看成边界点，那么我们可以考虑 $(-\infty,\infty)$ 上的算子

$$(Af)(x)=ax^+f''+(cx+d)f'\quad(x^+\equiv xI_{(x\geqslant 0)}),\tag{5.57}$$

它对应于 SDE$(\sqrt{2ax^+},\ cx+d)$。这里 $\sigma(x)=\sqrt{2ax^+}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 满足 1/2 阶 Hölder 条件，$b(x)$ 满足线性增长条件。因此按照定理 5.4，SDE$(\sqrt{2ax^+},cx+d)$ 存在轨道唯一解 X，而且是保守的。

记 SDE$(\sqrt{2ax^+},cx)$ 的零初值的解为 $X^{(1)}$。由唯一性立得 $X^{(1)}\equiv 0$。

当 $d\geqslant 0$ 时，由定理 5.6 推出，只要 $X_0\geqslant 0$，就有 $X_t\geqslant X_t^{(1)}=0$。这说明 X 可以限制到相空间 $[0,\infty)$ 上，作为相空间 $[0,\infty)$ 的保守 A 扩散。但是 $X\not\equiv 0$，所以如果 $d>0$ 且 $X_0=0$，那么 X 总以正概率进入 $(0,\infty)$。这时候恰好也对应于 $m[0,1)<\infty$（实际上是 Feller 的可流入边界，而且当 $0<d<a$ 时 0 为正则边界，在 $d\geqslant a$ 时为 Feller 流入边界）。

例 2　在 $(0,\infty)$ 上对于算符

$$Af(x)=ax^\alpha f''+bx^\beta f'\quad(a,b,\alpha,\beta\text{ 常数},\ a>0),\tag{5.58}$$

考虑 SDE$(\sqrt{2ax^{\alpha}}, bx^{\beta})$，其系数为 $\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$，所以有轨道唯一解，对应地有 A 扩散。

现在我们有

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \int_1^x \exp\left(-\int_0^y \frac{b}{a} z^{\beta-\alpha} \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \exp\left(-\frac{b}{a} \frac{y^{\beta-\alpha+1}-1}{\beta-\alpha+1}\right) \mathrm{d}y, & \beta-\alpha \neq -1, \\ \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-(b/a)\ln y} dy = \int_1^x y^{-b/a} \mathrm{d}y, & \beta-\alpha=-1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.59}
$$

当 $\beta-\alpha+1=0$ 时，

$$
s(\infty)<\infty \Longleftrightarrow \frac{b}{a}>1; \quad s(0)>-\infty \Longleftrightarrow \frac{b}{a}<1.
$$

当 $\beta-\alpha+1>0$ 时，$s(\infty)<\infty \Longleftrightarrow b>0$；而 $s(0)>-\infty$ 恒成立。

当 $\beta-\alpha+1<0$ 时，$s(\infty)=+\infty$；而 $s(0)>-\infty \Longleftrightarrow b \leqslant 0$。

其次

$$
m(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{1}{a} y^{-\alpha} \exp\left(\frac{b}{a} \frac{y^{\beta-\alpha+1}-1}{\beta-\alpha+1}\right) \mathrm{d}y, & \beta-\alpha \neq -1, \\ \displaystyle\int_1^x \frac{1}{a} y^{-(\alpha-b/a)} \mathrm{d}y, & \beta-\alpha=-1; \end{cases} \tag{5.60}
$$

$$
\kappa(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_1^x \int_1^z \frac{1}{a} y^{-\alpha} \exp\left(\frac{b}{a} \frac{y^{\beta-\alpha+1}-1}{\beta-\alpha+1}\right) \mathrm{d}y, & \\ \displaystyle\exp\left(-\frac{b}{a} \frac{z^{\beta-\alpha+1}-1}{\beta-\alpha+1}\right) \mathrm{d}z, & \beta-\alpha \neq -1, \\ \displaystyle\int_1^x \int_1^z \frac{1}{a} y^{-(\alpha-b/a)} \mathrm{d}y z^{-b/a} \mathrm{d}z, & \beta-\alpha=-1. \end{cases} \tag{5.61}
$$

于是当 $x \to \infty$ 时，我们有：当 $\beta-\alpha+1=0$ 时，

$$
\kappa(x) \sim \begin{cases} 常数 \cdot \int_1^x z^{-b/a} \mathrm{d}z, & \alpha - \frac{b}{a} > 1, \\ 常数 \cdot \int_1^x (\ln z) z^{-b/a} \mathrm{d}z, & \alpha - \frac{b}{a} = 1, \\ 常数 \cdot \int_1^x z^{-(\alpha-1)} \mathrm{d}z, & \alpha - \frac{b}{a} < 1; \end{cases} \tag{5.62}
$$

当 $\beta-\alpha+1>0$ 时，用 L'Hospital 法则在 $b\neq 0$ 时可得

$$
\begin{aligned}
&\int_1^z y^{-\alpha} \exp\left(\frac{b}{a}\,\frac{y^{\beta-\alpha+1}-1}{\beta-\alpha+1}\right)\mathrm{d}y \\
&\quad \sim 常数 \cdot z^{-\alpha-[(\beta-\alpha+1)-1]} \exp\left(\frac{b}{a}\,\frac{z^{\beta-\alpha+1}}{\beta-\alpha+1}\right) \\
&\quad \sim 常数 \cdot z^{-\beta} \exp\left(\frac{b}{a}\,\frac{z^{\beta-\alpha+1}}{\beta-\alpha+1}\right) \quad (z\to\infty).
\end{aligned} \tag{5.63}
$$

最后我们得到：在 $\beta-\alpha+1>0$ 时有下述估计

$$
\kappa(x) \sim 常数 \cdot \int_1^x z^{-\beta} \mathrm{d}z. \tag{5.64}
$$

所以边界点 ∞ 为

自然	$\beta-\alpha+1=0$ 且 $b\leqslant a$；$\beta-\alpha+1>0$ 且 $b\leqslant 0$；$\beta-\alpha+1<0$
吸引	$\beta-\alpha+1=0$，$b>a$ 且 $\alpha\leqslant 2$；$\beta-\alpha+1>0$，$b>0$ 且 $\beta\leqslant 1$
吸附	$\beta-\alpha+1=0$，$b>a$ 且 $\alpha=1+\frac{b}{a}$ $\beta-\alpha+1=0$ 且 $2<\alpha<1+\frac{b}{a}$ $\beta-\alpha+1>0$，$b>0$ 且 $\beta>1$
正则	$\beta-\alpha+1=0$，$b>a$ 且 $\alpha>1+\frac{b}{a}$

在 $x\to 0$ 时我们有：当 $\beta-\alpha+1=0$ 时，则

$$
\kappa(x) \sim \begin{cases} 常数 \cdot \int_1^x z^{-(\alpha-1)} \mathrm{d}z, & \alpha - \frac{b}{a} > 1, \\ 常数 \cdot \int_1^x z^{-b/a} \ln z \,\mathrm{d}z, & \alpha - \frac{b}{a} = 1, \\ 常数 \cdot \int_1^x z^{-b/a} \mathrm{d}z, & \alpha - \frac{b}{a} < 1, \end{cases} \tag{5.65}
$$

于是

$$\kappa(0)<\infty \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha<2, & \alpha-\dfrac{b}{a}\geq 1, \\ \dfrac{b}{a}<1, & \alpha-\dfrac{b}{a}<1, \end{cases}$$

$$m(0)>-\infty \Longleftrightarrow \alpha-\frac{b}{a}<1;$$

当 $\beta-\alpha+1>0$，或 $\beta-\alpha+1<0$ 且 $b=0$ 时，则

$$\kappa(x)\sim\begin{cases} \text{常数}\cdot\displaystyle\int_1^x \ln z\mathrm{d}z, & \alpha=1, \\ \text{常数}\cdot\displaystyle\int_1^x z^{-\alpha+1}\mathrm{d}z, & \alpha\neq 1, \end{cases} \tag{5.66}$$

于是

$$\kappa(0)<\infty \Longleftrightarrow \alpha<2,$$

此时

$$m(0)=c\int_1^0 y^{-\alpha}\mathrm{d}y>-\infty \quad (\alpha<1);$$

当 $\beta-\alpha+1<0$ 且 $b<0$ 时，由 L'Hospital 法则可得对于 $c,r>0$ 有

$$\int_1^z y^{-\alpha}\exp(cy^{-r})\mathrm{d}y\sim\text{常数}\cdot z^{(r-\alpha+1)}\exp(cz^{-r}). \tag{5.67}$$

因此对于 $-r=\beta-\alpha+1$，由（5.61）我们有

$$\kappa(x)\sim\text{常数}\cdot\int_x^1 z^{-\beta}\mathrm{d}z. \tag{5.68}$$

于是此时

$$\kappa(0)<\infty \Longleftrightarrow \beta<1$$

在 $\kappa(0)<\infty$ 下还有（当 $x\to 0$ 时）

$$m(x)\sim\text{常数}\cdot x^{-\beta}\exp\left(\frac{b}{a}\,\frac{x^{\beta-\alpha+1}}{\beta-\alpha+1}\right), \tag{5.69}$$

所以 $m(0)=-\infty$。

于是边界点 0 为

自然（S）	$\beta-\alpha+1=0$ 且 $b\geqslant a$；$\beta-\alpha+1<0$ 且 $b>0$
吸　　引	$\beta-\alpha+1=0$，$b<a$ 且 $\alpha\geqslant 2$；$\beta-\alpha+1<0$，$b=0$ 且 $\alpha\geqslant 2$ $\beta-\alpha+1<0$，$b<0$，且 $\beta\geqslant 1$；$\beta-\alpha+1>0$ 且 $\alpha\geqslant 2$
吸　　附	$\beta-\alpha+1=0$，且 $1+\frac{b}{a}\leqslant\alpha<2$；$\beta-\alpha+1<0$，$b=0$ 且 $1\leqslant\alpha<2$ $\beta-\alpha+1<0$，$b<0$ 且 $\beta<1$；$\beta-\alpha+1>0$ 且 $1\leqslant\alpha<2$
正　　则	$\beta-\alpha+1=0$ 且 $\alpha<1+\frac{b}{a}<2$；$\beta-\alpha+1<0$，$b=0$ 且 $\alpha<1$ $\beta-\alpha+1>0$，$\alpha<1$

当然，在（S）自然中也还可以分出（F）自然与流入边界两种。

特例：

1° $(\alpha=\beta=0)Af=af''+bf'$。$\infty$自然（Skorohod）$(b\leqslant 0)$；吸引$(b>0)$，0 正则。

2° $(b>0,\alpha=0)$ $Af=af''+bx^{\beta}f'$。　　(5.70)

		∞	0
$\beta>1$		吸附	正则
$-1<\beta\leqslant 1$		吸引	正则
$\beta=-1$	$b<a$	自然（S）	正则
	$b=a$	自然（S）	自然（S）
	$b>a$	吸引	自然（S）
$\beta<-1$		自然（S）	自然（S）

3° $(b<0,\alpha=0)$ $Af=af''+bx^{\beta}f'$。　　(5.71)

∞是自然(S)。当 $\beta>-1$，或 $\beta=-1$ 且 $a>|b|$时，0 为正则；当 $\beta=-1$ 且 $a\leqslant|b|$，或 $\beta<-1$ 时，0 为吸附。

这里 af'' 相当于 Brown 运动（标准 Brown 运动的 $a=1/2$），而 bx^{β} 相当于相对于 Brown 运动的漂移。由 3°可以直观地看出，

对点 0 如果向左($b<0$)的相对漂移$|b|x^{\beta}$非常大，那么 0 是吸附(流出边界)，不然就是正则边界。由 2° 看出如果向右($b>0$ 时)的相对漂移 bx^{β} 非常大，那么 0 是自然边界，而且不管 a,b,β 是什么值，由 2° 可知决不会出现 0 是吸引边界的情况(注意 $\alpha=0$)。在 $b>0$ 时也不会出现 0 是吸附边界的情况。因此如果向右的相对漂移不够大时，0 是正则边界。也就是：对于

$$Af = af'' + bx^{\beta}f,$$

当 $b<0$ 时，0 点为吸附或正则；而 $b>0$ 时，0 点为自然或正则；当 $b=0$ 时，0 点为正则的。

而在∞处，向右的相对漂移不够大时就是自然边界，相当大时就是吸引边界。只有增大到比幂函数更快时才有可能变成吸附边界，例如当 $b(x)=e^{x}$ 时也是这种情形。能否给出 $b(x)$ 在∞的估计使∞成为正则边界，这是一个纯粹的数学分析问题。

在例 2 中如果 $\alpha=0,\beta$ 为非负整数，还可以考虑$(-\infty,\infty)$上的问题。这时边界点$-\infty$的分类可以利用对称性从例 2 中的 2°,3° 得到。

例 3(Bessel 随机微分方程与 Bessel 扩散) 考虑例 1 的特例：$Af=2xf''+\alpha f'$，即

$$a=2,\ c=0,\ d=\alpha\geqslant 0.$$

对应地考虑 SDE($2\sqrt{x},\alpha$)。于是∞为自然(当 $\alpha\leqslant 2$)；吸引($\alpha>2$)；0 为自然($\alpha\geqslant 2$)；正则($0<\alpha<2$)；吸附($\alpha=0$)。

设 SDE($2\sqrt{x},\alpha$) 的初值为 X_0 的解为X。令 $F(x)=\sqrt{x}$。于是 $F'=1/2\sqrt{x}$，$F''=-1/4x\sqrt{x}$。对 $Y_t=\sqrt{X_t}=F(X_t)$用 Ito 公式得

$$\begin{aligned} dY_t = dF(X_t) &= dB_t + \frac{\alpha-1}{2\sqrt{X_t}}dt \\ &= dB_t + \frac{\alpha-1}{2Y_t}dt, \end{aligned} \tag{5.72}$$

即 Y_t 满足 SDE$(1,(\alpha-1)/2x)$，它称为 α 阶 Bessel 随机微分方程。与它对应的扩散称为Bessel扩散(或 Bessel 过程)。这里

$$Af=\frac{1}{2}f''+\frac{\alpha-1}{2x}f'. \qquad (5.73)$$

由例 2 可知，在$(0,\infty)$上考虑(5.73)时，边界点 ∞ 当 $\alpha\leqslant 2$ 时自然；当 $\alpha>2$ 时吸引。边界点0当 $\alpha\geqslant 2$ 时为自然；当 $0<\alpha<2$ 时正则；当 $\alpha=0$ 时吸附。

设 B 为 m 维 Brown 运动，其分量为 $B^{(k)}(k=1,\cdots,m)$。令

$$X_t\equiv F(B_t^{(1)},\cdots,B_t^{(m)})=|B_t|^2 \quad (R_m \text{ 中模}).$$

由于 $P(B_s=0)=0$，所以

$$\frac{B_s^{(k)}}{|B_s|}=\frac{B_s^{(k)}}{|B_s|}I_{\{|B_s|\neq 0\}} \qquad (\text{a.e.d}P).$$

于是用Ito公式后我们就有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t=\mathrm{d}F(B_t)&=2\sum_{k=1}^{m}B_t^{(k)}\mathrm{d}B_t^{(k)}+m\mathrm{d}t\\
&=2|B_t|\mathrm{d}\left(\int_0^t\sum_{k=1}^{m}\frac{B_s^{(k)}}{|B_s|}\mathrm{d}B_s^{(k)}\right)+m\mathrm{d}t\\
&=2|B_t|\mathrm{d}\tilde{B}_t+m\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{B}_t=\int_0^t\sum_{k=1}^{m}\frac{B_s^{(k)}}{|B_s|}\mathrm{d}B_s^{(k)},$$

$$\langle\tilde{B}\rangle_t=\int_0^t\sum_{k=1}^{m}\frac{(B_s^{(k)})^2}{|B_s|^2}\mathrm{d}s=t.$$

因此 $\tilde{B}$ 也是 Brown 运动。于是

$$\mathrm{d}X_t=2\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}\tilde{B}_t+m\mathrm{d}t.$$

即$(X,\tilde{B})$是SDE$(2\sqrt{x},m)$的解。

需要注意的是，从这里的SDE$(2\sqrt{x},m)$所确定的X与$|B|^2$稍有区别。因为0是SDE$(2\sqrt{x},m)$的边界点，所以X_t应是$|B|^2_{t\wedge\tau_0}$，其中τ_0是B击中0的时刻。但是如果把X看成为SDE$(2\sqrt{x^+},m)$的解，那么由例1最后段落的讨论可知，当$X_0\geqslant 0$时就有$X_t\geqslant 0$。这样X就与$|B|^2$无甚区别了。于是，我们有

命题5.5 1° m维Brown运动B的平方向径过程$|B|^2$是SDE$(2\sqrt{x^+},m)$的解。而$|B_{t\wedge\tau_0}|$（τ_0是B首达c的时刻）是m阶Bessel过程(但是$|B_t|$在$(0,\infty)$的性态总受Bessel方程的"管束")；

2° 当$m\geqslant 2$时，m维Brown运动在$x\neq 0$出发，击中0的概率为0。

同时，Brown运动为常返的(即对任意球S, $P_x(\sigma_s<\infty)=1$，其中σ_s是击中S的时刻)，当且仅当其向径Bessel过程为常返。

证明 只需证2°。此时0为Bessel方程的自然边界，所以绝不可达。因此$|B|^2$是取值于$(0,\infty)$的不断过程。故B_t击中0的概率为0。

为证常返性的等价条件，只需注意Brown运动击中任意球的概率与击中以原点为中心的球的概率是相等的。命题证毕。

推论 Brown运动当$d\leqslant 2$时为常返的；当$d\geqslant 3$时为瞬时的(即对任意x, $P_x(|B_t|\to\infty)=1$)。

证明 由命题5.5及定理5.9即得。

直观地我们可以想到，一个m阶和另一个n阶的独立Bessel过程的平方和的开根应是$m+n$维Brown运动的"绝对值"，因而是$m+n$阶Bessel过程。这就是：

命题5.6 设$Y^{(1)},Y^{(2)}$分别为独立的a_1,a_2阶Bessel过程，则$Y=\sqrt{(Y^{(1)})^2+(Y^{(2)})^2}$为$a_1+a_2$阶Bessel过程。

证明 令

$$Y^{(i)} = \mathrm{d}B^{(i)} + \frac{a_i - 1}{2Y^{(i)}}\mathrm{d}t,$$

$$F(x_1 x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

于是 $F'_{x_i} = \frac{x_i}{F}$，$F''_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{F^{3/2}}$。由 Ito 公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= \mathrm{d}F(Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}) \\
&= \frac{Y_t^{(1)}\mathrm{d}B_t^{(1)} + Y_t^{(2)}\mathrm{d}B_t^{(2)}}{\sqrt{(Y_t^{(1)})^2 + (Y_t^{(2)})^2}} + \frac{a_1 + a_2 - 1}{2\sqrt{(Y_t^{(1)})^2 + (Y_t^{(2)})^2}}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{记}}{=} \mathrm{d}\tilde{B}_t + \frac{a_1 + a_2 - 1}{2Y_t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由于

$$\langle \tilde{B} \rangle_t = \int_0^t \frac{(Y_s^{(1)})^2\mathrm{d}s + (Y_s^{(2)})^2\mathrm{d}s}{(Y_s^{(1)})^2 + (Y_s^{(2)})^2} = t,$$

$\tilde{B}$ 是 Brown 运动。按定义 Y 是 $a_1 + a_2$ 阶 Bessel 过程。

§5.7 Brown 桥

本节也适合于多维。

定义5.9 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$上连续过程$X_t(0 \leqslant t \leqslant T_1)$称为$[0, T_1]$-Brown 桥，如果它的分布为 $P^W(A \mid w_{T_1} = 0)$，其中 P^W 为 Wiener 测度，即

$$P(X_\cdot \in A) = P^W(A \mid w_{T_1} = 0) \quad (\forall\, A \in \mathscr{B}_{T_1}(W^d)).$$

命题5.7 连续过程 $X_t(0 \leqslant t \leqslant T_1)$为$[0, T_1]$上 Brown 桥，当且仅当其有限维分布为：对 $0 < t_1 < \cdots < t_n < T_1$，有

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_1} < a_1, \cdots, X_{t_n} < a_n) \\
&= \frac{1}{b(T_1, 0, 0)} \int_{-\infty}^{a_n} \cdots \int_{-\infty}^{a_1} b(t_1, 0, x_1) b(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots \\
&\quad \times (b(T_1 - t_n, x_n, 0)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,
\end{aligned} \tag{5.74}$$

其中 $b(t,x,y)$ 是 Brown 运动的转移密度。

Brown 桥也可以由测度扩张得到：记

$C_{0,0}[0,T_1] = \{w: w=(w_t)_{t\geq 0}, w_t$ 连续，$w_0 = w_{T_1} = 0\}$。

由(5.74)定义测度，再扩张至 $\mathscr{B}(C_{0,0}[0,T_1])$ 上得测度 P。于是坐标过程在 P 下是 $[0,T_1]$ 上 Brown 桥。

由于我们对 Brown 桥只要求是以(5.74)为有限维分布的连续过程，所以它可以有许多不同形式的表达方式。

首先，由 Brown 桥的定义，它是期望为 0 的 Gauss 过程。所以它的分布由相关函数 $EX_sX_t(0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1)$ 唯一确定。其次，由(5.74)我们可求出 $[0,T_1]$ 上 Brown 桥 $B^{(T_1)}$ 的均值及相关函数

$$\begin{cases} EB_t^{(T_1)} = 0, \\ EB_s^{(T_1)}B_t^{(T_1)} = s\wedge t - \dfrac{st}{T_1}. \end{cases} \tag{5.75}$$

因此我们有

命题5.8 连续过程 $X_t(0\leqslant t\leqslant T_1)$ 是 Brown 桥，当且仅当 X 是参函数为 $EX_t=0$，$EX_sX_t = s\wedge t - \dfrac{st}{T_1}$ 的 Gauss 过程。

例 1（用 Brown 运动表示 Brown 桥） 设 B 为 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，那么

$$B_t^{(T_1)} = (B_t - B_0) - \frac{t}{T_1}(B_{T_1} - B_0) \tag{5.76}$$

是一个 Brown 桥，而且 $B^{(T_1)}$ 与 $\{B_0, B_{T_1}\}$ 独立。

事实上

$$B_t^{(T_1)} = B_t - \left[\left(1 - \frac{t}{T_1}\right)B_0 + \frac{t}{T_1}B_{T_1}\right]$$

$$= B_t - E(B_t | B_0, B_{T_1}),$$

因此 $E(B_t^{(T_1)}B_0) = E(B_t^{(T_1)}B_{T_1}) = 0$。由联合 Gauss 性就推出独立性。

注意：$B_t^{(T_1)}$ 不再$(\mathscr{F}_t)$适应，而是对$(\mathscr{F}_t \vee \sigma(B_{T_1}))$适应.

例 2(用随机积分表示) 定义

$$X_t = (t - T_1)\int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{s - T_1}. \tag{5.77}$$

那么 $X_t \in \mathscr{F}_t$，而且 $X_t/(t-T_1)(t<T_1)$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅. 易算出X满足命题 5.8，因此 X 是$[0,T_1]$上 Brown 桥.

例 3(用随机微分方程来表示) 在例 2 中当 $t<T_1$ 时，X 可以看成为两个 Ito 过程的乘积. 利用 Ito 公式我们得到

$$\mathrm{d}X_t = \left(\int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{s - T_1}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t.$$

因此

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t + \frac{X_t}{t - T_1}\mathrm{d}t. \tag{5.78}$$

所以X是 $0\leqslant t<T_1$ 上 SDE$(1, x/(t-T_1))$零初值的解. 由于对任意的 $T<T_1$ 系数关于 $0\leqslant t\leqslant T$ 一致地对于 x 是 Lip 的，因此解是唯一的. 这样(5.78)就是用以表示 Brown 桥的一个随机微分方程.

命题5.9 1° Brown 桥是可逆的，意即如果 X_t 为$[0,T_1]$上 Brown 桥，那么 X_{T_1-t} 也是$[0,T_1]$上 Brown 桥；

2° 设 X_t 为$[0,T_1]$上 Brown 桥，则 $\widetilde{X}_t = X_t/(T_1-t)$ 是$[0,T_1)$上独立增量过程又是 Gauss 鞅，而且$\langle\widetilde{X}\rangle_t = t/[T_1(T_1-t)]$. 此外，$X_t$ 是马氏过程，即对于任意有界 $\mathscr{B}(R^1)$函数 f，恒有

$$E(f(X_t)|\sigma(X_u: u\leqslant s)) = E(f(X_t)|X_s).$$

证明 1°由命题 5.8 推得. 往证 2°. 由(5.75)，我们有 $E[(\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s)\widetilde{X}_s] = 0$，所以 $\widetilde{X}$ 是 Gauss 鞅，从而是独立增量的，因此也是马氏过程，而且$\langle\widetilde{X}\rangle_t = E\widetilde{X}_t^2 = t/[T_1(T_1-t)]$. 于是

$$E(f(X_t)|\sigma(X_u: u\leqslant s)) = E[f((T_1-t)\widetilde{X}_t)|\sigma(X_u: u\leqslant s)]$$

$$= E(f((T_1 - t)\tilde{X}_t) | X_s) = E(f(X_t) | X_s).$$

所以X也是马氏过程。

命题5.10 $[0, T_1]$上 Brown 桥的标准化

$$\hat{X}_t = \frac{X_t}{\sqrt{EX_t^2}}$$

的相关函数是$\{0, s, t, T_1\}$四点的交比

$$\frac{s(T_1 - t)}{t(T_1 - s)}.$$

证明 由(5.75)算得。

定义5.10 设$B_t^{(T_1)}$是任意一个$[0, T_1]$Brown 桥。我们称

$$X_t = B_t^{(T_1)} + x + \frac{t}{T_1}(y - x) \quad (0 \leqslant t \leqslant T_1) \qquad (5.79)$$

为$(x; T_1, y)$Brown 桥。

例 4

$$\begin{cases} dX_t = dB_t + \dfrac{X_t - y}{t - T_1} dt, \\ X_0 = x \end{cases}$$

的唯一解是$(x; T_1, y)$Brown 桥。

命题5.8′ $X_t (0 \leqslant t \leqslant T_1)$是$(x; T_1, y)$Brown 桥，当且仅当$X_t$是 Gauss 过程，且其均值及协方差函数为

$$EX_t = x + \frac{t}{T_1}(y - x),$$

$$E(X_t - EX_t)(X_s - EX_s) = s \wedge t - \frac{st}{T_1}.$$

命题5.9′ 1° $(x; T_1, y)$Brown 桥X_t是可逆的，意即$X_{T_1 - t}$是$(y; T_1, x)$Brown 桥；

2° $(x; T_1, y)$Brown 桥X_t是马氏过程，$\tilde{X}_t = \dfrac{X_t}{t - T_1}$是 Gauss

独立增量过程，而且$\langle \tilde{X} \rangle_t = \frac{t}{T_1(T_1 - t)}$.

命题5.11 设$f \in \mathscr{B}(W)$，那么

$$\int f(w) P_x^W(\mathrm{d}w) = \iint f(\tilde{w}) W^{x;\, t,y}(\mathrm{d}\tilde{w}) \mu_T(\mathrm{d}y),$$

其中$W^{x;\, t,y}(\mathrm{d}\tilde{w})$是$(x;t,y)$Brown桥的分布，$\mu_t(\mathrm{d}y)$是Brown运动的分布$P(B_t \in \mathrm{d}y)$，$P_x^W(\mathrm{d}w)$是初值为$x$的Brown运动的分布。

定理5.14 $X_t(0 \leqslant t \leqslant T_1)$是$(x;T_1,y)$Brown桥，当且仅当

$$B_t = \int_0^t (T_1 - s)\mathrm{d}\left(\frac{X_s - \left(x + \frac{s}{T_1}(y-x)\right)}{T_1 - s}\right)$$

是$[0,T_1)$上Brown运动，这里积分的"测度"是特征为

$$\left(\frac{1}{T_1 - t} - \frac{1}{T_1}\right)$$

的平方可积鞅。

同时，还有逆变换公式：

$$X_t = (T_1 - t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{T_1 - s} + x + \frac{t}{T_1}(y - x).$$

这个B称为Brown桥X_t上的Brown运动。

证明 由命题5.9′可知$\frac{1}{T_1 - t}\left(X_t - \left[x + \frac{t}{T_1}(y-x)\right]\right)$是特征为$\frac{1}{T_1 - t} - \frac{1}{T_1}$的Gauss鞅。因此$B_t$是$[0,T_1)$上局部平方可积鞅，而且其特征为

$$\langle B \rangle_t = \int_0^t (T_1 - s)^2 \mathrm{d}\left(\frac{1}{T_1 - s} - \frac{1}{T_1}\right) = t,$$

从而B_t是Brown运动，而且

$$X_t=(T_1-t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{T_1-s}+x+\frac{t}{T_1}(y-x).$$

证毕。

Brown 桥上的随机积分 Brown 桥可以看成取值于桥空间 $(C_{0,0}[0,T_1],\ \mathscr{B}(C_{0,0}[0,T_1]))$ 的坐标过程，对于 $\tilde{w}\in C_{0,0}[0,T_1]$，$b(\tilde{w})\in\mathscr{B}(C_{0,0}[0,T_1])$，由定理 5.14 我们可以定义 Brown 桥空间上的随机积分：取 $T_1=t$

$$\int_0^t b(\tilde{w}_s)\mathrm{d}\tilde{w}_s \equiv \int_0^t b(\tilde{w}_s)\mathrm{d}\left[(t-s)\int_0^s \frac{\mathrm{d}B_u}{t-u}\right]$$

$$=\int_0^t b(\tilde{w}_s)\mathrm{d}B_s-\int_0^t b(\tilde{w}_s)\int_0^s \frac{\mathrm{d}B_u}{t-u}\mathrm{d}s, \qquad (5.80)$$

其中 $B_u=B_u(\tilde{w})$ 是由定理 5.14 所确定的 Brown 桥 $\tilde{w}$ 上的 Brown 运动：

$$B_u(\tilde{w})=\int_0^u (t-s)\mathrm{d}\left(\frac{\tilde{w}_s}{t-s}\right).$$

应用 SDE$(1,b(\cdot))$的解的转移密度的表达式。设在$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上$X$是方程

$$X_t=X_0+B_t+\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$$

的解，其中 $b(x)$是有界 $\mathscr{B}(R^d)$函数，$\mathscr{F}_t=\overline{\mathscr{F}}_t^B$。于是$X$可看成 X_0+B 的 Girsanov 变换。即 X_t 在

$$\hat{P}(A)|_{A\in\mathscr{F}_t}\equiv E(I_A M_t)$$

下是$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，其中

$$M_t=\exp\left(-\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s)|^2\mathrm{d}s\right)$$

$$=\exp\left[-\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s)|^2\mathrm{d}s\right].$$

这里$\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}X_s$是连续半鞅的随机积分.

记$X_0=x$时X的分布为P_x,注意到在$\hat{P}$下X是Brown运动，于是对任意有界$\mathscr{B}(R^d)$函数f有

$$
\begin{aligned}
E_x f(X_t) &= \hat{E}_x(f(X_t)M_t^{-1}) \\
&= \hat{E}_x[f(X_t)\hat{E}_x(M_t^{-1}|X_t)] \\
&= \int f(y)\hat{E}_x(M_t^{-1}|X_t=y)b(t,x,y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

因此X有转移密度

$$
\begin{aligned}
p(t,x,y) &= \hat{E}_x(M_t^{-1}|X_t=y)b(t,x,y) \quad (\mathrm{a.e.d}y) \\
&= \hat{E}_x\left[\exp\left(\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s)|^2\mathrm{d}s\right)\middle| X_t=y\right] \\
&\quad \times b(t,x,y).
\end{aligned} \tag{5.81}
$$

等式(5.81)右边的条件期望直观上应是M_t^{-1}在$\hat{P}_x$下的$(x;t,y)$ Brown桥X的测度下的期望. 如果我们记这个$(x;t,y)$Brown桥为$X_s^{(t)}$，要证明

$$
\begin{aligned}
&\hat{E}_x\left[\exp\left(\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s)|^2\mathrm{d}s\right)\middle| X_t=y\right] \\
&= \hat{E}_x\exp\left(\int_0^t b(X_s^{(t)})\mathrm{d}X_s^{(t)} - \frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s^{(t)})|^2\mathrm{d}s\right).
\end{aligned} \tag{5.82}
$$

为此我们首先要定义对$X_s^{(t)}$的随机积分，这里$X_s^{(t)}$取(5.76)的表示:

$$
X_s^{(t)} = X_s - X_0 - \frac{s}{t}(X_t - X_0) + x + \frac{s}{t}(y-x). \tag{5.83}
$$

当X_0代x时就有

$$
X_s^{(t)} = X_s + \frac{s}{t}(y - X_t).
$$

令

$$\hat{\mathscr{F}}_s = \mathscr{F}_s^X \vee \sigma(X_t) \text{的完备化} \ (0 \leqslant s \leqslant t).$$

$X_s(0 \leqslant s \leqslant t)$对$(\hat{\mathscr{F}}_s)$不再是 Brown 运动。但是由§2.7最后一段可知它是$(\hat{\mathscr{F}}_s)$半鞅，而且存在$(\hat{\mathscr{F}}_s)$ Brown 运动 $\tilde{B}_s(0 \leqslant s \leqslant t)$使

$$X_s = \tilde{B}_s + \int_0^s \frac{X_t - X_u}{t-u} \mathrm{d}u.$$

因此，由(5.83)我们有

$$X_s^{(t)} = \tilde{B}_s + \int_0^s \frac{X_t - X_u}{t-u} \mathrm{d}u$$
$$+ (x - X_0) + \frac{s}{t}[y - x - (X_t - X_0)]. \qquad (5.84)$$

于是我们可以定义 Brown 桥上的积分：对 $\Phi_s(X^{(t)}) \in \mathscr{L}_2$，定义

$$\int_0^t \Phi_s(X^{(t)}) \mathrm{d}X_s^{(t)} = \int_0^t \Phi_s(X^{(t)}) \mathrm{d}\tilde{B}_s + \int_0^t \Phi_s(X^{(t)}) \frac{X_t - X_s}{t-s} \mathrm{d}s$$
$$+ \frac{(y-x) + (X_0 - X_t)}{t} \int_0^t \Phi_s(X^{(t)}) \mathrm{d}s.$$

(5.85)

现在我们来证明(5.82)。首先，对于 $\Phi_{t_k} \in \overline{\mathscr{F}}_{t_k}^X$，必然存在$(W^d, \mathscr{B}(W^d))$泛函 $F(w)$，使 $\Phi_{t_k} = F(X_{\cdot \wedge t_k})$ a.e.$\mathrm{d}P$。记$\Phi_{t_k}^{(t)} = F(X_{\cdot \wedge t_k}^{(t)})$。

设

$$\Phi_s(X) = \phi_{t_k} I_{[t_k, t_{k+1})}(s), \quad \Phi_s^{(t)} = \Phi_{t_k}^{(t)} I_{[t_k, t_{k+1})}(s).$$

利用 Brown 桥(5.76)中 $X_s^{(t)}$ 与 X_t 的独立性，我们有：对任意 $\alpha(w) \in \mathscr{B}_t(W^d)$函数，只要 $\hat{E}_x \alpha(X) < \infty$，就恒有

$$\hat{E}_x[\alpha(X) \mid X_t = y]$$
$$= \hat{E}_x\left[\alpha\left(X^{(t)} + \frac{s}{t}(X_t - y)\right) \Big| X_t = y\right]$$

$$= \hat{E}_x \alpha(X^{(t)}). \tag{5.86}$$

利用(5.85)及(5.86)，我们得到

$$\hat{E}_x\Big[\exp\Big(\sum_k \Phi^{(t)}_{t_k}(X^{(t)}_{t_{k+1}\wedge t} - X^{(t)}_{t_k\wedge t})\Big)$$

$$\times \exp\Big(-\sum_k \frac{1}{2}|\Phi^{(t)}_{t_k}|^2(t_{k+1}\wedge t - t_k\wedge t)\Big)\Big]$$

$$= \hat{E}_x\Big[\exp\Big(\sum_k \Phi_{t_k}(X_{t_{k+1}\wedge t} - X_{t_k\wedge t})\Big)$$

$$\times \exp\Big(-\sum_k \frac{1}{2}|\Phi_{t_k}|^2(t_{k+1}\wedge t - t_k\wedge t)\Big)\Big| X_t = y\Big]$$

$$= \hat{E}_x\Big[\exp\Big(\int_0^t \Phi_s(X)\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\Phi_s(X)|^2\mathrm{d}s\Big)\Big| X_t = y\Big].$$

于是类似的推理导致对于 $\Phi = \Phi_s(X) \in \mathscr{L}_0(\overline{\mathscr{F}}^X_s;\ s\leqslant t)$ 有

$$\hat{E}_x\exp\Big[\int_0^t \Phi_s(X^{(t)})\mathrm{d}X^{(t)}_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\Phi_s(X^{(t)})|^2\mathrm{d}s\Big]$$

$$= \hat{E}_x\Big(\exp\Big[\int_0^t \Phi_s(X)\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\Phi_s(X)|^2\mathrm{d}s\Big]\Big\| X_t = y\Big).$$

一般如果 $\Phi_s = b(X_s)$，其中 $b(x)$ 是有界连续函数，那么 $\Phi \in \mathscr{L}_2(\overline{\mathscr{F}}^X_s;\ s\leqslant t)$，而且 $|\Phi|\leqslant$ 某个 M。同时存在

$$\Phi^{(n)}_s = \sum_k b(X_{t^{(n)}_k}) I_{(t^{(n)}_k, t^{(n)}_{k+1}]}(s) \in \mathscr{L}_0(\overline{\mathscr{F}}^X_s;\ 0\leqslant s\leqslant t),$$

使 $|\Phi^{(n)}|\leqslant M$，并且

$$\int_0^t \hat{E}_x|\Phi^{(n)}_s - \Phi_s|^2\mathrm{d}s \to 0 \quad (n\to\infty).$$

于是

$$\int_0^t \Phi^{(n)}_s\mathrm{d}X_s \xrightarrow{L^2} \int_0^t \Phi_s\mathrm{d}X_s;\qquad \int_0^t |\Phi^{(n)}_s|^2\mathrm{d}s \xrightarrow{p} \int_0^t |\Phi_s|^2\mathrm{d}s.$$

因而可取适当的子列(不妨设就是 $\Phi^{(n)}$ 自己)使上述收敛均为 a.e. dP_x 收敛。由定理 1.5 的证明可知 $\exists\,\delta>0$，使

$$z_t^{(n)} \equiv \exp\left[\int_0^t \Phi_s^{(n)} \mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\Phi_s^{(n)}|^2 \mathrm{d}s\right] \in L^{1-\delta},$$

所以它们一致可积，因此 $\hat{E}_x|z_t^{(n)} - z_t| \to 0$，其中

$$z_t = \exp\left[\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int^t |\Phi_s|^2 \mathrm{d}s\right].$$

从而

$$\hat{E}_x|\hat{E}_x(z_t^{(n)}|X_t) - \hat{E}_x(z_t|X_t)| \to 0. \qquad (5.87)$$

另一方面，由于(5.85)我们有

$$\begin{aligned}\int_0^t \Phi_s^{(n)}(X_s^{(t)})\mathrm{d}X_s^{(t)} = & \int_0^t \Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\mathrm{d}\bar{B}_s \\ & + \int_0^t \Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\frac{X_t - X_s}{t-s}\mathrm{d}s \\ & + \frac{(y-x)+(X_0 - X_t)}{t}\int_0^t \Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

这里的

$$\Phi_s^{(n)}(X^{(t)}) = \sum_k b(X_{t_k^{(n)}}^{(t)}) I_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(s)$$

有界，并 a.e.dP 收敛到 $\Phi_s(X^{(t)}) = b(X_s^{(t)})$。因此

$$\int_0^t \Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\mathrm{d}\bar{B}_s \to \int_0^t \Phi_s(X^{(t)})\mathrm{d}s\bar{B}.$$

再则，由控制收敛性，我们有

$$\begin{aligned}&\hat{E}_x\left|\int_0^t \Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\frac{X_t - X_s}{t-s}\mathrm{d}s - \int_0^t \Phi_s(X^{(t)})\frac{X_t - X_s}{t-s}\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_0^t (\hat{E}_x|\Phi_s^{(n)}(X^{(t)}) - \Phi_s(X^{(t)})|^2)^{1/2}\left(\hat{E}_x\left|\frac{X_t - X_s}{t-s}\right|^2\right)^{1/2}\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^t (\hat{E}_x|\Phi_s^{(n)}(X^{(t)}) - \Phi_s(X^{(t)})|^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s \\ &\to \int_0^t \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{t-s}}\lim_{n\to\infty}(\hat{E}_x|\Phi_s^{(n)}(X^{(t)}) - \Phi_s(X^{(t)})|^2)^{1/2}\mathrm{d}s = 0,\end{aligned}$$

以及

$$\hat{E}_x\left|\int_0^t \Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\mathrm{d}s - \int_0^t \Phi_s(X^{(t)})\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant \hat{E}_x\int_0^t |\Phi_s^{(n)}(X^{(t)}) - \Phi_s(X^{(t)})|\,\mathrm{d}s \to 0.$$

所以

$$\int_0^t \Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\mathrm{d}X_s^{(t)} \xrightarrow{p} \int_0^t \Phi_s(X^{(t)})\mathrm{d}X_s^{(t)}.$$

显然我们还有

$$\int_0^t |\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})|^2\mathrm{d}s \xrightarrow{p} \int_0^t |\Phi_s(X^{(t)})|^2\mathrm{d}s.$$

于是对于

$$\tilde{z}_t^{(n)} = \exp\left[\int_0^t \Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\mathrm{d}X^{(t)} - \frac{1}{2}\int_0^t |\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})|^2\mathrm{d}s\right],$$

及

$$\tilde{z}_t = \exp\left[\int_0^t \Phi_s(X^{(t)})\mathrm{d}X^{(t)} - \frac{1}{2}\int_0^t |\Phi_s(X^{(t)})|^2\mathrm{d}s\right].$$

就有

$$\tilde{z}_t^{(n)} \xrightarrow{p} \tilde{z}_t. \tag{5.88}$$

我们证明 $\tilde{z}_t^{(n)}$ 一致可积．为此我们估计

$$\hat{E}_x(\tilde{z}_t^{(n)})^2 = \hat{E}_x\left(\exp\left[\int_0^t 2\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\mathrm{d}X_s^{(t)}\right]\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\int_0^t |\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})|^2\mathrm{d}s\right]\right)$$

$$= \hat{E}_x\left(\exp\left[\int_0^t 2\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\left(\mathrm{d}\bar{B}_s + \left[\frac{X_t - X_s}{t-s}\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{y - X_t}{t}\right]\mathrm{d}s\right)\right]\exp\left[-\int_0^t |\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})|^2\mathrm{d}s\right]\right).$$

因为 $\hat{E}_x\exp\left[\int_0^t 4\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\mathrm{d}\bar{B}_s - 8\int_0^t |\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})|^2\mathrm{d}s\right] = 1$，利用

Schwartz 不等式便得

$$\text{上式} \leqslant \exp(6dM^2t)\left[\hat{E}_x\left(\exp\left[\int_0^t 4\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\frac{X_t - X_s}{t-s}\,\mathrm{d}s\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\exp\left[\frac{y-X_t}{t}\int_0^t 4\Phi_s^{(n)}(X^{(t)})\mathrm{d}s\right]\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \exp(6dM^2t)$$

$$\times\hat{E}_x\left(\exp\left[\int_0^t 4M\frac{|X_t - X_s|}{t-s}\,\mathrm{d}s + 4|y-X_t|M\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \text{常数}\cdot\left(\hat{E}_x\exp\left[\int_0^t 4M\frac{1}{t-s}\left(2|t-s|\ln\frac{1}{|t-s|}\right)^{1/2}\mathrm{d}s\right.\right.$$

$$\left.\left.+4|y-X_t|M\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \text{常数}\cdot\left(\hat{E}_x\exp\left[4\sqrt{2}\int_0^t M\frac{1}{\sqrt{t-s}}\sqrt{\ln\frac{1}{|t-s|}}\,\mathrm{d}s\right.\right.$$

$$\left.\left.+4M|y-X_t|\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$<\infty \quad (\text{与 } n \text{ 无关}).$$

这里用了 Levy 关于 Brown 运动增量的对数估计因此对 n 一致地 $\hat{E}_x(z_t^{(n)})^2\leqslant$常数。所以 $z_t^{(n)}$ 一致可积，于是由(5.88)我们得到

$$\hat{E}_x|z_t^{(n)} - z_t| \to 0. \qquad (5.89)$$

又因为 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{S}_0$，所以

$$\hat{E}_x z_t^{(n)} = \hat{E}_x(z_t^{(n)}|X_t = y).$$

由这个式子及(5.87)，(5.89)立刻推出

$$\hat{E}_x z_t = \hat{E}_x(z_t|X_t = y).$$

这就证明了(5.82)。我们把以上结论总结成下述定理：

定理5.15(密度的泛函表示)　对于有界 $\mathscr{B}(R^d)$ 函数 $b(x)$，方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t + b(X_t)\mathrm{d}t, \\ X_0 = x \end{cases}$$

的解 X_t 的分布有密度为

$$p(t,x,y)=b(t,x,y)\int \exp\left[\int_0^t b(w_s)\mathrm{d}w_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(w_s)|^2\mathrm{d}s\right]\times \mathscr{W}^{x;\ t,y}(\mathrm{d}w)$$

(a.e.dy)，其中 $\mathscr{W}^{x;\ t,y}(\mathrm{d}\tilde{w})$ 为 $(x;t,y)$ Brown 桥的有限维分布在空间

$$C_{x,y}[0,t]=\{\tilde{w}:\ \tilde{w}\in C[0,t],\tilde{w}_0=x,\tilde{w}_t=y\}$$

及其 σ 代数 $\mathscr{B}(C_{x,y}[0,t])$ 上引起的测度（这时被积函数在 $C[0,t]\setminus C_{x,y}[0,t]$ 上的值不影响积分，因为这个集合是 $\mathscr{W}^{x,t,y}$ 零测集）。

如果 $b(x)$ 是有界连续函数，那么 $p(t,x,y)$ 还可以直接用 Brown 桥上的随机积分的泛函积分来表达：

$$\begin{aligned}p(t,x,y)=&\ b(t,x,y)\\&\times\int \exp\left[\int_0^t b(\tilde{w}_s)\mathrm{d}\tilde{w}_s-\frac{1}{2}\int_0^t |b(\tilde{w}_s)|^2\mathrm{d}s\right]\\&\times\mathscr{W}^{x;\ t,y}(\mathrm{d}\tilde{w}),\end{aligned}$$

其中 $\int_0^t b(\tilde{w}_s)\mathrm{d}\tilde{w}_s$ 的定义由(5.85)给出，那里的 $X^{(t)}$ 应理解成这里的 $\tilde{w}$。

习　题

1．若 $g(x)$ 有界连续，X 为一维 A 扩散。试用 $s(x)$，$m(x)$ 来表示积分型泛函

$$E_x\left(\int_0^{\tau[\alpha,\beta]} g(X_s)\,\mathrm{d}s\right).$$

2．若 $b(x)=0$，X 为一维 A 扩散。求

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}E_x\tau_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}.$$

进而解释标准测度的含义。

3．求一维 A 扩散 X 在越出 $[\alpha,\beta]$ 之前在 $[\alpha_1,\beta_1](\subset[\alpha,\beta])$ 中平均停留时间

$$E_x\int_0^{\tau[\alpha_1,\beta_1]} I_{[\alpha,\beta]}(X_s)\mathrm{d}s.$$

4．求以下 A 扩散边界点的分类，边界点为 0 和 1，而

(1) $a(x)=x(1-x)$，$b(x)=r_0(1-x)-r_1x$；

(2) $a(x)=ax^2$，$b(x)=x(1-x)$。

5．设 B 为二维 Brown 运动，$B_0=x(<1)$，$\tau=\inf\{t:\ |B_t|\geqslant 1\}$。求 B_τ 的分布及 $E_x\tau$。

6．设 B 为一维Brown 运动，求证 $(1-t)B\left(\frac{t}{1-t}\right)$ 是 $[0,1]$ 上的 Brown 桥。

7．求证 $[0,1]$ 上 Brown 桥的转移密度为

$$\frac{b(t-s,x,y)h(t,y)}{h(s,x)},$$

其中 $h(t,y)=b(1-t,y,0)$。

8．若 $0<\varepsilon<a(x)\in\mathscr{B}_b(R^d)$，$(X,B)$ 是 SDE(σ,b) 的解，τ_t 是

$$\varphi_t=\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{a(X_s)}$$

的逆，则 $\left(X_{\tau_\cdot},\ \int_0^{\tau_\cdot}\frac{\mathrm{d}s}{a(X_s)}\right)$ 是 SDE$(\sqrt{a}\,\sigma,ab)$ 的解。

9．不用 Engelbert–Schmidt 理论，证明当 $0<\varepsilon<\sigma(x)$，σ，$b\in\mathscr{B}_b(R^1)$ 时，SDE(σ,b) 存在分布唯一解

10．讨论 SDE(σ,b) 的边界分类：

(1) $a=1+x^2, b=-x$；

(2) $a=\alpha x^2$，$b=1+\beta x$ $(x>0)$；

(3) $\sigma=(1+x^2), b=(1+x^2)(1+x)$。

11. 求 SDE $\left(\sqrt{1+x^2},\ \sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}x\right)$的解的明显表达式。

12. $\sigma,b\in C_b$，σ 满足(5.14)，若 $\sigma(t,x),b(t,x)$连续，对 t 一致地对 x 线性增长，σ 对 t 一致地$\in \mathrm{Lip}^{loc}$，且

$$|\sigma(t,x)|+|b(t,x)|\leqslant g(t)\in L^{loc},$$

试用 Lip^{loc} 系列单调逼近 $b(t,x)$，再用比较定理证明方程存在强解。

第六章　具有边界的随机微分方程

在区域 G 中的随机微分方程必须涉及解到达边界后的状态，它们对应于有边界的扩散现象。扩散的粒子，也就是作为解的随机过程，到达边界后按照一定的"边界规律"返回 G^0，从而把随机运动("扩散")继续下去。这就是具有边界的扩散所要描述的随机现象。

§6.1　反射Brown运动及其边界局部时

引理6.1(连续函数的 Skorohod 分解)　$[0,\infty)$上任意连续函数 $\beta(t)$ 存在唯一满足下述条件(S_1)与(S_2)的分解：$\beta(t)=\beta_1(t)-\beta_0(t)$ 满足

(S_1)　$\beta_0(t)$，$\beta_1(t)\geqslant 0$，连续；

(S_2)　$\beta_0(t)\uparrow$，$\beta_0(0)=0$，而且 $\beta_0(t)$ 只在 $\beta_1(t)=0$ 的点 t 上增加，即对于 $t_0\geqslant 0$，如果 $\beta_1(t_0)>0$，那么存在 $\varepsilon>0$ 使

$$\beta_0(t_0-\varepsilon)=\beta_0(t_0+\varepsilon),$$

或者写成等价的形式

$$\int_0^t I_{\{0\}}(\beta_1(s))\,\mathrm{d}\beta_0(s)=\beta_0(t), \tag{6.1}$$

并且这一分解可构造如下：

$$\beta_1(t)=\beta(t)+\max_{[0,t]}\beta^-(s),$$

$$\beta_0(t)=\max_{[0,t]}\beta^-(s), \tag{6.2}$$

其中 β^- 是指 β 的负部，即 $\beta^-=\max\{-\beta,0\}$。

证明　显然(6.2)对应于 $\beta(t)$ 的一个分解。我们证明(6.2)

满足(S_1)及(S_2)。(S_1)与$\beta_0(t)$的递增性是显然的。今证(S_2).设$\beta_1(t_0)>0$。那么存在$\varepsilon>0$，使$\beta_1(t)$在$[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$上恒正。因此对于在此区间上的$u$，我们有

$$\beta(u)=\beta_1(u)-\beta_0(u)>-\beta_0(u).$$

于是

$$\begin{aligned}\beta^-(u) &= -\beta(u)I_{\{\beta(u)<0\}}<\beta_0(u)I_{\{\beta(u)<0\}}\leqslant\beta_0(u)\\ &=\max_{[0,u]}\beta^-(s).\end{aligned}$$

所以

$$\beta_0(t_0+\varepsilon)=\max_{[0,t_0+\varepsilon]}\beta^-(s)=\max_{[0,t_0-\varepsilon]}\beta^-(s)=\beta_0(t_0-\varepsilon).$$

(S_2)得证。最后我们证明唯一性。设还有分解$\beta=\tilde{\beta}_1-\tilde{\beta}_0$也满足$(S_1)$，$(S_2)$。那么$\beta_1-\tilde{\beta}_1=\beta_0-\tilde{\beta}_0$。

如果存在t_0，使$\beta_1(t_0)-\tilde{\beta}_1(t_0)>0$。取$t^*$为$t_0$前满足$\beta_1(t)=\tilde{\beta}_1(t)$的时刻$t$中的最大者。显然$t^*<t_0$，而且对于$s\in(t^*,t_0]$恒有$\beta_1(s)>\tilde{\beta}_1(s)\geqslant 0$。因此由$(S_2)$推出$\beta_0(t)$在$(t^*,t_0]$上恒不增加，即$\beta_0(t^*)=\beta_0(t_0)$。这样我们就推得

$$\begin{aligned}0&<\beta_1(t_0)-\tilde{\beta}_1(t_0)=\beta_0(t_0)-\tilde{\beta}_0(t_0)\\ &\leqslant\beta_0(t^*)-\tilde{\beta}_0(t^*)=\beta_1(t^*)-\tilde{\beta}_1(t^*)=0.\end{aligned}$$

这是不可能的，所以我们必须有$\beta_1(t)\leqslant\tilde{\beta}_1(t)$。同理，由对称性推得$\tilde{\beta}_1(t)\leqslant\beta_1(t)$。因此$\beta_1(t)=\tilde{\beta}_1(t)$。

定义6.1 若B是一维$(\mathscr{F}_t)$Brown运动，X与$|B|$同分布，则称X为(关于0点的$(\mathscr{F}_t)$)反射Brown运动。

命题6.1(反射Brown运动的Skorohod分解) 若B是$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$上$(\mathscr{F}_t)$Brown运动，$X=|B|$，那么它有唯一的分解式(称为Skorohod方程)

$$X_t-X_0=\tilde{B}_t+\varphi_t, \tag{6.3}$$

其中$\tilde{B}$是零初值$(\mathscr{F}_t)$Brown运动，φ_t是零初值连续$(\mathscr{F}_t)$适应增过程，它满足

$$\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s = \varphi_t. \tag{6.4}$$

即 φ_t 只在 $X_t=0$ 的那些 t 上增长，并且对于 Brown B 在 0 处的局部时 $l(t,0)$ 有

$$\varphi_t = 2l(t,0).$$

反之，若有满足 Skorohod 方程(6.3)及(6.4)的一组($\mathscr{F}_t$)适应过程(X，$\tilde{B}$，φ)，而且 $X\geqslant 0$，那么 X 是 0 点的反射 Brown 运动。

定义6.2 满足(6.4)的零初值连续($\mathscr{F}_t$)适应增过程 φ 称为反射 Brown 运动 X 在 0 点的局部时。它是 X 在 0 点的一种"计时钟"。

命题 6.1 的证明 由 Tanaka 公式

$$X_t - X_0 = |B_t| - |B_0| = \int_0^t \operatorname{sgn}B_s \mathrm{d}B_s + 2l(0,t)$$

$$\equiv \tilde{B}_t + \varphi_t.$$

显然 $\tilde{B}$ 是($\mathscr{F}_t$)Brown 运动，同时

$$\varphi_t = 2l(0,t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(B_s)\mathrm{d}s$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I_{[0,\varepsilon)}(X_s)\mathrm{d}s \quad (\mathrm{a.e.d}P).$$

当 $\omega\in\Omega$ 固定时，因为 φ_t 是递增的，所以它定义了一个[0，∞)上的测度，记这个测度为 Φ。对此 ω，集 $\{s: X_s>0\}$ 是开集。设(α,β)为它的任意一个构成区间，于是 X_s 能在$[\alpha+(1/n), \beta-(1/n)]$上达到最小值。因为只要 ε 充分小，这个最小值大于 ε，所以

$$\Phi\left(\left[\alpha+\frac{1}{n},\ \beta-\frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\alpha+\frac{1}{n}}^{\beta-\frac{1}{n}} I_{[0,\varepsilon)}(X_s)\mathrm{d}s = 0.$$

但是 Φ 是测度，因此 $\Phi([\alpha,\beta])=0$。从而

$$\varphi_t = \Phi([0,t]) = \Phi([0,t]\cap\{s:\ X_s = 0\})$$
$$= \int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s.$$

这就得到了(6.4)。当 ω 固定时，令 $\beta(t) = X_0 + \tilde{B}_t$。于是(6.3)就是 $\beta(t)$ 的 Skorohod 分解。因此分解式(6.3)是唯一的，而且

$$\varphi_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t}(X_0 + \tilde{B}_s)^-. \tag{6.5}$$

反过来，如果$(\mathscr{F}_t)$适应过程$(X,\tilde{B},\varphi)$满足(6.3)，即

$$X_t = (X_0 + \tilde{B}_t) + \varphi_t. \tag{6.6}$$

由 Skorohod 分解的唯一解，我们有

$$\varphi_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t}(X_0 + \tilde{B}_s)^-.$$

任取一个初值为 X_0 的$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B。对反射 Brown运动$|B|$作 Skorohod 分解(6.3)，即存在$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动$\bar{B}$及满足(6.4)的增过程 $\bar{\varphi}_t$ 使

$$|B_t| = (|B_0| + \bar{B}_t) + \bar{\varphi}_t = (X_0 + \bar{B}_t) + \max_{0\leqslant s\leqslant t}(X_0 + \bar{B}_s)^-. \tag{6.6'}$$

比较(6.6′)与(6.5),(6.6)，我们便得到：X 与$|B|$同分布。命题证毕。

推论(Cely)　令 B_t^* 为 Brown 运动 B 的极大值过程：$B_t^* = \max_{s\leqslant t} B_s$，则在 P_0 下，$(B^* - B, B^*)$与$(|B|, 2l(\cdot,0))$同分布。

证明　在 P_0下，$-B$ 的 Skorohod 分解，即是$(B_t^* - B_t) + B_t^*$，与(6.3)比较即得。

§6.2　半直线上的 Brown 运动

在$(0,\infty)$上考虑方程，边界点为 $0,\infty$。如果∞为绝不可达，0 为可达，那么事实上的边界点只有 0 一点。最简单情形是反射 Brown 运动，这已在 §6.1 中讨论过。本节中还要讨论它的生成

元。

定义6.3

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t + \mathrm{d}\varphi_t \tag{6.7}$$

称为反射 Brown 运动方程(或 Skorokod 方程)。它的解是指某个$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程$(X,B,\varphi)$，要求满足：

1° B是零初值$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，$X_t\geq 0$；

2° φ_t是X在 0 点的局部时。

引理6.2 对于任意$f\in C^2$，记

$$M_t^{(f)} = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2}f''(X_s)\mathrm{d}s - \int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}\varphi_s. \tag{6.8}$$

其中φ_t是非负连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程X在 0 点的局部时。如果$M_t^{(f)},M_t^{(g)}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\mathscr{F})$，则

$$\begin{aligned}\langle M^{(f)},M^{(g)}\rangle_t &= \int_0^t\left[\frac{1}{2}(fg)'' - \frac{1}{2}(fg''+gf'')\right]_{X_s}\mathrm{d}s\\ &+\int_0^t\left[(fg)'-(fg'+f'g)\right]_{X_s}\mathrm{d}\varphi_s.\end{aligned} \tag{6.9}$$

证明 与引理 3.9 同。

命题6.2(等价定理) 下述诸断言彼此等价：

1° 反射 Brown 运动方程(6.7)有解；

2° 存在$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$，及其上的取值于$[0,\infty)$的连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程$X$及它在 0 点的局部时$\varphi_t$，使对于任意$f\in C_K^2[0,\infty)$①(或$C_0^2[0,\infty)$，或$C_b^2[0,\infty)$)，有$M_t^{(f)}$(见(6.8))$\in\mathscr{M}_2^c$；

3° 2°中$C_K^2[0,\infty)$与$\mathscr{M}_2^c$分别改为C^2与$\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$。

---

① $f'(0),f''(0)$指右导数。

证明 用 Ito 公式立得 1°⇒2°；仿定理 3.4 便得 2°⇒3°；取 $f(x)=g(x)=x$，用引理 6.2 得 $\langle M^{(f)}\rangle_t=t$。于是 $M^{(f)}$ 是$(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，记成 B。可知(X,B,φ)是(6.7)的解。

定理6.1 反射Brown 运动方程对任意初分布μ存在分布唯一解(X,B,φ)。设初值为$x\in[0,\infty)$的解在$(W(R^+),\mathscr{B}(W(R^+)))$上引起的分布为 P_x，其中

$$W(R^+)=\{w:\ 一切\ w_t\ 连续且\ w_t\geqslant 0\}.$$

那么$\{P_x:\ x\in[0,\infty)\}$是$(W(R^+),\mathscr{B}(W(R^+)))$上的强马氏族，而且

$$T_tf(x)=E_x(w_t)$$

的生成元$\mathfrak{A}$是

$$\frac{1}{2}f''\Big|_{f\in C_K^2[0,\infty),f'(0)=0}$$

的扩张。

证明 作某个$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上初值为给定 X_0 的$(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动 B，那么由命题6.1可知$(|B|,B,\varphi)$是(6.7)的解，并且分布唯一。由命题 6.2，仿照命题4.1与命题4.6可证$\{P_x:\ x\in[0,\infty)\}$是强马氏族。

对于$f\in C_b^2[0,\infty)$，$X_0=x$，由命题6.2有

$$T_tf(x)-f(x)=\int_0^t T_s\left(\frac{1}{2}f''\right)(x)\mathrm{d}s+E_x\int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}\varphi_s.$$

但是

$$\int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}\varphi_s=\int_0^t f'(X_s)I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s$$

$$=\int_0^t f'(0)I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s$$

$$=f'(0)\varphi_t;$$

$$E\varphi_t=EX_t=E|B_t|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,t.$$

所以我们有

$$\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T_s\left(\frac{1}{2}f''\right)(x)\mathrm{d}s + \sqrt{\frac{2}{\pi t}}f'(0).$$

(6.10)

可见为使左方在$t\downarrow 0$时有极限，f 必须满足"边界条件"$f'(0)=0$。

如果 $f'(0)=0$，$f\in C_b^2$ 且 f'' 一致连续，那么

$$\sup_x\left|\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} - \frac{1}{2}f''(x)\right|$$

$$\leqslant \sup_x \frac{1}{2t}\left|\int_0^t[(T_s f'')(x) - f''(x)]\mathrm{d}s\right|.$$

注意到反射 Brown 运动 X_t 有转移密度及转移算子：

$$b^+(t,x,y) = b(t,x,y) + b(t,x,-y) \quad (x,y\geqslant 0),$$

$$T_t f(x) = E_x f(X_t) = \int_0^\infty f(y) b^+(t,x,y)\mathrm{d}y,$$

而且$|f''|$有某个界K，又对于$\varepsilon>0$可取 $\delta>0$，使$|x-y|<\delta$ 时恒有$|f''(x)-f''(y)|<\varepsilon$，于是我们有

$$\sup_x\left|\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} - \frac{1}{2}f''(x)\right|$$

$$\leqslant \sup_x \frac{1}{2t}\int_0^t\int_0^{+\infty} b^+(s,x,y)\,|f''(y) - f''(x)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \sup_x \frac{1}{2t}\int_0^t\Big[\int_{\substack{|y-x|<\delta\\ y\geqslant 0}} b^+(s,x,y)\,|f''(y) - f''(x)|\,\mathrm{d}y$$

$$+ 2K\int_{\substack{|y-x|\geqslant\delta\\ y\geqslant 0}} b^+(s,x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \sup_x \frac{1}{2t}\int_0^t\left[\varepsilon + 4K\int_\delta^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{z^2}{2s}\right)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}s$$

$$\to 0 \quad (t\downarrow 0).$$

这说明

$$\mathscr{D}^* \equiv \{f:\ f\in C_b^2,\ f''\ 一致连续且\ f'(0)=0\}\subset\mathscr{D}(\mathfrak{A}),$$

而且对于 $f\in\mathscr{D}^*$ 有

$$\mathfrak{U}f=\frac{1}{2}f''.$$

当然就更有$\{f:\ f\in C_K^2[0,\infty),\ f'(0)=0\}\subset\mathscr{D}(\mathfrak{U})$。定理证毕。

注1　因为X是反射 Brown 运动，我们有更强的结论：

$$\mathscr{D}(\mathfrak{U})=\mathscr{D}^*(\equiv\{f\in C_b^2,\ f''\ \text{一致连续},\ f'(0)=0\}).$$

事实上，对于任意 $g\in\mathscr{B}([0,\infty))$，我们有

$$\begin{aligned}R_\lambda g(x)&\equiv\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_tg(x)\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)\right.\\&\qquad\left.+\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{2t}\right)\right]g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left[e^{-\sqrt{2\lambda}x}\int_0^xe^{\sqrt{2\lambda}y}\ g(y)\mathrm{d}y\right.\\&\qquad\left.+e^{\sqrt{2\lambda}x}\int_x^\infty e^{-\sqrt{2\lambda}y}g(y)\mathrm{d}y+\int_0^\infty e^{-(y+x)\sqrt{2\lambda}}\ g(y)\mathrm{d}y\right].\end{aligned}$$

记 T_t 的强连续中心为 $\mathscr{B}_0$，即

$$\mathscr{B}_0=\{f:\ \sup_x|T_tf(x)-f(x)|\to0\ \ (t\to0)\}.$$

那么 $\mathscr{D}(\mathfrak{U})=R_\lambda\mathscr{B}_0\subset C[0,\infty)$， 于是 $\mathscr{B}_0=\overline{\mathscr{D}(\mathfrak{U})}\subset C[0,\infty)$。这样$\mathscr{D}(\mathfrak{U})\subset R_\lambda C[0,\infty)$。任取 $f\in\mathscr{D}(\mathfrak{U})$，那么存在 $g\in C[0,\infty)$ 使 $f=R_\lambda g$。由前面 $R_\lambda g$ 的表达式便得

$$\begin{aligned}f'(x)=&-e^{-x\sqrt{2\lambda}}\int_0^xe^{y\sqrt{2\lambda}}\ g(y)\mathrm{d}y+\ e^{x\sqrt{2\lambda}}\int_x^\infty e^{y-\sqrt{2\lambda}}g(y)\mathrm{d}y\\&-e^{-x\sqrt{2\lambda}}\int_0^\infty e^{-y\sqrt{2\lambda}}\ g(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此 $f'(x)$有界，而且 $f'(0)=0$。同时算得

$$\frac{1}{2}f''(x)=\lambda f(x)-g(x)=\lambda R_\lambda g-g=\mathfrak{U}R_\lambda g=\mathfrak{U}f.$$

设 C_0 为$[0,\infty)$上有界一致连续函数类，那么$f\in C^0$，所以$\mathscr{D}(\mathfrak{A})\subset C^0$。由此 $\mathscr{R}_0=\overline{\mathscr{D}(\mathfrak{A})}\subset C^0$。于是$g\in\mathscr{R}_0\subset C^0$,从而$f''=2\lambda f-2g\in C^0$。所以 $\mathscr{D}(\mathfrak{A})\subset\mathscr{D}^{\#}$。

注2 设φ_t为反射 Brown 运动$|B|$在 0 点的局部时，则

$$\int_0^t I_{\{0\}}(|B_s|)\mathrm{d}s\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t I_{[0,\varepsilon]}(|B_s|)\mathrm{d}s$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}2\varepsilon\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I_{[0,\varepsilon]}(|B_s|)\mathrm{d}s=0\cdot\varphi_t=0\quad(\text{a.e. d}P)。$$

又若(X,B,φ)为反射 Brown 运动方程的解，那么

$$\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}s\quad 与\quad\int_0^t I_{\{0\}}(|B_s|)\mathrm{d}s$$

同分布，因而也是 0 。于是方程(6.7)也可写成

$$\mathrm{d}X_t=I_{(0,\infty)}(X_t)\mathrm{d}B_t+\mathrm{d}\varphi_t。\tag{6.11}$$

定义6.4 方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=I_{(0,\infty)}(X_t)\mathrm{d}B_t+\mathrm{d}\varphi_t,\\ \displaystyle\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}s=\rho\varphi_t\quad(常数\rho>0)\end{cases}\tag{6.12}$$

称为粘性(反射)Brown 运动方程。它的解是指在某个$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上满足(6.12)的一组连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程$(X,B,\varphi)$，其中 B 为$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，φ 为X在 0 点的局部时。解称为具分布唯一性，如果X有分布唯一性。

引理6.3 设X是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上非负连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程，$\varphi$ 是它在 0 点的局部时，对于任意 $f\in C^2[0,\infty)$，记

$$M_t^{(f)}=f(X_t)-f(X_0)-\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\mathrm{d}s$$

$$-\int_0^t\left(f'-\frac{\rho}{2}f''\right)(X_s)\mathrm{d}\varphi_s。\tag{6.13}$$

如果 $M_t^{(f)},M_t^{(g)}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$，则我们有

$$\langle M^{(f)}, M^{(g)}\rangle_t = \int_0^t \left[\frac{1}{2}(fg)'' - \frac{1}{2}(fg''+gf'')\right]_{X_s} ds$$

$$+\int_0^t \left((fg)' - \frac{\rho}{2}(fg)'' - \left[f\left(g' - \frac{\rho}{2}g''\right) + g\left(f' - \frac{\rho}{2}f''\right)\right]\right)_{X_s} d\varphi_s. \tag{6.14}$$

命题6.3(等价定理) 下列诸叙述彼此等价:

1° 粘性 Brown 运动方程有解;

2° 存在$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$,及其上取值于$[0,\infty)$的连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程$X$和它在0点的局部时$\varphi$,使对于任意$f\in C_K^2[0,\infty)$(或$C_0^\infty[0,\infty)$,或$C_b^2[0,\infty)$)有(由(6.13)定义的)$M_t^{(f)}\in\mathscr{M}_2^c$;

3° 2°中的$C_K^2[0,\infty)$和$\mathscr{M}_2^c$分别改成$C^2[0,\infty)$和$\mathscr{M}_2^{c,loc}$.

定理6.2 粘性 Brown 运动方程存在分布唯一解(X,B,φ),而且$\{P_x: x\in[0,\infty)\}$是$(W(R^+),\mathscr{B}(W(R^+)))$上的强马氏族,其中$P_x$定义如定理6.1. 同时

$$T_t f(x) = E_x f(X_t)$$

的生成元$\mathfrak{U}$是

$$\frac{1}{2}f''\Big|_{f\in C_K^2,\, f'(0)-\frac{\rho}{2}f''(0)=0}$$

的扩张.

证明 当$\rho=0$时它即是反射 Brown 运动方程. 以下的办法是把$\rho>0$的情形化成$\rho=0$的情形. 我们简称它为"ρ变换"方法.

首先证明存在性. 设$(\tilde{X},\tilde{B},\tilde{\varphi})$为$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},(\tilde{\mathscr{F}}_t),\tilde{P})$上反射 Brown 运动方程的解. 又设另一空间$(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{F}},(\bar{\mathscr{F}}_t),\bar{P})$上有$(\bar{\mathscr{F}}_t)$ Brown 运动$\bar{B}$. 记

$$(\Omega,\mathscr{F},P) = (\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},\tilde{P})\times(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{F}},\bar{P}),$$

令

$$A_t = t + \rho\tilde{\varphi}_t. \tag{6.15}$$

它是严格递增的$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$适应过程，所以它的反函数$\tau_t$是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$停时，而且

$$t=\tau_t+\rho\bar{\varphi}_{\tau_t}. \tag{6.15'}$$

把$\bar{X}, \tau_t$均看成为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机量。在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上定义

$$X_t=\bar{X}_{\tau_t};\quad \varphi_t=\bar{\varphi}_{\tau_t};$$

$$B_t=\bar{B}_{\tau_t}+\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}\overline{B}_s;$$

$$\mathscr{F}_t=\widetilde{\mathscr{F}}_{\tau_t}\vee\widetilde{\mathscr{F}}_t. \tag{6.16}$$

我们称以上定义的(X,B,φ)为$(\bar{X},\bar{B},\bar{\varphi})$的$\rho$变换，并记成

$$(\bar{X},\bar{B},\bar{\varphi})\xrightarrow{\rho}(X,B,\varphi).$$

为了验证B是$(\mathscr{F}_t)$Brown运动，只需注意τ_t是X在$(0,\infty)$取值的“计时钟”，即

$$\begin{aligned}\tau_t&=\int_0^{\tau_t}I_{(0,\infty)}(\bar{X}_u)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\tau_t}I_{(0,\infty)}(\bar{X}_u)\mathrm{d}u+\rho\int_0^{\tau_t}I_{(0,\infty)}(\bar{X}_u)\mathrm{d}\bar{\varphi}_u\\&=\int_0^{\tau_t}I_{(0,\infty)}(\bar{X}_u)\mathrm{d}A_u\\&=\int_0^t I_{(0,\infty)}(\bar{X}_{\tau_s})\mathrm{d}s=\int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{6.17}$$

于是由$\bar{B}$与$\overline{B}$的独立性，我们有

$$\begin{aligned}\langle B\rangle_t&=\langle\bar{B}\rangle_{\tau_t}+\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}s\\&=\tau_t+\int_0^t(1-I_{(0,\infty)}(X_s))\mathrm{d}s=t.\end{aligned}$$

因此B是$(\mathscr{F}_t)$Brown运动。

由(6.16)

$$X_t-X_0=\bar{X}_{\tau_t}-\bar{X}_0=\bar{B}_{\tau_t}+\bar{\varphi}_{\tau_t}-\bar{B}_0$$

$$= B_t - B_0 - \int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}(B_s - \tilde{B}_{\tau_s}) + \varphi_t.$$

但是，由定理6.2之注 2 我们有

$$E\left(\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}\tilde{B}_{\tau_s}\right)^2 = E\int_0^t I_{\{0\}}(\tilde{X}_{\tau_s})\mathrm{d}\tau_s$$

$$= E\int_0^{\tau_s} I_{\{0\}}(\tilde{X}_u)\mathrm{d}u = 0,$$

因此

$$X_t - X_0 = B_t - B_0 - \int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}B_s + \varphi_t$$

$$= \int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s)\mathrm{d}B_s + \varphi_t.$$

此外，由(6.17)及(6.15)，我们还有

$$\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s = \int_0^t I_{\{0\}}(\tilde{X}_{\tau_s})\,\mathrm{d}\tilde{\varphi}_{\tau_s} = \tilde{\varphi}_{\tau_t} = \varphi_t.$$

$$\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}s = \int_0^t [1 - I_{(0,\infty)}(X_s)]\mathrm{d}s$$

$$= t - \tau_t = \rho\tilde{\varphi}_{\tau_t} = \rho\varphi_t.$$

这说明 φ 是 X 在 0 点的局部时，且 (X,B,φ) 是(6.12)的解。

其次，我们证明解的分布唯一性。为此我们只需证明(6.12)的任意一组解 (X,B,φ) 在分布意义下总可由(6.7)的一组解经过 ρ 变换而得到。这样由(6.7)的解的分布唯一性立刻推出(6.12)的解的分布唯一性。

令

$$\tau_t = \int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s)\mathrm{d}s,$$

则 τ_t 以概率为 1 地严格递增。事实上，如果是相反的情形，那么存在有理数 $r_1 < r_2$，使

$$P\left(\left\{\omega: \int_{r_1}^{r_2} I_{(0,\infty)}(X_s)\mathrm{d}s = 0\right\}\right) > 0.$$

记

$$\Omega_{r_1,r_2} = \left\{\omega: \int_{r_1}^{r_2} I_{(0,\infty)}(X_s)\mathrm{d}s = 0\right\}.$$

那么$P(\Omega_{r_1,r_2})>0$，且对于$\omega(\in\Omega_{r_1,r_2})$固定及$r_1\leqslant s\leqslant r_2$有

$$I_{(0,\infty)}(X_s) = 0 \quad (\text{a. e. d}s).$$

即$A\equiv\{s: X_s(\omega)>0, r_1\leqslant s\leqslant r_2\}$具有Lebesgue零测度。但是由$X_s(\omega)$的连续性，$A$必是开集，从而它一定是空集。所以对$\omega\in\Omega_{r_1,r_2}$有$X_s\equiv 0(r_1\leqslant s\leqslant r_2)$。于是在$\Omega_{r_1,r_2}$上

$$\varphi_{r_2}-\varphi_{r_1} = \frac{1}{\rho}\int_{r_1}^{r_2} I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}s = (r_2-r_1)\frac{1}{\rho}>0,$$

并且

$$\int_{r_1}^{r_2} I_{(0,\infty)}(X_s)\mathrm{d}B_s = 0 \quad (\Omega_{r_1,r_2}\text{ 上 a. e. d}P).$$

由(6.12)，对于$\omega\in\Omega_{r_1,r_2}$

$$X_{r_2}-X_{r_1} = \varphi_{r_2}-\varphi_{r_1}.$$

于是

$$\begin{aligned} P(X_{r_2}>0) &\geqslant P(X_{r_2}-X_{r_1}>0) \\ &= P(\varphi_{r_2}-\varphi_{r_1}>0)\geqslant P(\Omega_{r_1,r_2})>0. \end{aligned}$$

这与$X_{r_2}=0$矛盾。因此τ_t有反函数。若(X,B,φ)所在空间为$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$，则$\tau_t$的反函数$A_t$是严格递增的连续$(\mathscr{F}_t)$停时。令

$$\tilde{X}_t = X_{A_t};\quad \tilde{\varphi}_t = \varphi_{A_t};\quad \widetilde{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{A_t};$$

$$\tilde{B}_t = \int_0^{A_t} I_{(0,\infty)}(X_s)\mathrm{d}B_s.$$

易见$(\tilde{X},\tilde{B},\tilde{\varphi})$是$(\Omega,\mathscr{F},(\widetilde{\mathscr{F}}_t),P)$上方程(6.7)的解。

由(6.12),(6.17)我们有

$$t=\int_0^t I_{(0,\infty)}(X_s)\mathrm{d}s+\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\mathrm{d}s=\tau_t+\rho\phi_t.$$

因此

$$A_t=\tau_{A_t}+\rho\varphi_{A_t}=t+\rho\bar{\varphi}_t.$$

现在如果我们设$(\bar{X},B,\varphi)\xrightarrow{\rho}(\bar{\bar{X}},\bar{\bar{B}},\bar{\bar{\varphi}})$(意即：通过$\rho$变换变成)，那么因为$X_t=\bar{X}_{\tau_t}=\bar{\bar{X}}_t$。由$\bar{X}$的分布唯一性立得$X$的分布唯一性。

仿命题4.1与4.6可证$\{P_x:\ x\in[0,\infty)\}$是强马氏族。

这时，由命题6.3的2°，对于半群T_t有类似(6.10)的等式

$$\frac{T_tf(x)-f(x)}{t}=\frac{1}{t}\int_0^t T_s\left(\frac{1}{2}f''\right)(x)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{1}{t}\left(f'(0)-\frac{\rho}{2}f''(0)\right)E\varphi_t. \qquad (6.18)$$

与定理6.1完全类似地我们得到

$$\left\{f\in C_K^2[0,\infty):\ f'(0)-\frac{\rho}{2}f''(0)=0\right\}$$

$$\subset\left\{f\in C_b^2[0,\infty):\ f''\text{一致连续},\ f'(0)-\frac{\rho}{2}f''(0)=0\right\}$$

$$\subset\mathscr{D}(\mathfrak{U}).$$

而且$\mathfrak{U}f=f''/2$。

注1 实际上我们还有

$$\mathscr{D}(\mathfrak{U})=\left\{f\in C_b^2[0,\infty),\ f''\text{一致连续},\ f'(0)-\frac{\rho}{2}f''(0)=0\right\}.$$

注2 设$X_0=\bar{X}_0=0$。由$X_t=\bar{X}_{\tau_t}$及$\tau_t<t$看出，粘性反射就是“延迟”反射。

§6.3 半空间的随机微分方程

令

$$D=\{x:\ x^T=(x_1,\cdots,x_d),x_d\geqslant 0\},$$

其内点组成 D^0，边界为 ∂D。记

$$C^2(D)=\{f:\ f\in C^2,\ \text{一直到边界两次可导(单侧导数)}\};$$

$$C_K^2(D)=\{f:\ f\in C^2(D),\ f\ \text{有紧支集}\}.$$

令

$$Af=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\quad (x\in D);$$

$$Lf=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d-1}\alpha^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d-1}\beta^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial x_d}-\rho(x)Af(x)\quad (x\in\partial D)\tag{6.19}$$

(这里讨论的是恒有反射的情形)，其中

$$a(x)=(a^{ij}(x))=\sigma(x)\sigma^T(x),\ \ \alpha(x)=(\alpha^{ij}(x))=\tau(x)\tau^T(x)$$

是对称非负定矩阵，$\rho(x)\geqslant 0(x\in\partial D)$是有界$\mathscr{B}(\partial D)$函数。$\sigma(x)$在 $x\in D$，$\tau(x)$，$\beta(x)$在 $x\in\partial D$ 上满足 Lip，$b(x)$为有界 $\mathscr{B}(D)$函数。记

$$W(D)=\{w=(w_t)_{t\geqslant 0}:\ w_t\ \text{是取值于}\,D\,\text{的连续函数}\}.$$

简记

$$\mathscr{B}=\mathscr{B}(W(D)),\ \ \mathscr{B}_t=\mathscr{B}_t(W(D)).$$

定义6.5 设 X,φ 是取值于 $W(D)$的$(\mathscr{B}_{t+})$适应过程，我们简称φ为X在 ∂D 的一个 φ 过程，如果 $\varphi_0=0$，φ_t 是增过程，而且

$$\int_0^t I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s=\varphi_t.$$

定义6.6 $(W(D),\mathscr{B},\mathscr{B}_{t+})$上强马氏概率测度族$\{P_x:\ x\in D\}$称为$(A,L)$扩散，如果对坐标过程$w.$，存在它在$\partial D$的$\varphi$过程，使得 φ 满足

(D_1) $P_x\{w_0 = x\} = 1$;

(D_2) 对于任意 $f \in C_K^2(D)$ 有

$$M_t^{(f)} = f(w_t) - f(w_0) - \int_0^t Af(w_s)\mathrm{d}s$$

$$- \int_0^t (Lf)(w_s)\mathrm{d}\varphi_s \in \mathscr{M}_2^c;$$

(D_3) $\int_0^t I_{\partial D}(w_s)\mathrm{d}s = \int_0^t \rho(w_s)\mathrm{d}\varphi_s$.

这样的 φ 称为 w. 在 ∂D 的局部时.

定义6.7 $(\Omega, \mathscr{F}, P) \to (W(D), \mathscr{B})$ 上随机元 X 称为具有初分布 PX_0^{-1} 的 (A, L) 扩散，如果存在 $(W(D), \mathscr{B})$ 上扩散测度族 $\{P_x: x \in D\}$，使 X 的分布为

$$\int P_x(\cdot)PX_0^{-1}(\mathrm{d}x).$$

命题6.4 若 $b(x)$ 也连续，且 X 为 (A, L) 扩散，则 $T_t f(x) = E_x f(X_t)$ 的弱生成元 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 是 $A|_{C_b^2(D), Lf=0}$ 的扩张.

证明 (D_2)等价于：对 $\forall f \in C_b^2(D)$ 有 $M_t^{(f)} \in \mathscr{M}_2^c$. 因此对于 $f \in C_b^2(D)$

$$\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t (T_s Af)(x)\mathrm{d}s + \frac{1}{t}E_x\int_0^t Lf(X_s)\mathrm{d}\varphi_s.$$

如果还有 $Lf(x) = 0 (x \in \partial D)$，那么

$$\left|\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} - Af(x)\right| \leqslant \frac{1}{t}\left|\int_0^t (T_s Af(x) - Af(x))\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{t}\int_0^t E_x|Af(X_s) - Af(X_0)|\mathrm{d}s.$$

因为 $Af(X_s)$ 有界连续，由有界收敛定理可得到 $E_x|Af(X_s) -$

$Af(X_0)|$是 s 的连续函数。所以上式右方当 $t\to 0$时的极限是被积函数在 $s=0$ 处的值，即是 0 。又因为

$$\frac{T_t f(x)-f(x)}{t}=\frac{1}{t}\int_0^t (T_s Af)(x)\mathrm{d}s$$

对 t 是有界的，所以

$$\frac{T_t f(x)-f(x)}{t}\xrightarrow{\text{有界收敛}} Af(x).$$

因此$f\in\mathscr{D}(\widetilde{\mathfrak{U}})$，而且 $\widetilde{\mathfrak{U}}f=Af$。命题证毕。

(A,L)扩散的存在唯一性可以归结为一个带有边界的随机微分方程的存在唯一性。

定义6.8 方程组

$$\mathrm{d}X_t=\sigma(X_t)I_{D^0}(X_t)\mathrm{d}B_t+b(X_t)I_{D^0}(X_t)\mathrm{d}t$$
$$+\begin{pmatrix}\tau(X_t) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}I_{\partial D}(X_t)\mathrm{d}\begin{pmatrix}M_t\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta(X_t)\\ 1\end{pmatrix}I_{\partial D}(X_t)\mathrm{d}\varphi_t, \tag{6.20}$$

$$I_{\partial D}(X_t)\mathrm{d}t=\rho(X_t)\mathrm{d}\varphi_t \tag{6.21}$$

称为带边界的随机微分方程，简记为SDE$(\sigma,b;\ \tau,\beta;\ \rho)$。它的解是指某个$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上取值于$W(D)$的$(\mathscr{F}_t)$适应过程$(X,B,M,\varphi)$，它满足：$\varphi$为$X$在$\partial D$的局部时，$B$是零初值Brown运动，$M\in\mathscr{M}_2^{c,loc}(\mathscr{F}_t)$，$\langle M\rangle_t=\varphi_t$，而且 $B\perp\!\!\!\perp M$。

若 $\rho(x)\equiv 0$，则称为非粘性的；否则称为粘性的。

我们称解具有分布唯一性，如果(X,B,M,φ)，$(\tilde{X},\tilde{B},\tilde{M},\tilde{\varphi})$都是解，而且 X_0 与 $\tilde{X}_0$ 同分布，那么X与 $\tilde{X}$ 同分布。

注 $\tau(x),\beta(x)$可扩至D上：$\tau(x),\beta(x)|_{x\in D^0}\equiv 0$。但是这样的$\tau,\beta$在$D$上并不连续。

引理6.4 若 $\rho(x)\geqslant 0,\sigma(x),\tau(x),\rho(x)$有界连续,$b(x),\beta(x)$有界可测，$X$是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上取值于$W(D)$的$(\mathscr{F}_t)$适应过程，$\varphi$是$X$在 ∂D 的局部时，对于$f\in C^2(D)$，记

$$M_t^{(f)}=f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t Af(X_s)\mathrm{d}s-\int_0^t Lf(X_s)\mathrm{d}\varphi_s. \tag{6.22}$$

如果 $M_t^{(f)}, M_t^{(g)}\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$，那么

$$\begin{aligned}\langle M^{(f)},M^{(g)}\rangle_t=&\int_0^t[A(fg)-(fAg+gAf)]_{X_s}\mathrm{d}s\\&+\int_0^t[L(fg)-(fLg+gLf)]_{X_s}\mathrm{d}\varphi_s.\end{aligned}\tag{6.23}$$

（证明同引理 6.2。）

命题6.5 设一切记号如引理6.4中的含义，那么下列诸叙述彼此等价：

1° 方程组(6.20)，(6.21)有解(X,B,M,φ)；

2° (X,φ)满足(6.21)，并且对于任意$f\in C_K^2(D)$（或$C_0^\infty(D)$，或$C_b^2(D)$），由(6.22)定义的$M_t^{(f)}\in\mathscr{M}_2^c$；

3° 2°中$C_K^2(D)$和$\mathscr{M}_2^c$分别相应地改为$C^2(D)$和$\mathscr{M}_2^{c,loc}$。

证明 类似命题6.2的证明。这里只证3°=>1°。

取$f=g=x$。由3°利用(6.23)及(6.21)我们有

$$\begin{aligned}\langle M^{(x)},M^{(x)}\rangle_t&=(\langle M^{(x_i)},M^{(x_j)}\rangle_t)\\&=\int_0^t a(X_s)\mathrm{d}s+\int_0^t\left[\begin{pmatrix}a(X_s)&0\\0&0\end{pmatrix}-\rho(X_s)a(X_s)\right]\mathrm{d}\varphi_s\\&=\int_s^t a(X_s)I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}s+\int_0^t\begin{pmatrix}a(X_s)&0\\0&0\end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi_s.\end{aligned}\tag{6.24}$$

令

$$N_t=\int_0^t I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}M_s^{(x)}. \tag{6.25}$$

于是由(6.24)我们有

$$\langle M^{(x)},N\rangle_t=\int_0^t I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}\langle M^{(x)}\rangle_s$$

$$= \int_0^t a(X_s) I_{D^0}(X_s) \mathrm{d}s + \int_s^t \begin{pmatrix} a(X_s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I_{D^0}(X_s) \mathrm{d}\varphi_s$$

$$= \int_s^t a(X_s) I_{D^0}(X_s) \mathrm{d}s; \tag{6.26}$$

$$\langle N, N \rangle_t = \langle M^{(x)}, N \rangle_t; \quad \langle M^{(x)} - N, N \rangle = 0. \tag{6.27}$$

因此由(6.24)及(6.26),(6.27)可推出

$$\begin{aligned} \langle M^{(x)} - N, M^{(x)} - N \rangle_t &= \langle M^{(x)} - N, M^{(x)} \rangle_t \\ &= \langle M^{(x)}, M^{(x)} \rangle - \langle M^{(x)}, N \rangle \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} a(X_s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi_s. \end{aligned} \tag{6.28}$$

于是由(6.26)至(6.28)，我们有

$$\left\langle \begin{pmatrix} N \\ M^{(x)} - N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ M^{(x)} - N \end{pmatrix} \right\rangle_t$$

$$= \begin{pmatrix} \langle N, N \rangle_t & 0 \\ 0 & \langle M^{(x)} - N, M^{(x)} - N \rangle_t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^t a(X_s) I_{D^0}(X_s) \mathrm{d}s & 0 \\ 0 & \int_0^t \begin{pmatrix} a(X_s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi_s \end{pmatrix}.$$

由此仿照引理 3.8 的证明可得：存在局部平方可积鞅$\begin{pmatrix} B \\ M \\ 0 \end{pmatrix}$（$B$ 为 Brown 运动，M 为 $d-1$ 维），使 $\langle B, M \rangle = 0$，B 为 Brown 运动，$\langle M \rangle = \varphi$ 且

$$\begin{pmatrix} N \\ M^{(x)} - N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t \sigma(X_s) I_{D^0}(X_s) \mathrm{d}B_s \\ \int_0^t \begin{pmatrix} \tau(X_s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\begin{pmatrix} M_s \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

因此

$$M^{(x)}=\int_0^t \sigma(X_s)I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}B_s+\int_0^t\begin{pmatrix}\tau(X_s) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathrm{d}\begin{pmatrix}M_s\\ 0\end{pmatrix}.$$

另一方面，由(6.22)我们有

$$M^{(x)}=X-X^0-\int_0^t b(X_s)I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}s-\int_0^t\begin{pmatrix}\beta(X_s)\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi_s.$$

联合起来便得到1°.

引理6.5（c 变换） $c(x)$有界连续，$c(x)\geq c_1>0$. 又设 SDE $(\sigma,b;\ \tau,\beta;\ 0)$在$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上有解$(X,B,M,\varphi)$，而且

$$A_t=\int_0^t\frac{1}{c(X_s)}\mathrm{d}s$$

的反函数为 A_t^{-1}. 记

$$(\tilde{X}_t,\tilde{B}_t,\tilde{M}_t,\tilde{\varphi}_t)$$

$$=\left(X_{A_t^{-1}},\ \int_0^t\frac{1}{\sqrt{c(X_{A_s^{-1}})}}\mathrm{d}B_{A_s^{-1}},\ M_{A_s^{-1}},\ \varphi_{A_s^{-1}}\right).$$

那么$(\tilde{X},\tilde{B},\tilde{M},\tilde{\varphi})$是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_{A_t^{-1}}),P)$上SDE$(\sqrt{c}\,\sigma,cb;\ \tau,\beta;\ 0)$的解，我们称它为$(X,B,M,\varphi)$的 c 变换，简记

$$(X,B,M,\varphi)\xrightarrow{c}(\tilde{X},\tilde{B},\tilde{M},\tilde{\varphi}).$$

证明 因为

$$\langle\tilde{B}\rangle_t=\int_0^t\frac{1}{c(X_{A_s^{-1}})}\mathrm{d}A_s^{-1}=\int_0^{A_t^{-1}}\frac{1}{c(X_u)}\mathrm{d}u=t,$$

所以 $\tilde{B}$ 是$(\mathscr{F}_{A_t^{-1}})$Brown 运动. 同时因为

$$A_t^{-1}=\int_0^{A_t^{-1}}c(X_s)\mathrm{d}\left(\int_0^s\frac{1}{c(X_u)}\mathrm{d}u\right)$$

$$=\int_0^{A_t^{-1}}c(X_s)\mathrm{d}A_s=\int_0^t c(X_{A_u^{-1}})\mathrm{d}u,$$

因此我们有

$$\widetilde{X}_t-\widetilde{X}_0=X_{A_t^{-1}}-X_0$$

$$=\int_0^{A_t^{-1}}\sigma(X_s)I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}B_s+\int_0^{A_t^{-1}}b(X_s)I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^{A_t^{-1}}\begin{pmatrix}\tau(X_s) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}\begin{pmatrix}M_s\\ 0\end{pmatrix}$$

$$+\int_0^{A_t^{-1}}\begin{pmatrix}\beta(X_s)\\ 1\end{pmatrix}I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s$$

$$=\int_0^t\sigma(\widetilde{X}_s)I_{D^0}(\widetilde{X}_s)\mathrm{d}B_{A_s^{-1}}+\int_0^t b(\widetilde{X}_s)I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}A_s^{-1}$$

$$+\int_0^t\begin{pmatrix}\tau(\widetilde{X}_s) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}I_{\partial D}(\widetilde{X}_s)\mathrm{d}\begin{pmatrix}M_{A_s^{-1}}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{pmatrix}\beta(\widetilde{X}_s)\\ 1\end{pmatrix}I_{\partial D}(\widetilde{X}_s)\mathrm{d}\varphi_{A_s^{-1}}.$$

$$\int_0^t I_{\partial D}(\widetilde{X}_s)\mathrm{d}s=\int_0^{A_t^{-1}}I_{\partial D}(X_u)\mathrm{d}A_u$$

$$=\int_0^{A_t^{-1}}I_{\partial D}(X_u)\frac{1}{c(X_u)}\mathrm{d}u=0.$$

由此便得引理。

引理6.6（ρ 变换） 如果SDE$(\sigma,b;\tau,\beta;0)$在$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上有解$(X,B,M,\varphi)$，记

$$A_t=t+\int_0^t\rho(X_s)\mathrm{d}\varphi_s$$

的反函数为 A_t^{-1}。又若 $\bar{B}$ 是一个与(X,B,M,φ)独立的$(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{F}},\bar{P})$上的 d 维 Brown 运动，$\widetilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_t\vee\sigma(\bar{B}_s:\ s\leqslant t)$，则按下式定义

$$(\widetilde{X}_t,\widetilde{B}_t,\widetilde{M}_t,\widetilde{\varphi}_t)$$
$$=\left(X_{A_t^{-1}},\ B_{A_t^{-1}}+\int_0^t I_{\partial D}(X_{A_s^{-1}})\mathrm{d}\bar{B}_s,\ M_{A_t^{-1}},\ \varphi_{A_t^{-1}}\right).$$

就得到$(\Omega\times\tilde{\Omega},\mathscr{F}\times\overline{\mathscr{F}},(\widetilde{\mathscr{F}}_t),\ P\times\bar{P})$上SDE$(\sigma,b;\tau,\beta;\rho)$的解$(\tilde{X},\tilde{B},\tilde{M},\tilde{\varphi})$。我们称它为$(X,B,M,\varphi)$的$\rho$变换，并记成

$$(X,B,M,\varphi)\xrightarrow{\ \rho\ }(\tilde{X},\tilde{B},\tilde{M},\tilde{\varphi}).$$

反之，SDE$(\sigma,b;\tau,\beta;\rho)$的任意一个解$(\hat{X},\hat{B},\hat{M},\hat{\varphi})$中的$\hat{X}$必与上面的$\tilde{X}$同分布，只要初值同分布。

证明 首先注意A_t^{-1}是X在D^0的累积占位时间。事实上

$$\begin{aligned}A_t^{-1}&=\int_0^{A_t^{-1}}(I_{D^0}(X_s)+I_{\partial D}(X_s))\mathrm{d}s=\int_0^{A_t^{-1}}I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^{A_t^{-1}}I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}\left[A_s-\int_0^s\rho(X_u)\mathrm{d}\varphi_u\right]\\&=\int_0^{A_t^{-1}}I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}A_s=\int_0^tI_{D^0}(\tilde{X}_u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

由此可得$\langle\tilde{B}\rangle_t=t$，即$\tilde{B}$是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown运动。显然$\tilde{\varphi}$是$\tilde{X}$在$\partial D$的一个$\varphi$过程，而且

$$\begin{aligned}\int_0^tI_{\partial D}(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s&=\int_0^{A_t^{-1}}I_{\partial D}(X_u)\mathrm{d}A_u\\&=\int_0^{A_t^{-1}}I_{\partial D}(X_u)\mathrm{d}u+\int_0^{A_t^{-1}}I_{\partial D}(X_u)\rho(X_u)\mathrm{d}\varphi_u\\&=\int_0^{A_t^{-1}}\rho(X_u)\mathrm{d}\varphi_u=\int_0^t\rho(\tilde{X}_s)\mathrm{d}\tilde{\varphi}_s;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t-\tilde{X}_0&=X_{A_t^{-1}}-X_0\\&=\int_0^{A_t^{-1}}\sigma(X_s)I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}B_s+\int_0^{A_t^{-1}}b(X_s)I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^{A_t^{-1}}\begin{pmatrix}\tau(X_s)&0\\0&0\end{pmatrix}\mathrm{d}\begin{pmatrix}M_s\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$+\int_0^{A_t^{-1}}\begin{pmatrix}\beta(X_s)\\1\end{pmatrix}d\varphi_s$$

$$=\int_0^t\sigma(\tilde{X}_u)I_{D^0}(\tilde{X}_u)(d\tilde{B}_u-I_{\partial D}(\tilde{X}_u)d\tilde{B}_u)$$

$$+\int_0^t b(\tilde{X}_u)I_{D^0}(\tilde{X}_u)(du-\rho(\tilde{X}_u)d\tilde{\varphi}_u)$$

$$+\int_0^t\begin{pmatrix}\tau(\tilde{X}_s) & 0\\0 & 0\end{pmatrix}d\begin{pmatrix}\tilde{M}_s\\0\end{pmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{pmatrix}\beta(\tilde{X}_s)\\1\end{pmatrix}d\tilde{\varphi}_s.$$

因此引理的前半部分得证。而引理的最后一句话是可以仿照定理6.2的后半部分的证明得到的，其不同处仅在于这里的ρ是(连续地)依赖于x的，而A_t^{-1}就是那里的τ_t。

注 如果把相应于$\rho(x)$的解记成$X^{(\rho)}$，当$\rho(x)$有界收敛到0时，我们有$X_t^{(\rho)}\to X_t^{(0)}$。

事实上，

$$X_t^{(\rho)}=X_{A_t^{-1}}^{(0)}=X^{(0)}_{t-\int_0^{A_t^{-1}}\rho(X_s^{(0)})d\varphi_s^{(0)}}$$
$$=X^{(0)}_{t-\int_0^t\rho(X_s^{(\rho)})d\varphi_s^{(\rho)}}\to X_t^{(0)}.$$

定理6.3(S. Watanabe) 若$\sigma(x),\tau(x),\beta(x)$有界Lip,$\rho(x)$,$b(x)$是有界可测函数，**又设**

$$a^{dd}(x)\geqslant c_1>0\quad(a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T),$$

则对于$(D,\mathscr{B}(D))$上任意概率分布μ，SDE$(\sigma,b;\tau,\beta;\rho)$存在分布唯一解$(X,B,M,\varphi)$,使$X_0$以$\mu$为分布，而且$X$是$(A,L)$扩散。

若$b(x)$还是连续的，则$X^{(x)}$的半群$T_tf(x)=E_xf(X_t)$的弱生成元$\tilde{\mathfrak{A}}$是$A|_{f\in C_b^2,Lf=0}$的扩张，其中$X^{(x)}$指$\mu=\delta_x$(集中于一点的x的分布)时的X。

证明 第一步，证明 $\mathrm{SDE}\left(\begin{pmatrix} & * & \\ 1 & 0 \cdots & 0\end{pmatrix},0;\tau,\beta;0\right)$ 有分布唯一解。事实上，这时方程是"解耦的"，即可以先解 X 的最后一个分量 X_d，然后再解前 $d-1$ 个分量 $Y=\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{d-1}\end{pmatrix}$。具体构造如下：

作 X_0 使它具有给定分布 μ。用乘积空间办法作 $(\mathscr{F}_t)$ 及一个与它独立的 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动 B 且使 $X_0\in\mathscr{F}_0$，对 B 的第 d 个分量 B_d 作 Skorohod 分解，得到 $\widetilde{X}_d=X_{d,0}+B_d+\varphi$（$X_{d,0}$ 是 X_0 的 d 分量）。再用乘积空间方法作一个与 (X_0,B) 独立的 $d-1$ 维 Brown 运动 $\overline{B}$，由于 φ_t 可以用 B_d 与 $X_{d,0}$ 表示，所以 $\overline{B}$ 也与 φ 独立。定义

$$M_t=\overline{B}_{\varphi_t};\quad \widetilde{\mathscr{F}}_t=\sigma(B_s,M_s,X_0,\ 0\leqslant s\leqslant t).$$

那么 $(B,M)\in\mathscr{M}_2^c(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$，$\langle M\rangle_t=\varphi_t$，$\langle M,B\rangle_t=0$。记

$$x\equiv\begin{pmatrix} y \\ x_d\end{pmatrix},\qquad \sigma(x)\equiv\sigma(y,x_d),$$

$X_{d,t}=X_d$ 在时间 t 的值，于是方程

$$\mathrm{d}Y_t=\sigma(Y_t,X_{d,t})\mathrm{d}B_t+\tau(Y_t,0)\mathrm{d}M_t+\beta(Y_t,0)\mathrm{d}\varphi_t \tag{6.29}$$

的系数 $\tau(y,0),\beta(y,0)\in\mathrm{Lip}$，$\sigma(y,X_{d,t})$ 对 y 为 Lip 且关于 $X_{d,t}$ 一致。因此我们可以仿照定理 3.1 的证明，得知(6.29)有轨道唯一解 Y。定义

$$X=\begin{pmatrix} Y \\ X_d\end{pmatrix}.$$

我们有

$$\int_0^t I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}s=\int_0^t I_{\{0\}}(X_{d,s})\mathrm{d}s=0;.$$

$$\int_0^t I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s = \int_0^t I_{\{0\}}(X_{d,s})\mathrm{d}\varphi_s = \varphi_t.$$

易见X即是我们所要的解.

第二步. 对 Brown 运动作某个正交变换，得到 SDE(σ,0; τ,β;0)存在分布唯一解.

首先我们证明存在带参数x的正交矩阵$O(x)$满足:

(O_1) 它的第一列是$\sigma(x)$的最后一行的单位化;

(O_2) 元素均属Lip.

当$\sigma^{dd}(x)\geqslant c>0$时，这样的$O(x)$是存在的. 例如我们可以这样作：记

$$(c_1,\cdots,c_d)=(\sigma^{d1}(x),\cdots,\sigma^{dd}(x)).$$

取

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & -c_3c_1 & -c_4c_1 & \cdots \\ c_2 & c_1 & -c_3c_2 & -c_4c_2 & \cdots \\ c_3 & 0 & (c_1^2+c_2^2) & -c_4c_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & c_1^2+c_2^2+c_3^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_d & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

再使它每列单位化. 易见它仍保持每个元素是 Lip 的; 一般仅当$a^{dd}(x)=\sum\limits_i(\sigma^{di})^2\geqslant c>0$时，取$\varepsilon>0$，用$(c_1,\cdots,c_d+\varepsilon)$代替$(c_1,\cdots,c_d)$. 可证用上面方法得到的正交矩阵(记为$O_\varepsilon(x)$)的元素是 Lip 的(对$\varepsilon$一致). 令$\varepsilon\to0$即得$O(x)$.

现在我们有

$$\sigma(x)O(x)=\begin{pmatrix} & * & \\ \sqrt{a^{dd}(x)} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

我们约定称$\left(X,\ \int_0^t O^T(X_s)\mathrm{d}B_s, M, \varphi\right)$为$(X,B,M,\varphi)$的**O 变换**. 显见$(X,B,M,\varphi)$是 SDE($\sigma$,$b$;$\tau$,$\beta$; 0)的解当且仅当其O变

换为 SDE$(\sigma O, b; \tau, \beta; 0)$的解。

由第一步所证，SDE$\left(-\frac{1}{\sqrt{a^{dd}(x)}}\sigma O, 0; \tau, \beta; 0\right)$有分布唯一解$(X, B, M, \varphi)$。取 $c(x) = \sqrt{a^{dd}(x)}$，由引理6.5，(X, B, M, φ)的 c 变换是 SDE$(\sigma O, 0; \tau, \beta; 0)$的解，再作 O^T 变换就得到 SDE$(\sigma, 0; \tau, \beta; 0)$的解。

第三步．一般情形．设$(\tilde{X}, \tilde{B}, \tilde{M}, \varphi)$是由 SDE$(\sigma, 0; \tau, \beta; 0)$的解$(X, B, M, \varphi)$作 Girsanov 变换后所得，于是

$$\tilde{E}\left(\int_0^t I_{\partial D}(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s\right)$$

$$= E\left[\int_0^t \exp\left(\int_0^s (\sigma^{-1}b)(X_u)\mathrm{d}B_u - \frac{1}{2}\int_0^s (b^T a^{-1} b)(X_u)\mathrm{d}u\right)\right.$$

$$\left.\times I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}s\right] \leqslant \text{常数}\left(E\left(\int_0^t I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}s\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

所以

$$\int_0^t I_{\partial D}(\tilde{X}_s)\mathrm{d}s = 0 \qquad (a.e.\ \mathrm{d}\tilde{P}).$$

因此$(\tilde{X}, \tilde{B}, \tilde{M}, \varphi)$是 SDE$(\sigma, b; \tau, \beta; 0)$的解．再作 ρ 变换就得到 SDE$(\sigma, b; \tau, \beta; \rho)$的解。

由于所有的变换都有反变换，或在某种意义下的“反变换”（例如在 ρ 变换的情形），所以由 SDE$\left(\left(\begin{matrix} & * & \\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{matrix}\right), 0; \tau, \beta; 0\right)$的解具有分布唯一性立刻得到 SDE$(\sigma, b; \tau, \beta; \rho)$解的分布唯一性。

与命题 4.1 及命题 4.6 相同地可推得强马氏性．其他结论由命题 6.5 及命题 6.6 所保证。

注 X 的在 ∂D 上的局部时 φ 是 X 保持在 ∂D 上的一个“计时”．X_t 留在 ∂D 的那些时刻恰是 φ_t 增长的时刻．使局部时的累积达到某个 t 的时刻就是 φ 的右连续逆(反函数)φ_t^{-1}:

$$\varphi_t^{-1} = \inf\{s: \varphi_s > t\},$$

它称为逆局部时．逆局部时 φ_t^{-1} 恰好忽视了 X_s 落入 D^0 的那些时刻 s．也就是 φ_t^{-1} 的值只可能取使 φ_s 增长的那些 s．因此

$$X_{\varphi_t^{-1}} \in \partial D.$$

过程 $Y_t \equiv X_{\varphi_t^{-1}}$ 是右连左极$(\mathscr{F}_{\varphi_t^{-1}})$适应过程．

定义6.9 时空过程(φ_t^{-1}, Y_t)称为边界过程．

注 以上定理中关于 σ, τ, β 的 Lip 性假定可以去掉．由于存在性及唯一性的论证很冗长，本书不便涉及，只是指出其证明存在性的基本的想法是：当 $\rho \equiv 0$ 时用满足 Lip 的系数一致逼近，再用弱收敛；而当 $\rho \not\equiv 0$ 时用 ρ 变换即可．

定理6.4（系数显含 t 的情形） 设 $\sigma(t,x), \tau(t,x), \beta(t,x), \rho(t,x)$都是有界 Lip 的，$b(t,x)$有界可测．又设

$$a^{dd}(t,x) \geqslant c > 0 \quad (a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma(t,x)^T),$$

则对于$(D, \mathscr{B}(D))$上任意概率分布 μ 及 $t_0 > 0$，方程组

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t) I_{D^0}(X_t) dB_t + b(t, X_t) I_{D^0}(X_t) dt \\ \qquad + \begin{pmatrix} \tau(t, X_t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I_{\partial D}(X_t) d\begin{pmatrix} M_t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \qquad + \begin{pmatrix} \beta(t, X_t) \\ 1 \end{pmatrix} I_{\partial D}(X_t) d\varphi_t, \\ I_{\partial D}(X_t) dt = \rho(t, X_t) d\varphi_t, \\ I_{\partial D}(X_t) d\varphi_t = d\varphi_t \end{cases}$$

存在分布唯一解(X, B, M, φ)，满足

$$P(X_{t_0} \in A) = \mu(A) \quad (A \in \mathscr{B}(D)).$$

证明 我们要把本情形归结为不显含 t（定理 6.3）的情形．令

$$x_{d+1} = t, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \in D \times [0, \infty);$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{x})=\begin{pmatrix}\sigma(\tilde{x})\\0\end{pmatrix},\ \tilde{b}(\tilde{x})=\begin{pmatrix}b(\tilde{x})\\1\end{pmatrix}(\tilde{x}\in D\times[0,\infty));$$

$$\tilde{\tau}(\tilde{x})=\begin{pmatrix}\tau(\tilde{x})\\0\end{pmatrix},\ \tilde{\beta}(\tilde{x})=\begin{pmatrix}\beta(\tilde{x})\\\rho(\tilde{x})\end{pmatrix}(\tilde{x}\in\partial D\times[0,\infty)).$$

作 $\tilde{X}_0$ 使它具有分布 μ，设方程 SDE$(\tilde{\sigma},\tilde{b};\tilde{\tau},\tilde{\beta};\tilde{\rho})$在 t_0 时取 $\begin{pmatrix}\tilde{X}_0\\t_0\end{pmatrix}$的唯一解为$\begin{pmatrix}X\\X_{d+1}\end{pmatrix}$（注意，这时 ∂D 仍为 $x_d=0$），那么按 $\tilde{\beta}$ 的定义我们有

$$dX_{d+1,t}=I_{D^0}(X_{d+1,t},X_t)dt+\rho(X_{d+1,t},X_t)d\varphi_t=dt.$$

但是 $X_{d+1,t_0}=t_0$，所以 $X_{d+1,t}=t$。

注1 X_t 实际上也是马氏过程，但是证明相当冗长，本书中不再介绍。这方面的细节可参考[SV]。

注2 $\rho(t,x)$的连续性对于方程解的存在性不可少。下面 Nakao 的反例就说明了这一点。

例(Nakao)

$$\text{SDE}\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ 0,0;I_{(x_1\geq t)}\right)$$

对零初值无解。我们用反证法，设在某个$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上方程有解$(X,B,\varphi)$，即 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$满足

$$\begin{cases}dX_{1,t}=I_{D^0}(X_t)dt, & (1)\\ dX_{2,t}=I_{D^0}(X_t)dB_{2,t}+d\varphi_t & (2)\\ I_{\partial D}(X_t)dt=I_{(x_1\geq t)}(X_t)d\varphi_t. & (3)\end{cases}$$

令

$$\tau=\inf\{t:\ X_{1,t}-t<0\}.$$

于是由(1)当 $t<\tau$ 时，可能除了 $t=0$ 以外，均有 $X_t\in D^0$。因此

$$\int_0^\tau I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}s=0.$$

所以由(3)得到

$$\int_0^\tau \mathrm{d}\varphi_s=\int_0^\tau I_{\{x_1>t\}}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s=\int_0^\tau I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}s=0.$$

于是

$$0\leqslant X_{2,t}=\int_0^t I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}B_{2,s}=B_{2,t}\quad (t<\tau).$$

但是 Brown 运动 $B_{2,t}$ 即使在 0 附近的任意小区间也不可能有正概率非负，所以 $P(t<\tau)=0$. 从而 $P(\tau>0)=0$. 进而推出 $I_{\{x_1>t\}}(X_t)\equiv 0$ (a.e.dP). 这样由(1)及(3)得

$$X_{1,t}=\int_0^t I_{D^0}(X_s)\mathrm{d}s=t-\int_0^t I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}s$$

$$=t-\int_0^t I_{\{x_1>t\}}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s=t.$$

这说明 $\tau=\infty$(a.e.dP). 这就得到了矛盾.

与无边界情形类似地，我们也可以考虑具有爆炸的情形. 我们易证:

定理6.5 若 $a(x)\in C_b^2(D)$, $\alpha(x)\in C_b^2(\partial D)$, $b(x),\beta(x)$ 均属于 $\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$, $\rho(x)$有界可测非负，并且 $a^{dd}(x)\geqslant c_1>0$, 则存在唯一(A,L)扩散族 $\{P_x: x\in D\}$. 又若 $b(x)$和 $\beta(x)$为线性增长，$a(x),\alpha(x)$为二次增长，那么这(A,L)扩散族是保守的.

一般地，如果X是 R^d 取值的A扩散，τ是它初达 ∂D 的时刻，令

$$X^{(s)}=X^\tau;\quad X^{(0)}=X^\tau I_{t<\tau}+\partial I_{\{t\geqslant\tau\}}.$$

那么它们也是强马氏过程，而且当初值 $x\in D$ 时，对于相应的弱生成元 $\widetilde{\mathfrak{U}}^{(s)}$, $\widetilde{\mathfrak{U}}^{(0)}$有

$$A|_{f\in C_b^2(D),\,Af|_{\partial D}=0}\subset\widetilde{\mathfrak{U}}^{(s)};$$

$$A|_{f\in C_b^2(D),\,f|_{\partial D}=0}\subset\widetilde{\mathfrak{U}}^{(0)}.$$

§6.4 退化情形的例子

在 R^d 中某个开区域 G 内给定了椭圆型算符

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

如果

$$a(x)=(a^{ij}(x))_{i,j}$$

在 G 内正定，但是在 ∂G 上某些地方有 $\det a(x)=0$，则称 A 为退化的(严格地说，在边界上是退化的)。

Fichera 把边界 ∂G 上的点分类如下：设 ∂G 充分光滑，$a^{ij}(x)$ 在 ∂G 附近可微，∂G 上点 x 的单位内法向量记为 $n_0(x)$，定义向量 $b_f(x)$，它的 i 分量为

$$b_f^i=b_i-\frac{1}{2}\sum_j\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}. \tag{6.29'}$$

b_f 称为 Fichera 法向漂移，记

$$\Sigma_3=\{x\in\partial G:\ n_0(x)^Ta(x)n_0(x)>0\};$$

$$\Sigma_2=\{x\in\partial G-\Sigma_3:\ b_f(x)^Tn_0(x)<0\};$$

$$\Sigma_1=\{x\in\partial G-\Sigma_3:\ b_f(x)^Tn_0(x)>0\};$$

$$\Sigma_0=\{x\in\partial G-\Sigma_3:\ b_f(x)^Tn_0(x)=0\}.$$

定义6.10 我们约定分别称 x 为 Fichera 正则边界点，Fichera 流出边界点，Fichera 流入边界点，Fichera 自然边界点，如果相应地分别有 $x\in\Sigma_3, x\in\Sigma_2, x\in\Sigma_1, x\in\Sigma_0$。后三种为退化的情形。

现在我们设 D 仍为 §6.3中的半空间。设 $d\times d$ 矩阵 $\sigma(x)$ 及 d 维向量 $b(x)$ 均为 Lip，$a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^T$。当 $a(x)$ 在 ∂D 上退化时，相应于定义 6.6 中的(D_3)常常未必能满足。这就是说，即使 $\rho\equiv0$，对应的扩散(如果存在)也未必只在边界上只有总共为零时间的累计停留。这样，局部时间就失去了原来的作用。另一

方面(D_3)规定了 φ_t 的不减性。现在既然放弃了(D_3)，也就不必要求 φ_t 的不减性了。

模仿 X 在 ∂D 的局部时 φ，我们有下述的定义。

定义6.11 若 X 是 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ 上 D 值右连左极 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程，φ_t 是实值有限变差连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程，而且其符号测度集中于 X 在边界 ∂D 上的时刻满足

$$\int_0^t I_{\partial D}(X_s)\mathrm{d}\varphi_s=\varphi_t,$$

则我们约定称 φ_t 为 X 在 ∂D 的广义边界时(显然它不唯一)。

定义6.12(放松定义 6.6 的要求) 假设 L 中的 $\rho(x)\equiv 0$，我们称 $(W(D),\ \mathscr{B}(W(D)))$ 上强马氏概率测度族 $\{P_x:\ x\in D\}$ 为 (A,L) 扩散，如果对于坐标过程 $w_\cdot$ 及它在 ∂D 的一个广义边界时 φ_t 有

(D_1^*) $P_x\{w_0=x\}=1$;

(D_2^*) 对于任意 $f\in C_K^2(D)$，恒有

$$M_t^{(f)}\equiv f(w_t)-f(w_0)-\int_0^t Af(w_s)\mathrm{d}s-\int_0^t Lf(w_s)\mathrm{d}\varphi_s\in\mathscr{M}_2^c.$$

$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ 上 D 值连续适应过程 X 称为具有初分布 PX_0^{-1} 的 (A,L) 扩散，如果存在扩散族 $\{P_x\}$，使 X 的分布恰是

$$\int P_x(\cdot)PX_0^{-1}(\mathrm{d}x).$$

显见命题6.5与引理6.4仍旧正确。

在半空间 D 的情况，∂D 上点 x 为正则，当且仅当 $a^{dd}(x)>0$。在§6.3中讨论的情况所假定的条件 $a^{dd}(x)\geqslant c_1>0$ 远比正则点要求为高。在退化的情形，我们有：$x\in\partial D$ 是 Fichera 的：

流出边界点	流入边界点	自然边界点
$a^{dd}(x)=0, b_{f,d}(x)<0$	$a^{dd}(x)=0, b_{f,d}(x)>0$	$a^{dd}(x)=b_{f,d}(x)=0$

其中

$$b_{f,d}(x)=b_d-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial a^{dj}(x)}{\partial x_j}.$$

这时我们有，例如：

定理6.6 若 $\sigma(x)$ 为有界 Lip，函数 $b(x)\in$ Lip，又 ∂D 的点均为 Fichera 流出点，即

$$a^{dd}(x)|_{x\in\partial D}=0,$$
$$\left(b_d(x)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial a^{dj}(x)}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x\in\partial D}<0, \tag{6.30}$$

则存在唯一的 $\left(A,\frac{\partial}{\partial x_d^d}\right)$ 扩散 $\left(\text{即 } Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial x_d}\right)$.

证明 由 $a^{dd}(x)|_{\partial D}=0$，我们有 $a^{dj}(x)|_{x\in\partial D}=0$ $(j\leqslant d-1)$。从而

$$\frac{\partial a^{dj}(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x\in\partial D}=0 \quad (j\leqslant d-1),$$

于是(6.30)变成

$$a^{dd}(x)|_{x\in\partial D}=0,\ \left(b_d(x)-\frac{1}{2}\frac{\partial a^{dd}(x)}{\partial x_d}\right)\bigg|_{x\in\partial D}<0. \tag{6.30$'$}$$

又因为 $\sigma(x)\in$ Lip，所以 $a(x)$ 为二阶 Hölder，因此对 $x\in D$ 有

$$a^{dd}(x)=|a^{dd}(x_1,\cdots,x_{d-1},x_d)-a^{dd}(x_1,\cdots,x_{d-1},0)|$$
$$\leqslant Cx_d^2. \tag{6.31}$$

由(6.31)我们推出 $\frac{\partial a^{dd}(x)}{\partial x_d}\bigg|_{x\in\partial D}=0$。因此(6.30)最后变成

$$a^{dd}(x)=0,\ b_d(x)<0 \quad (x\in\partial D). \tag{6.30$''$}$$

记

$$b=\begin{pmatrix}\tilde{b}\\ b_d\end{pmatrix},\qquad \sigma=\begin{pmatrix}\tilde{\sigma}\\ 0\end{pmatrix}\quad (x\in\partial D),$$

$$b(x)=b(\hat{x},x_d),\ \ \sigma(x)=\sigma(\hat{x},x_d)(\hat{x}\in R^{d-1}).$$

我们可用镜面反射将 $b(x)$ 与 $\sigma(x)$ 扩张到整个空间 R^d。

设在某个$(\Omega,\mathscr{F},P)$上给定了$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动

$$B=\begin{pmatrix}\hat{B}\\ B_d\end{pmatrix}.$$

令

$$X_t=X_0+\int_0^t\sigma(X_s)\mathrm{d}B_s+\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$$

的解为$X=\begin{pmatrix}\hat{X}\\ X_d\end{pmatrix}$，它首达 ∂D 的时刻记为τ。令$\tau'=\tau\wedge T$。于是

$$\tilde{B}_t\equiv\hat{B}_{t+\tau'}-\hat{B}_{\tau'}$$

为 $d-1$ 维$(\mathscr{F}_{t+\tau'})$Brown 运动。

在边界 ∂D 上，我们考虑系数为 $\tilde{\sigma}(y,0)$、$\tilde{b}(y,0)$（即是在 ∂D 上的限制）的方程

$$Y_t=\hat{X}_{\tau'}+\int_0^t\tilde{\sigma}(Y_s,0)\mathrm{d}\tilde{B}_s+\int_0^t\tilde{b}(Y_s,0)\mathrm{d}s.$$

设其迭代解为Y。对 $t\leqslant T$ 我们定义

$$\bar{X}_t=X_{t\wedge\tau'}+\begin{pmatrix}\displaystyle\int_0^{t-t\wedge\tau'}\tilde{\sigma}(Y_s,0)\mathrm{d}\tilde{B}_s+\tilde{b}(Y_s,0)\mathrm{d}s\\ 0\end{pmatrix}.$$

我们还有

$$B_{t\vee\tau'}-B_{\tau'}=B_t-B_{t\wedge\tau'}\in\mathscr{M}_2^c(\mathscr{F}_t);$$

$$\langle B_{\cdot\vee\tau'}-B_{\tau'}\rangle_t=t\vee\tau'-\tau'=t-t\wedge\tau'.$$

而且

$$B_t=(B_{t\vee\tau'}-B_{\tau'})+B_{t\wedge\tau'};$$

$$\langle B\rangle_t=\langle B_{\cdot\vee\tau'}-B_{\tau'}\rangle_t+\langle B_{\cdot\wedge\tau'}\rangle_t.$$

因此

$$\langle B_{\cdot\vee\tau'} - B_{\tau'},\ B_{\cdot\wedge\tau'}\rangle = 0.$$

这样，利用 σ 的连续性，并用 Riemann 和来按概率收敛意义下近似积分，就得到

$$\int_0^{t-t\wedge\tau'} \bar{\sigma}(Y_s,0)\mathrm{d}\bar{B}_s = \int_{t\wedge\tau'}^t \bar{\sigma}(\bar{X}_u)\mathrm{d}(\hat{B}_{u\vee\tau'} - \hat{B}_{\tau'}),$$

$$\int_0^{t-t\wedge\tau'} \bar{b}(Y_s,0)\mathrm{d}s = \int_{t\wedge\tau'}^t \bar{b}(\bar{X}_u)\mathrm{d}(u\vee\tau' - \tau').$$

于是 $\bar{X}$ 应满足方程($t\leqslant T$)

$$\bar{X}_t = X_0 + \int_0^t \sigma(\bar{X}_s)\mathrm{d}B_{s\wedge\tau'} + \int_0^t b(\bar{X}_s)\mathrm{d}(s\wedge\tau')$$

$$+\begin{pmatrix} \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{X}_s)\mathrm{d}(\hat{B}_{s\vee\tau'} - \hat{B}_{\tau'}) + \int_0^t \bar{b}(\bar{X}_s)\mathrm{d}(s\vee\tau') \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.32}$$

取 $f\in C_b^2(D)$，对于 $f(\bar{X})$ 用 Ito 公式：对于 $t\leqslant T$ 有

$$f(\bar{X}_t) - f(\bar{X}_0) - \int_0^t Af(\bar{X}_s)\mathrm{d}(s\wedge\tau')$$

$$-\int_0^t \left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d-1} \sigma_i^{\mathrm{T}}\sigma_j f''_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{d-1} b_i f'_{x_i}\right]\bigg|_{\bar{X}_s}\mathrm{d}(s\vee\tau') \tag{6.33}$$

是 $\mathscr{M}_2^c$ 的。再用 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}(s+\tau') = \mathrm{d}(s\wedge\tau') + \mathrm{d}(s\vee\tau')$ 及 σ 的性质便得

$$f(\bar{X}_t) - f(\bar{X}_0) - \int_0^t Af(\bar{X}_s)\mathrm{d}s$$

$$-\int_0^t b_d\frac{\partial f}{\partial x_d}(\bar{X}_s)\mathrm{d}(s\vee\tau') \in \mathscr{M}_2^c. \tag{6.34}$$

但是由 $\bar{X}$ 的定义，在 $\{\tau\leqslant T\}$ 上 $\bar{X}_t\in\partial D$ 当且仅当 $t\geqslant\tau'$，所以

$$\int_0^t I_{\partial D}(\bar{X}_s)\mathrm{d}(s - s\wedge\tau') = \int_0^t I_{\partial D}(\bar{X}_s)\mathrm{d}(s\vee\tau')$$

$$= \int_{t \wedge \tau'}^{t} I_{\partial D}(X_t) \mathrm{d}s = t - t \wedge \tau'.$$

可见 $\varphi_t \equiv \int_0^t b_d(X_s) \mathrm{d}(s \vee \tau')$ 是 X 在 ∂D 的一个广义边界时。

由(6.34)可见，如果 $f \in C_b^2(D)$ 且 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_d}\right|_{\partial D} = 0$，那么

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s) \mathrm{d}s \in \mathscr{M}_2^c. \qquad (6.35)$$

我们来证明满足(6.35)的过程是分布唯一的。事实上，如果另有过程 Z，它取值于 D 且连续对某个 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 适应，同时对任意 $f \in C_b^2(D)$ 且 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_d}\right|_{\partial D} = 0$ 有

$$f(Z_t) - f(Z_0) - \int_0^t Af(Z_s) \mathrm{d}s \in \mathscr{M}_2^c, \qquad (6.35')$$

我们要证明 Z 与 X 同分布。

设 $\delta > 0$ 充分小及 $\hat{x}_0 \in R^{d-1}$，记

$$F_N = \left\{ x = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ x_d \end{pmatrix} : \ 0 \leqslant x_d \leqslant \delta, \ |\hat{x} - \hat{x}_0| \leqslant N \right\}.$$

由(6.30″)及 $b(x)$ 的连续性可知存在 $\varepsilon > 0$，使 $\sup\limits_{x \in F_N} b(x) \leqslant -\varepsilon$.

记 τ_{F_N} 为 Z_t 首次越出 F_N 的时刻(它是 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 停时，$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 右连续).

注意(6.35)，(6.35′)中的 f 和 $\mathscr{M}_2^c$ 可相应地换成 $f \in C^2(D)$ 且 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_d}\right|_{\partial D} = 0$ 和 $\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$。我们取 $f(x) = x_d^2$，于是得到

$$Z_{d,t}^2 - Z_{d,0}^2 - \int_0^t [a^{dd}(Z_s) + 2Z_{d,s} b_d(Z_s)] \mathrm{d}s \in \mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}.$$

设停时列 τ_n 使上面的局部鞅停止为鞅，取初值为 $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ 0 \end{pmatrix}$，那么我们有

$$E_{(x,0)} Z^2_{d,t\wedge\tau_n\wedge\tau_{F_N}}$$

$$= E_{(\hat{x},0)}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tau_{F_N}}[a^{dd}(Z_s)+2Z_{d,s}b_d(Z_s)]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{常数}\int_0^t E_{(\hat{x},0)} Z^2_{d,s\wedge\tau_n\wedge\tau_{F_N}}\mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 不等式得到

$$E_{(\hat{x},0)} Z^2_{d,t\wedge\tau_n\wedge\tau_{F_N}} = 0.$$

因此

$$P_{(x,0)}(Z_{d,t}=0, \forall t)=1.$$

这说明只要从 ∂D 上的点出发(即 $Z_0\in\partial D$)，那么 Z_t 就永远保持在 ∂D内。取 $Z_0\in\partial D$，在(6.35′)中令 $f=x_1,\cdots,x_{d-1}$，我们得到$\left(\text{显然}\frac{\partial f}{\partial x_d}\equiv 0\right)$

$$M_t^{(x)}\equiv\begin{pmatrix} M_t^{(x_1)} \\ \vdots \\ M_t^{(x_{d-1})}\end{pmatrix}\equiv Z_t - Z_0 - \int_0^t \bar{b}(Z_s,0)\mathrm{d}s\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}.$$

与引理6.4类似，我们有

$$\langle M^{(x_i)}, M^{(x_j)}\rangle_t = \int_0^t [A(x_i x_j) - x_i A x_j + x_j A x_i]_{\hat{x}=z_s}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t a^{ij}(z_s,0)\mathrm{d}s.$$

由表示定理可知存在 $d-1$维 Brown 运动 $\hat{B}$，使

$$Z_t - Z_0 - \int_0^t \bar{b}(Z_s,0)\mathrm{d}s = \int_0^t \sigma(Z_s,0)\mathrm{d}\hat{B}_s.$$

又由于系数 $\bar{b},\sigma$ 满足轨道唯一性条件，所以 Z 与$\boldsymbol{X}$中的Y在相同初分布下具有相同的分布。

现在我们再考虑Z在 D^0中的性态。令

$$\tau_n=\inf\left\{t: Z_{d,t}\leqslant\frac{1}{n}\right\},$$

$$C_b^2(D^0)=\{f:\ f\in C_b^2(D),\ f\text{ 的支集在 }D^0\text{内}\}.$$

取$Z_0\in\left\{x:\ x_d\geqslant\frac{1}{n}\right\}$。由(6.35)便得：对任意$f\in C_b^2(D^0)$有

$$M_t^f\equiv f(Z_{t\wedge\tau_n})-f(Z_0)-\int_0^{t\wedge\tau_n}Af(Z_s)\mathrm{d}s\in\mathscr{M}_2^c.$$

仿照定理3.4的证明(分别用$Z_{d,t}$，$[-(1/N),N]$代替X_t及$[-N,N]$)可以得到：对$f=x^i$，$x^ix^j(i,j\leqslant d)$对应的$M^{(f)}\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$。同样用表示定理推出存在$d$维Brown运动$B$，使对于局部化时列$\tilde{\tau}_N$有

$$Z_{t\wedge\tau_n\wedge\tilde{\tau}_N}-Z_0-\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tilde{\tau}_N}b(Z_s)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\tilde{\tau}_N}\sigma(Z_s)\mathrm{d}B_s.$$

设$\tau_n\wedge\tilde{\tau}_N\uparrow\tilde{\tau}$，于是对$Z_0\in D^0$有

$$Z_{t\wedge\tilde{\tau}}=Z_0+\int_0^{t\wedge\tilde{\tau}}\sigma(Z_s)\mathrm{d}B_s+\int_0^{t\wedge\tilde{\tau}}b(Z_s)\mathrm{d}s.$$

由方程的分布唯一性可知，$Z_{\cdot\wedge\tilde{\tau}\wedge\tau}$与$X_{\cdot\wedge\tilde{\tau}\wedge\tau}$在同初分布时具有相同的分布。但是按定义$\tilde{\tau}$与$\tau$分别是$Z,X$首达$\partial D$的时刻，这说明$Z$与$X$在到达$\partial D$前同分布。

综上可知，如果Z,X有相同的初分布，则Z与X同分布，这就证明了(6.35)中过程的分布唯一性。于是对于满足(6.35)的任意两个过程X,Y，恒有

$$E_xf(X_t)=E_xf(Y_t)\quad\left(\forall f\in C_b^2(D),\frac{\partial f}{\partial x_d}\bigg|_{\partial D}=0\right).$$

我们注意到可以用

$$\left\{f\in C_b^2(D),\frac{\partial f}{\partial x_d}\bigg|_{\partial D}=0\right\}$$

函数一致近似$C_K(D)$函数。事实上，$C_K(D)$函数f可用镜面反

射扩至 $x_d \geqslant -1$，再用

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} f(x), & x_d>\frac{1}{n}, \\ f\left(\hat{x},\frac{1}{n}\right), & -1\leqslant x_d\leqslant\frac{1}{n} \end{cases}$$

一致近似。然后$f^{(n)}(x)$再用“光滑算子”作用后的

$$\int f^{(n)}(y)C_h\exp\left(-\frac{h^2}{h^2-|x-y|^2}\right)I_{|y|<h}\mathrm{d}y$$

一致近似($h\to 0$时)。而这最后的函数是属于

$$\left\{f\in C_b(D),\frac{\partial f}{\partial x_d}\bigg|_{\partial D}=0\right\}$$

的。

经过这样的逼近后，我们便得到

$$E_xf(X_t)=E_xf(Y_t)\quad(\forall f\in C_K(D)).$$

仿照命题4.1,命题4.6及引理4.2，我们就得到了 X的强马氏性。再由(6.34)可知，对不同的 x，以 x 为初分布的 X 的分布组成 $\left(A,\frac{\partial}{\partial x_d}\right)$扩散族。

习　题

1. B 为 Brown 运动，

$$g(x)=\begin{cases} \frac{a}{1-a}x, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0, \end{cases}$$

$0<a<1$，g' 为它的对称导数$\left(g'(x)=\frac{1}{2}\left(g'(x+)-g'(x-)\right)\right)$，那么含有对称局部时的方程

$$dX_t = dB_t + (2a-1)dL_t^0(X) \qquad \text{(SBM)}$$

有解的充要条件是 $Y \equiv g(X)$ 满足

$$dY_t = g'(Y_t)dB_t.$$

2. 令 h 为 1 中 g 之逆：

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{a}x, & x<0, \\ x, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

$$A_t = \int_0^t h'(B_s)^2 ds \quad (h' \text{为对称导数}),$$

τ_t 为 A_t 的右连续逆. 求证 $h(B_{\tau_t})$ 是方程(SBM)的解（称为斜 Brown 运动）。

3. B 为 Brown 运动，A 为有限变差连续适应过程，则

$$X_t = B_t + A_t$$

满足(SBM)的充要条件为：对 1 中的 g, $g(X)$ 为鞅（在满足条件下必然有 $A_t = (2a-1)L_t^0(X)$。

4. 证明方程(SBM)的解有分布唯一性. 进而证明它是满足穿透边界条件

$$af'(0+) = (1-a)f'(0-)$$

的扩散过程，意即其弱生成元 $\tilde{A}$ 有

$$\mathscr{D} \equiv \{f \in C_b^2, af'(0+) = (1-a)f'(0-)\} \subset \mathscr{D}(\tilde{A})$$

且 $Af|_{f\in\mathscr{D}} = \frac{1}{2}f''$.

5. 利用 B^+ 的 Tanaka 公式证明：如果 $A_t \equiv \int_0^t I_{(0,\infty)}(B_s)ds$ （B 为 Brown 运动）的右连续逆为 τ_t，则 B_{τ_t} 为反射 Brown 运动，即存在 Brown 运动 $\tilde{B}$，使

$$B_{\tau_t} = \tilde{B}_t + \frac{1}{2}L_t^0(B_\tau).$$

6. 令ξ_t为反射 Brown 运动，另有一个与ξ独立的随机变量 e，它遵从参数为$\frac{a}{1-a}$的指数分布。记$\frac{1}{2}L_t^0(\xi)$的右连续逆为τ_t，那么对于

$$X_t \equiv \xi_t I_{t<\tau_e} + \partial I_{(t \geq \tau_e)}$$

(∂ 为"死"点)及$\forall f \in \{f \in C_b^2,\ af'(0) = (1-a)f(0)\}$，

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(X_s) \mathrm{d}s$$

是鞅。

7. 将比较定理推广到反射 Brown 运动与反射扩散过程，并将比较定理中的b_1, b_2中有一个满足 Lip^{loc}改成(5.14)。

8. 利用B^+，$(1-B)^+$的 Tanaka 公式证明，如果$A_t \equiv \int_0^t I_{(0,1)}(B_s)\mathrm{d}s$的右连续逆为$\tau_t$，则对$X_t \equiv B_{\tau_t}$，存在 Brown 运动$\tilde{B}$，满足方程

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}\tilde{B}_t + \frac{1}{2} L_t^0(X) - \frac{1}{2} L_t^0(1-X)$$

(双侧反射 Brown 运动)。

9. 推广 6 至 8。

10. 定义双侧反射扩散过程。

11. 推广 7，8 与10。

12. 推广1—4至一维多点穿透 Brown 运动。

13. 推广1—4至一维斜扩散过程及其多点穿透情形。

14. 证明在以上各种情形中的解都有轨道唯一性。

15. 证明在以上各种情形中，Yamada-Watanabe 定理仍成立，即轨道唯一性加上弱解存在可推出分布唯一性。

16. 证明以上各种情形中X均为扩散过程，并给出相应的边界条件。

第七章　对半鞅的积分和含点过程的随机微分方程

§7.1　不连续的局部鞅·半鞅及其积分的性质

定义7.1　$(\mathscr{F}_t)$局部鞅 M 称为纯断的，如果对于 $\forall N\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$，$MN$ 是局部鞅。全体纯断的局部鞅类记成$\mathscr{M}^{d,loc}$(注意初值可以不是零)。

引理7.1　有限变差局部鞅是纯断的。

证明　设M是有限变差局部鞅，由定义2.26后面的注2可知，它是局部可积变差鞅，因此它的可料对偶投影$M^p=0$。如果M是一致可积变差鞅，那么对于任意连续有界鞅N有

$$\int_0^t N\mathrm{d}M=\int_0^t N\mathrm{d}M-\int_0^t N\mathrm{d}M^p$$

$$=\int_0^t N\mathrm{d}M-\left(\int_0^t N\mathrm{d}M\right)^p.$$

所以$\int_0^t N\mathrm{d}M$ 也是一致可积变差鞅。另一方面，由引理2.23的证明可知，$NM-\int_0^\cdot N\mathrm{d}M$ 是一致可积鞅，因此NM 是一致可积鞅。当 $N\in\mathscr{M}_2^c$时，利用逼近便得 NM 是鞅。

对于M是局部可积变差鞅且 $N\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$的情形，只需要用局部化方法，就能得到 NM是局部鞅。

命题7.1　对于局部鞅M，存在唯一如下的分解：

$$M=M^c+M^d,$$

其中 $M^c\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$(也记成$\mathscr{M}^{c,\mathrm{loc}}$)，$M^d\in\mathscr{M}^{d,\mathrm{loc}}$．此外

$$[M]_t\equiv\langle M^c\rangle_t+\sum_{s\leqslant t}(\Delta M_s)^2 \qquad (7.1)$$

$$(\Delta M_s\equiv M_s-M_{s-},\ M_{0-}\equiv 0)$$

是右连续$(\mathscr{F}_t)$增过程，称为与M相联系的增过程．

证明 由命题2.26可知，M可以分解成$M^{(1)}+M^{(2)}$，其中$M^{(1)}\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，$M^{(2)}$是一个局部可积变差鞅．于是我们有$M^{(2)}\in\mathscr{M}_2^{d,\mathrm{loc}}$，并且$M^{(1)}=M^{(1)c}+M^{(1)d}$，其中$M^{(1)c}\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$，$M^{(1)d}\in\mathscr{M}_2^{d,\mathrm{loc}}$．令$M^c\equiv M^{(1)c}$，$M^d=M^{(1)d}+M^{(2)}$．这就得到命题要求的一组分解．如果另有一组分解$M=\bar{M}^c+\bar{M}^d$也满足要求，那么

$$M^c-\bar{M}^c=\bar{M}^d-M^d\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}\cap\mathscr{M}^{d,\mathrm{loc}}.$$

于是$M^c-\bar{M}^c\in\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}\cap\mathscr{M}_2^{d,\mathrm{loc}}$．因此，利用定理2.9便得$M^c-\bar{M}^c=0$．这就证明了分解式是唯一的．

往证(7.1)a.e.dP地存在．利用命题2.26，我们有

$$M=\tilde{M}+G+M_0,$$

其中$\tilde{M}$是局部有界鞅，$|\Delta\tilde{M}|<\varepsilon$，$G$是局部可积变差过程．于是存在停时$\tau_n\uparrow\infty$(a.e.$dP$)，使$\tilde{M}^{\tau_n}$是有界鞅，$G^{\tau_n}$是一致可积变差鞅．因此

$$\sum_{s\leqslant\tau_n}(\Delta M_s)^2\leqslant 2\sum_{s\leqslant\tau_n}[(\Delta\tilde{M}_s)^2+(\Delta G_s)^2].$$

但是，我们显然有$\sum\limits_{s\leqslant\tau_n}(\Delta G_s)^2<\infty$．同时，对于$N\equiv\tilde{M}^{\tau_n}$还有

$$E\sum_{s\leqslant t}(\Delta N_s)^2 I_{\{|\Delta N_s|>\frac{1}{m}\}}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_k E(N_{\frac{k+1}{n}}-N_{\frac{k}{n}})^2=EN_t^2.$$

因为N是一致平方可积的，令$m\to\infty$，我们就得到

$$E\sum_{s\leq t}(\Delta N_s)^2\leqslant EN_\infty^2<\infty.$$

因此

$$\sum_s(\Delta N_s)^2<\infty\quad(\text{a.e.}dP).$$

从而有

$$\sum_{s\leq\tau_n}(\Delta M_s)^2<\infty\quad(\text{a.e.}dP).$$

于是

$$\sum_{s\leq t}(\Delta M_s)^2<\infty\quad(\text{a.e.}dP).$$

命题得证。

注 和由$\langle M\rangle$出发用"极化"方法定义$\langle M,N\rangle(M,N\in\mathscr{M}_2^{loc})$类似地我们对 $M,N\in\mathscr{M}^{loc}$可定义

$$[M,N]_t=\langle M^c,N^c\rangle_t+\sum_{s\leq t}(\Delta M)_s(\Delta N)_s. \tag{7.2}$$

$[M,N]$具有与$\langle M',N'\rangle$类似的性质，并且也有相应的 Kunita-Watanabe 不等式，证明方法完全不变。

命题7.2 设τ是可料时或绝不可及时，记

$\mathfrak{M}_2(\tau)=\{M\in\mathscr{M}_2^d;\ M$一致平方可积且在$[[\tau]]$外连续$\}$.

那么我们有

1° $M\in\mathfrak{M}_2(\tau)$，当且仅当存在$\xi\in L^2(\mathscr{F}_\tau)$，使

$M=\xi I_{[[\tau,\infty))}-(\xi I_{[[\tau,\infty))})^p$ （$(\quad)^p$指可料对偶投影）；

2° 若τ_1,τ_2是可料时或绝不可及时且$[[\tau_1]]\cap[[\tau_2]]=\varnothing$，那么在 Hilbert 空间

$\mathfrak{M}_2=\{X$：一致平方可积鞅，$\|X\|_m^2=EX_\infty^2\}$

中$\mathfrak{M}_2(\tau_1)\perp\mathfrak{M}_2(\tau_2)$；

3° 若$M\in\mathfrak{M}_2(\tau)$，$N\in\mathfrak{M}_2$，则

$$EM_\infty N_\infty=E(\Delta M_\tau\Delta N_\tau), \tag{7.3}$$

$$\mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}_2(\tau)} N = \Delta N_\tau I_{[[\tau,\infty))} - (\Delta N_\tau I_{[[\tau,\infty))})^p. \qquad (7.4)$$

证明 1° “$\Leftarrow$”的证明：不妨设 $\xi \geqslant 0$。记 $A = \xi I_{[[\tau,\infty))}$，简记 $\tilde{A} \equiv A^p$。于是

$$M_t = E(A_\infty | \mathscr{F}_t) - E(\tilde{A}_\infty | \mathscr{F}_t) \equiv N_t - E(\tilde{A}_\infty | \mathscr{F}_t).$$

由$\tilde{A}$ 的可料性，我们有

$$E\tilde{A}_\infty^2 = E\left[\int_0^\infty \tilde{A}_\infty \mathrm{d}\tilde{A}_s\right] = E\int_0^\infty \tilde{A}_\infty \mathrm{d}(\tilde{A}_s)^\circ$$

$$= E\int_0^\infty {}^\circ(\tilde{A}_\infty)\mathrm{d}\tilde{A}_s = E\int_0^\infty E(\tilde{A}_\infty | \mathscr{F}_s)\mathrm{d}\tilde{A}_s$$

$$= E\int_0^\infty E(\tilde{A}_\infty | \mathscr{F}_{s-})\mathrm{d}\tilde{A}_s = E\int_0^\infty E(\tilde{A}_\infty | \mathscr{F}_{s-})\mathrm{d}A_s$$

$$= E\int_0^\infty (E[(\tilde{A}_\infty - A_\infty) | \mathscr{F}_{s-}] + E(A_\infty | \mathscr{F}_{s-}))\mathrm{d}A_s$$

$$= E\int_0^\infty [(\tilde{A}_{s-} - A_{s-}) + N_{s-}]\mathrm{d}A_s$$

$$\leqslant E\int_0^\infty (\tilde{A}_\infty + N_{s-})\mathrm{d}A_s$$

$$\leqslant E(\tilde{A}_\infty A_\infty) + E\int_0^\infty N_{s-}\mathrm{d}A_s$$

$$= E\int_0^\infty E(A_\infty | \mathscr{F}_{s-})\mathrm{d}\tilde{A}_s + E\int_0^\infty N_{s-}\mathrm{d}A_s$$

$$= 2E\int_0^\infty N_{s-}\mathrm{d}A_s \leqslant 2E[(\sup_t |N_t|)A_\infty]$$

$$\leqslant 2[E(\sup_t N_t^2)]^{\frac{1}{2}}[EA_\infty^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2(4EN_\infty^2)^{\frac{1}{2}}(EA_\infty^2)^{\frac{1}{2}} = 4EA_\infty^2.$$

所以 $M = A - \tilde{A} \in \mathfrak{M}_2$。

若 τ 是可料时，由引理 2.22 可算出 $\tilde{A} = E(\xi | \mathscr{F}_{\tau-})I_{[[\tau,\infty))}$；

若τ是绝不可及时，那么按正则性的定义可知$A=\xi I_{[[\tau,\infty))}$是正则的，因此$\tilde{A}$连续。这样，不论哪种情形$A-\tilde{A}$在$[[\tau]]$外总是连续的。

任取有界连续鞅N，我们有

$$E[(A_t-\tilde{A}_t)N_t]=E\int_0^t N_s \mathrm{d}(A_s-\tilde{A}_s)=0.$$

用局部化方法可知对于$N\in\mathscr{M}_2^c$，上式仍然成立。于是对于任意$a>0$，停止鞅$(A-\tilde{A})^a\in\mathscr{M}_2^c(a)^\perp$。由此我们便得到$A-\tilde{A}\perp\mathscr{M}_2^c$。因此$M=A-\tilde{A}\in\mathscr{M}_2^d$。

"$\Rightarrow$"是(7.4)的特殊情形。

2°是(7.3)的推论。今证3°。由于1°可知$M=A-\tilde{A}$(A如1°中定义)是一致平方可积变差鞅。定义

$$N_t^{(n)}=E(N_\infty I_{|N_\infty|<n}\mid\mathscr{F}_t).$$

于是$N^{(n)}$是有界鞅，而且

$$E(M_\infty N_\infty^{(n)})=E\int_0^\infty N_\infty^{(n)}\mathrm{d}M=E\int_0^\infty N_\infty^{(n)}\mathrm{d}M^o$$

$$=E\int_0^\infty {}^o(N_\infty^{(n)})\mathrm{d}M=E\int_0^\infty N_s^{(n)}\mathrm{d}M_s.$$

另一方面

$$E\int_0^\infty N_{s-}^{(n)}\mathrm{d}M_s=E\int_0^\infty {}^p(N_{s-}^{(n)})\mathrm{d}M_s=E\int_0^\infty N_{s-}^{(n)}\mathrm{d}(M_s)^p=0.$$

所以

$$E(M_\infty N_\infty^{(n)})=E\int_0^\infty \Delta N_s^{(n)}\mathrm{d}M_s=E(\Delta N_\tau^{(n)}\Delta M_\tau).$$

令$n\to\infty$便得(7.3)。

最后，对$M\in\mathfrak{M}_2$，$(\Delta M_\tau I_{[[\tau,\infty))})^p$在$\tau$是绝不可及时的情形是连续的；在$\tau$是可料时的情形，利用可料停止定理得到其值为0。所以$M-[\Delta M_\tau I_{[[\tau,\infty))}-(\Delta M_\tau I_{[[\tau,\infty))})^p]$在$[[\tau]]$外连续，从而它与$\Delta M_\tau I_{[[\tau,\infty))}-(\Delta M_\tau I_{[[\tau,\infty))})^p$正交。此即(7.4)。

命题7.3 纯断局部鞅是有限变差局部鞅，当且仅当

$$\sum_{s\leqslant t}|\Delta M_s|<\infty \quad (\forall t>0). \tag{7.5}$$

证明 必要性显然。今证充分性。设 $M\in\mathscr{M}^{d,loc}$，且满足(7.5)。那么

$$A_t\equiv\sum_{s\leqslant t}|\Delta M_s|$$

是右连$(\mathscr{F}_t)$增过程。由命题2.26可知 $M=M^{(1)}+M^{(2)}$，其中 $M^{(2)}$是局部可积变差鞅，所以是纯断的，而$M^{(1)}$是局部有界鞅，同时$|\Delta M^{(1)}|$也有界。显见 $M^{(1)}=M-M^{(2)}$ 也是纯断的，并且也满足(7.5)。所以我们不妨设 M 是局部有界的且$|\Delta M|$ 有界。令 $\sigma_n=\inf\{t;\ A_t\geqslant n\}$，那么$A_t^{\sigma_n}\leqslant A_{\sigma_n}\leqslant n+|\Delta M_{\sigma_n}|$是有界的，因此 A_t是局部可积的。由于有局部化方法，我们只需在 M 为有界且 A 为一致可积的情形证明命题。

设停时列τ_n使M的不连续点集恰为$\bigcup_n[[\tau_n]]$，且$[[\tau_n]]\cap[[\tau_m]]=\varnothing$。由停时分解定理我们不妨设$\tau_n$或者是可料时，或者是绝不可及时。由命题7.2及 Bessel 不等式可知

$$M^{(n)}\equiv\sum_{k=1}^{n}(\Delta M_{\tau_k}I_{[[\tau_k,\infty))}-(\Delta M_{\tau_k}I_{[[\tau_k,\infty))})^p)$$

在$\mathfrak{M}_2$中收敛于某个元素 M'。我们可选子列 $M^{(n_k)}$，使

$$\sum_k(E(M_\infty^{(n_k)}-M'_\infty)^2)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

再由 Schwarz 不等式及 Doob 不等式可知

$$E\Big(\sum_k\sup_t|M_t^{(n_k)}-M'_t|\Big)<\infty.$$

因此 $M_t^{(n_k)}$概率为1地对 t 一致收敛到 M'_t。于是 M'的不连续点集也恰是$\bigcup_n[[\tau_n]]$。这样我们有$M,M'\in\mathscr{M}_2^d$，且$M-M'\in\mathscr{M}_2^c$。

因此就必须有 $M-M'=0$，即

$$(\mathfrak{M}_2)\lim_{n\to\infty}M^{(n)}=M.$$

另一方面，由可料对偶投影的定义可知

$$E\int_0^\infty|\mathrm{d}(\Delta M_{\tau_k}I_{[[\tau_k,\infty))})_s^p|$$

$$\leqslant E\int_0^\infty|\mathrm{d}(\Delta M_{\tau_k}I_{[[\tau_k,\infty))})_s|,$$

于是

$$E\sum_{n=1}^\infty|\Delta M_{\tau_k}I_{[[\tau_k,\infty))}(t)-(\Delta M_{\tau_k}I_{[[\tau_k,\infty))}(t))^p|$$

$$\leqslant 2\sum_{n=1}^\infty E\int_0^\infty|\mathrm{d}(\Delta M_{\tau_k}I_{[[\tau_k,\infty))})_s|$$

$$\leqslant 2E\sum_{n=1}^\infty|\Delta M_{\tau_k}|=2EA_\infty<\infty.$$

这说明

$$\sum_1^\infty(\Delta M_{\tau_n}I_{\tau_n\leq t}-(\Delta M_{\tau_n}I_{\tau_n\leq t})^p)$$

以概率为1地绝对收敛，因此它的极限应为有限变差，而这个极限又必须为M。这就证明了命题。

推论 若$M\in\mathscr{M}_2^d$，则存在可料时或绝不可及时τ_n，使

$$[[\tau_n]]\cap[[\tau_m]]=\varnothing\quad(n\neq m),$$

且M的不连续点集合恰为$\bigcup_n[[\tau_n]]$，而且由(7.3),(7.4)得

$$M=(\mathscr{M}_2)\sum_n(\Delta M_{\tau_n}I_{[[\tau_n,\infty))}-(\Delta M_{\tau_n}I_{[[\tau_n,\infty))})^p),\quad(7.6)$$

$$EM_t^2=\sum_n E(\Delta M_{\tau_n\wedge t})^2.\quad\quad(7.7)$$

如果还有 $M\in\mathfrak{M}_2$，则 t 还可取为∞。

命题7.4 若$M\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}$，则 $M^2-[M]$是局部鞅，而且

1° $M\in\mathscr{M}_2^{loc}\Longleftrightarrow\sum_{s\leqslant t}(\Delta M_s)^2$局部可积$\Longleftrightarrow[M]$局部可积；

2° $[M]$存在可料对偶投影$[M]^p\Longleftrightarrow M\in\mathscr{M}_2^{loc}$。在条件成立下，我们有$[M]^p=\langle M\rangle$；

3° $M\in\mathscr{M}_2\Longleftrightarrow[M]$可积；$M\in\mathfrak{M}_2\Longleftrightarrow[M]$一致可积。

证明 不妨设 $M_0=0$。利用命题7.1，我们有

$$
\begin{aligned}
M^2-[M]&=(M^c+M^d)^2-\langle M^c\rangle-\sum(\Delta M)^2\\
&=2M^cM^d+[(M^c)^2-\langle M^c\rangle]+[(M^d)^2-\sum(\Delta M)^2].
\end{aligned}
$$

上式右边前两项由定义可知是局部鞅。对于第三项，先设 $M^d\in\mathfrak{M}_2$。于是对于任意停时 τ，$M^d_{\wedge\tau}\in\mathfrak{M}_2$，利用(7.7)我们有(取 $t=\tau$)

$$
E(M_\tau^d)^2-E\Big(\sum_n\Delta(M_{\tau_n\wedge\tau})^2\Big)=0.
$$

于是 $(M^d)^2-\sum\limits_n(\Delta M_{\tau_n})^2$是鞅。在一般情形有 $M^d\in\mathscr{M}_2^{d,loc}$,我们可用局部化方法得到：$(M^d)^2-\sum(\Delta M)^2$ 是局部鞅。于是在$M\in\mathscr{M}_2$时，$M^2-[M]$是局部鞅。我们证明对于 $M\in\mathscr{M}^{loc}$结论仍然正确。事实上，利用命题2.26的分解，我们有 $M=\overline{M}+G$，其中 $\overline{M}$为局部有界鞅（故有 $\overline{M}\in\mathscr{M}_2^{loc}$），$G$ 是局部可积变差鞅。于是

$$
\begin{aligned}
M^2-[M]&=(\overline{M}^2-[\overline{M}])+(G^2-[G])\\
&\quad+2(\overline{M}^cG-[\overline{M}^c,G])+2(\overline{M}^dG-[\overline{M}^d,G]).
\end{aligned}
$$

前面的结论说明右边第一项是局部鞅；由引理 7.1 得到第三项也是局部鞅；另一方面利用 Lebesgue-Stieltjes 积分分部公式可得

$$
G^2-[G]=2\int_0^\cdot G_{s-}\mathrm{d}G_s.
$$

因G是局部可积变差鞅，故 $G^p=G_0$，所以

$$
\left(\int_0^\cdot G_{s-}\mathrm{d}G_s\right)^p=0,
$$

从而 $G^2-[G]$是局部鞅。又仿引理 2.23 的证明得第四项是局部

鞅，因此$M^2-[M]$是局部鞅。最后，1°—3°的证明是显然的。

推论 若$M,N\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}$，则$MN-[M,N]\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}$，而且$X\equiv[M,N]$是满足方程

$$\Delta X=\Delta M\Delta N,\qquad MN-X\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}\tag{7.8}$$

的唯一有限变差适应过程X。

证明 只需证明唯一性。设另有一个X'也是满足(7.8)的有限变差适应过程。那么$\Delta(X-X')=0$，即$X-X'$连续，同时$X-X'\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}$。由引理2.23可知$X-X'=0$。

命题7.5 设$M\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，$A\in\mathscr{F}$，$\tau$为停时。那么对于任意$\varepsilon,\delta>0$，有

$$\begin{aligned}&P(A\cap\{\sup_{s\leqslant\tau}|M_s|\geqslant\delta\})\\&\quad\leqslant P(A\cap\{\langle M\rangle_\tau\geqslant\varepsilon\})+\frac{\varepsilon}{\delta^2}.\end{aligned}\tag{7.9}$$

特别地，只要$\langle M\rangle_\tau I_A\xrightarrow{p}0$，就有$\sup\limits_{s\leqslant\tau}|M_s|I_A\xrightarrow{p}0$。

证明 令$\sigma=\inf\{t:\ \langle M\rangle_t\geqslant\varepsilon\}$。那么$\sigma$是可料时，$M^\sigma\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$。取$M$的($\sigma$前)预停过程：

$$M^{\sigma-}=M^\sigma-\Delta M_\sigma I_{[[\sigma,\infty))}.$$

由命题2.28，$\Delta M_\sigma I_{[[\sigma,\infty))}\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}$，所以$M^{\sigma-}\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}$。但是$[M]$是增过程，根据命题7.4，显见$[M]^\sigma=[M^\sigma]$是局部可积的，因此$[M]^{\sigma-}$局部可积。但是

$$\begin{aligned}[M^{\sigma-}]&=[M^\sigma-\Delta M_\sigma I_{[[\sigma,\infty))}]\\&=[M^\sigma]-2[M^\sigma,\Delta M_\sigma I_{[[\sigma,\infty))}]+[\Delta M_\sigma I_{[[\sigma,\infty))}]\\&=[M]^\sigma-(\Delta M_\sigma)^2I_{[[\sigma,\infty))}=[M]^{\sigma-},\end{aligned}$$

所以$[M^{\sigma-}]$局部可积，于是$M^{\sigma-}\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，而且由(2.14)得到

$$\begin{aligned}\langle M^{\sigma-}\rangle&=[M^{\sigma-}]^p=([M]^{\sigma-})^p=([M]^p)^{\sigma-}\\&=\langle M\rangle^{\sigma-}\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

即$M^{\sigma-}$一致平方可积。于是

$$P(A\cap\{\sup_{s\le T}|M_s|\geqslant\delta\})$$
$$\leqslant P(A\cap\{\sup_{s\le T}|M_s-M_s^{\sigma-}|>0\})+P(\sup_{s\le T}|M_s^{\sigma-}|\geqslant\delta)$$
$$\leqslant P(A\cap\{\langle M\rangle_T\geqslant\varepsilon\})+P(\sup_{s<\infty}(M^{\sigma-}_{s\wedge T})^2\geqslant\delta^2),$$

其中右方第二项不大于

$$\frac{E(M_{\tau}^{\sigma-})^2}{\delta^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta^2}.$$

命题得证.

推论 若 $M^{(n)},M\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，且$\langle M^{(n)}-M\rangle\to0$，则对于 $\forall T$

$$\sup_{t\le T}|M_t^{(n)}-M_t|\xrightarrow{P}0.$$

下面讨论半鞅积分的不连续性质.

定理7.1 设X为半鞅，Φ为局部有界的可料过程，则

1° $\Delta\int_0^t\Phi\mathrm{d}X=\Phi_t\Delta X_t$；

2° 若 τ 是停时，则$\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}X\right)^{\tau-}=\int_0^t\Phi\mathrm{d}X^{\tau-}$；

3° 若 τ 是可料时，则$\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}X\right)^{\tau-}=\int_0^t\Phi_sI_{[0,\tau)}(s)\mathrm{d}X_s$.

证明 由半鞅的定义，我们只须证明当 $X=M\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$ 时定理正确. 为了在记号上避免混乱，我们在证明 1°时，取 t_0 作为 t. 由命题7.5，1°的左方为

$$\int_{t_0-}^{t_0}\Phi\mathrm{d}M=\lim_{n\to\infty}\int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0}\Phi\mathrm{d}M=\lim_n\int_0^{t_0}\Phi_sI_{(t_0-\frac{1}{n},\,t_0]}(s)\mathrm{d}M_s$$
$$=\int_0^{t_0}\Phi_sI_{\{t_0\}}(s)\mathrm{d}M_s.$$

要证明它就是 $\Phi_{t_0}\Delta M_{t_0}$，只需证明对于$\forall N\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$有

$$\int_0^t\Phi_sI_{\{t_0\}}(s)\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s=\langle\Phi_{t_0}\Delta M_{t_0}I_{[t_0,\infty)},N\rangle_t.$$

我们来证明这个等式。由于 Φ 是可料的，因 此 $\Phi_{t_0}\in\mathscr{F}_{t_0-}$，易验证

$$(\Phi_{t_0}\Delta M_{t_0}I_{[t_0,\infty)})N-\Phi_{t_0}\Delta\langle M,N\rangle_{t_0}I_{[t_0,\infty)}\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}.$$

这就是说

$$\langle\Phi_{t_0}\Delta M_{t_0}I_{[t_0,\infty)},N\rangle=\Phi_{t_0}\Delta\langle M,N\rangle_{t_0}I_{[t_0,\infty)}$$

$$=\int_0^{\cdot}\Phi I_{\{t_0\}}\mathrm{d}\langle M,N\rangle.$$

于是1°得证。

2°的证明：利用1°我们有

$$\int_0^t\Phi\mathrm{d}X^{\tau-}=\int_0^t\Phi\mathrm{d}(X^{\tau}-\Delta X_{\tau}I_{[[\tau,\infty))})$$

$$=\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}X\right)^{\tau}-(\Phi_s\Delta X_sI_{s<t})_{s=\tau}$$

$$=\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}X\right)^{\tau}-\left[\Delta\left(\int_0^s\phi\mathrm{d}X\right)I_{s<t}\right]_{s=\tau}$$

$$=\left(\int_0^t\phi\mathrm{d}X\right)^{\tau}-\Delta\left(\int_0^{\tau}\Phi\mathrm{d}X\right)I_{\tau<t}=\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}X\right)^{\tau-}.$$

3°的证明：不妨设 $X=M\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$。$\Phi$ 局 部 有 界可料，所以 $\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{\mathrm{loc}}(\langle M\rangle)$，并且

$$\left\langle\int_0^t\Phi\mathrm{d}M\right\rangle=\int_0^t\Phi^2\mathrm{d}\langle M\rangle.$$

任取预告 τ 的停时列 τ_n，按轨道用控制收敛定理，我们得到

$$\left\langle\int_0^{\cdot}\Phi I_{(\tau_n,\tau]}\mathrm{d}M-\int_0^{\cdot}\Phi I_{[\tau]}\mathrm{d}M\right\rangle_t$$

$$=\int_0^t\Phi^2I_{(\tau_n,\tau)}\mathrm{d}\langle M\rangle\to0\quad(n\to\infty).$$

由命题 7.5 便得到

$$\int_{\tau_n\wedge t}^{\tau\wedge t}\Phi\mathrm{d}M=\int_0^t\Phi I_{(\tau_n,\tau]}\mathrm{d}M\to\int_0^t\Phi I_{[\tau]}\mathrm{d}M.$$

此即

$$\int_{t\wedge(\tau-)}^{t\wedge\tau}\Phi \mathrm{d}M=\int_0^t \Phi I_{[\tau]}\mathrm{d}M,$$

从而得到3°.

定理7.2 1° 若Φ可料，局部有界，则当X为有限变差局部鞅时$\int_0^t \Phi \mathrm{d}X$也是有限变差局部鞅；

2° 若Φ可料，局部有界，则当$M\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}$时也有

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}M\in\mathscr{M}^{\mathrm{loc}};$$

3° 若X是半鞅，Φ是有限变差适应过程，则

$$\int_0^t \Phi_{s-}\mathrm{d}X_s=\Phi_t X_t-\int_0^t X_s \mathrm{d}\Phi_s,$$

其中右边的积分是按轨道进行的.

证明 1° 由定义2.26的注可知在1°中的X是局部可积变差鞅. 如果Φ可料，局部有界，那么$\int_0^\cdot \Phi \mathrm{d}X$局部可积. 由可料对偶投影的性质，我们就有

$$\left(\int_0^\cdot \Phi \mathrm{d}X\right)^p=\int_0^\cdot \Phi \mathrm{d}X^p=0.$$

因此$\int_0^\cdot \Phi \mathrm{d}X$是局部鞅. 从而是局部可积变差鞅.

2° 是1°与命题2.26的推论.

3° 先设X为有限变差适应过程. 这时结论显然成立. 事实上，如果$F(t)$,$G(t)$为零初值右连增函数，那么只要用Fubini定理计算$[0,t]\times[0,t]$上乘积测度$F\times G$，便得到

$$F(t)G(t)=\int_{[0,t]}F\mathrm{d}G+\int_{[0,t]}G_-\mathrm{d}F.$$

由此立即得到结论. 其次，设$X=M\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$且有界时，按轨道用有界收敛定理，我们有

$$\int_0^t M\mathrm{d}\Phi = \lim_n \int_0^t \sum_k M_{\frac{k+1}{2^n}} I_{(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(s)\mathrm{d}\Phi,$$

$$= \lim_n \int_0^t M\mathrm{d}\Phi^{(n)},$$

其中 $\Phi^{(n)} \in \mathscr{L}_0$。而对于 $\Phi^{(n)}$，3° 的结论是显然的。由命题 2.26

$$\int_0^t \Phi_{s-}\mathrm{d}M_s = \lim_n \int_0^t \Phi_{s-}^{(n)}\mathrm{d}M_s$$

$$= \lim_n \left(\Phi_t^{(n)} M_t - \int_0^t M\mathrm{d}\Phi^{(n)}\right)$$

$$= \Phi_t M_t - \int_0^t M\mathrm{d}\Phi.$$

一般半鞅 X 是上述两种过程的和，所以结论仍成立。

定理7.3 若 $\Phi^{(n)}$ 可料，$|\Phi^{(n)}| \leqslant \Phi$，$\Phi$ 为预局部有界过程(意即存在有界停时 $\tau_k \uparrow \infty$ (a.e.dP)，使 $\Phi I_{[[0,\tau_k))}$ 对固定的 k 是有界的过程)，而且 $\Phi^{(n)} \to 0$，那么对于 $\forall t$ 以及半鞅 X，在 $0 \leqslant s \leqslant t$ 上一致地有

$$\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}X \xrightarrow{P} 0.$$

证明 首先注意如果可料过程 Ψ 预局部有界，那么积分

$$\int_0^t \Psi\mathrm{d}X$$

是存在的。事实上，如果停时 $\tau_k \uparrow \infty$ (a.e.$\mathrm{d}P$)，使 $\Psi I_{[[0,\tau_k))}$ 有界，我们就可以用"预局部化"来定义积分，也就是利用定理7.1定义

$$\left(\int_0^t \Psi\mathrm{d}X\right)^{\tau_k -} \equiv \int_0^t \Psi I_{[0,\tau_k)}\mathrm{d}X^{\tau_k -} \quad (t < \tau_k).$$

易证这样的定义是相容的。

由于 X 可分解成 $M + A$，$M \in \mathscr{M}_2^{loc}$，$A$ 有限变差适应(不妨设 $X_0 = 0$)。因此，如果 $\Phi^{(n)}$ 一致有界，利用命题 7.5 就立刻得

到我们的定理。一般情形有 $C_k>0$ 使

$$|\Phi^{(n)}I_{[[0,\tau_k]]}|\leqslant \Phi I_{[[0,\tau_k]]}\leqslant C_k.$$

于是

$$Y_t^{(n)}\equiv\int_0^t\Phi^{(n)}\mathrm{d}X$$

有定义。而且由定理 7.1 可知当 k 固定时

$$\left(\int_0^t\Phi^{(n)}\mathrm{d}X\right)^{\tau_k-}$$

$$=\int_0^t\Phi_s^{(n)}\mathrm{d}X_s^{\tau_k-}\xrightarrow{p}0\quad(n\to\infty),$$

其中收敛性是在任意有限区间一致地成立，即对 $\forall t$

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\left(\int_0^s\Phi_u^{(n)}\mathrm{d}X_u\right)^{\tau_k-}\right|\xrightarrow{p}0\quad(n\to\infty,k\text{ 固定})$$

在左方这个过程为 $Y_{t\wedge(\tau_k-)}^{(n)*}$，其中

$$Y_t^{(n)*}\equiv\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^s\Phi^{(n)}\mathrm{d}X\right|.$$

因为 τ_k 有限，所以我们有 $Y_{\tau_k-}^{(n)*}\xrightarrow{p}0$(即$E(Y_{\tau_k-}^{(n)*}\wedge 1)\to 0$)(k 固定，$n\to\infty$)。于是对于任意 t

$$E(Y_t^{(n)*}\wedge 1)\leqslant E(Y_{\tau_k-}^{(n)*}\wedge 1)+P(\tau_k\leqslant t).$$

取定 k 使第二项充分小，对此 k 只要 n 充分大就能使第一项充分小，我们便得到 $E(Y_t^{(n)*}\wedge 1)\to 0$。这与定理的结论是等价的。

推论 设X是半鞅，Φ为右连左极适应过程。那么

$$\sum_{k=0}^{2^n-1}\Phi_{\frac{kt}{2^n}}\left(X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}-X_{\frac{kt}{2^n}}\right)\xrightarrow{p}\int_0^t\Phi_{s-}\mathrm{d}X_s,\qquad(7.10)$$

而且在任何有限区间上一致成立。

证明 令

$$\Phi_s^{(n)}\equiv\sum_{k=0}^{2^n-1}\Phi_{\frac{kt}{2^n}}I_{(\frac{kt}{2^n},\frac{(k+1)t}{2^n}]}(s)\to\Phi_{s-}.$$

$\Phi^{(n)}$ 是可料的，Φ_{s-} 左连适应，所以也可料，因此 $\tau_k \equiv \inf\{t: |\Phi_{t-}| \geqslant k\}$ 是停时，而且 $|\Phi^{(n)} - \Phi_{-}| I_{[[0,\tau_k))} \leqslant 2k$，于是 $\Phi^{(n)} - \Phi_{-}$ 满足定理条件。因此

$$\int_0^t (\Phi_s^{(n)} - \Phi_{s-}) \mathrm{d}X_s \xrightarrow{p} 0$$

（在有限区间一致）。又由于 $|\Phi_{-} I_{[[0,\tau_k))}| \leqslant k$，所以 $\int_0^t \Phi_{s-} \mathrm{d}X_s$ 存在，于是(7.10)成立。

引理7.2 X 为半鞅，则

$$A_t \equiv X_t^2 - 2\int_0^t X_{s-} \mathrm{d}X_s \quad (X_{0-} \equiv 0)$$

是非负增过程，而且

$$\Delta A = (\Delta X)^2, \quad A_t = X_0^2 + (p)\lim_{n\to\infty} \sum_k \left(X_{\frac{k+1}{2^n}t} - X_{\frac{k}{2^n}t} \right)^2,$$

称为 X 的平方变差。

证明 利用(7.10)我们有

$$\begin{aligned} A_t &= X_0^2 + (X_t^2 - X_0^2) - 2\int_0^t X_{s-} \mathrm{d}X_s \\ &= X_0^2 + \sum_k \left(X^2_{\frac{k+1}{2^n}t} - X^2_{\frac{k}{2^n}t} \right) \\ &\quad - (p)\lim_{n\to\infty} 2\sum_k X_{\frac{k}{2^n}} \left(X_{\frac{k+1}{2^n}t} - X_{\frac{k}{2^n}t} \right) \\ &= X_0^2 + (p)\lim_{n\to\infty} \sum_k \left(X_{\frac{k+1}{2^n}t} - X_{\frac{k}{2^n}t} \right)^2. \end{aligned}$$

所以是非负增过程。

$$\begin{aligned} \Delta A_t &= \Delta(X_t^2) - 2\Delta\int_0^t X_{s-} \mathrm{d}X_s \\ &= X_t^2 - X_{t-}^2 - 2X_{t-}\Delta X_t = (\Delta X_t)^2. \end{aligned}$$

推论1 设 X, Y 为半鞅，则

$$\Delta\left(X_tY_t - \int_0^t X_{s-}\mathrm{d}Y_s - \int_0^t Y_{s-}\mathrm{d}X_s\right) = \Delta X\Delta Y.$$

推论 2 设M,N为局部鞅，则

$$[M,N] = MN - \int_0^\cdot M_{s-}\mathrm{d}N_s - \int_0^\cdot N_{s-}\mathrm{d}M_s.$$

证明 利用定理 7.2 的2°可知

$$\int_0^\cdot M_{s-}\mathrm{d}N_s, \int_0^\cdot N_{s-}\mathrm{d}M_s$$

是局部鞅。又由引理知道

$$MN - \int_0^\cdot M_-\mathrm{d}N - \int_0^\cdot N_-\mathrm{d}M$$

是有限变差的，其跳跃为$\Delta M\Delta N$，因此

$$MN - \int_0^\cdot M_{s-}\mathrm{d}N_s - \int_0^\cdot N_{s-}\mathrm{d}M_s$$

满足方程(7.8)。

定义7.2 设X为半鞅，X^c 为它的连续部分，我们称

$$[X]_t \equiv \langle X^c\rangle_t + \sum_{s<t}(\Delta X_t)^2 \tag{7.11}$$

为与半鞅X联系的增过程(有时$[X]$也记成$[X,X]$)。

同时我们也可定义$[X,Y]$，并得到相应的 Kunita-Watanabe 不等式。证明推导办法完全与局部平方可积鞅的特征类似。

我们要证明$[X]$就是引理 7.2 中的平方变差，也就是要证明推论 2 可推广至半鞅情形。

引理7.3 若M是局部鞅，A是有限变差适应过程，则

$$MA - M_0A_0 - \int_0^t M_s\mathrm{d}A_s$$

是局部鞅(因而 MA是半鞅)。如果A还是可料的，那么

$$MA - M_0A_0 - \int_0^t M_{s-}\mathrm{d}A_s$$

也是局部鞅(因而MA是特殊半鞅)。

证明 不妨假定$M_0 = A_0 = 0$。设A是可料的情形。此时

$\int_0^t |\mathrm{d}A_s|$也可料。设τ_n是停时列，它使M^{τ_n}是一致可积鞅。设$\tau_{n,k}$是预告$\inf\left\{t: \int_0^t |\mathrm{d}A_s| \geqslant k\right\}$的停时列。令$\sigma_n = \tau_n \wedge \tau_{n,n}$，于是$\int_0^{\sigma_n} |\mathrm{d}A_s|$有界。因此我们不妨设$M$，$A$都是一致可积的，而且$A$是增过程。这样，仿照引理2.23（但是用可料对偶投影代替可选对偶投影)，对于任意停时τ我们有：

$$E\left(M_\tau A_\tau - \int_0^\tau M_{s-}\mathrm{d}A_s\right) = E(M_\tau A_\tau) - E\int_0^\tau M_{s-}\mathrm{d}A_s = 0.$$

所以$MA - \int_0^\cdot M_{s-}\mathrm{d}A_s$是鞅。

现在讨论A是适应的情形。设τ_n如上面定义。令

$$\sigma_n = \tau_n \wedge \inf\left\{t: \int_0^t |\mathrm{d}A_s| \geqslant n\right\}.$$

定义$\bar{A} = A^{\sigma_n-}$。显然$\bar{A}$的全变差是有界的。仿引理2.23便得

$$M\bar{A} - \int_0^t M\mathrm{d}\bar{A}$$

是鞅。但是在$t < \sigma_n$时

$$MA - \int_0^t M\mathrm{d}A = M\bar{A} - \int_0^t M\mathrm{d}\bar{A},$$

而且等号两边的量在$[[\sigma_n]]$上的增量相同，它们都是

$$A_{\sigma_n-}\Delta M_{\sigma_n}.$$

因此

$$\left(MA - \int_0^t M\mathrm{d}A\right)^{\sigma_n} = \left(M\bar{A} - \int_0^t M\mathrm{d}\bar{A}\right)^{\sigma_n}.$$

所以$MA - \int_0^t M\mathrm{d}A$是局部鞅。

定理7.4 若X，Y是半鞅，则

$$[X,Y]_t = X_t Y_t - \int_0^t X_{s-}\mathrm{d}Y_s - \int_0^t Y_{s-}\mathrm{d}X_s \tag{7.12}$$

$$= X_0Y_0 + (p)\lim_{n\to\infty}\sum_k X_{\frac{k}{2^n}t}(X_{\frac{k+1}{2^n}t} - X_{\frac{k}{2^n}t}), \quad (7.13)$$

也就是"分部积分公式"

$$d(XY) = X_-dY + Y_-dX + d[X,Y]. \quad (7.14)$$

证明 当X,Y都是局部鞅时，(7.12)即引理7.3推论2；当X,Y都是有限变差适应过程时，(7.12)即是普通Lebesgue-Stieltjes积分的分部公式；为了证明一般情形的(7.12)，我们只须假定X为局部鞅，Y为有限变差适应过程. 在这种情形时，由定理7.2的3°可知

$$XY - \int_0^t X dY = \int_0^t Y_- dX.$$

因此(7.12)的右方等于

$$\int_0^t \Delta X dY = \sum_{s\leq t}\Delta X_s \Delta Y_s = [X,Y].$$

(7.12)得证. (7.13)就是(7.12)与引理7.2的直接推论.

推论 若X是半鞅，A是有限变差适应过程，则

$$[X,A] = \int \Delta X dA, \quad XA = \int A_- dX + \int X dA. \quad (7.15)$$

如果A还是可料的，则还有

$$[X,A] = \int \Delta A dX, \quad XA = \int A dX + \int X_- dA. \quad (7.16)$$

证明 (7.15)的证明已含于(7.12)的证明之中. 为证(7.16)，不妨假定$X\in\mathscr{M}_2^{loc}$. 任取$N\in\mathscr{M}_2^{c,loc}$，由Kunita-Watanabe不等式可知$\langle X,N\rangle$是连续的，因此

$$\left\langle \int \Delta A dX, N \right\rangle = \int \Delta A d\langle X,N\rangle = 0.$$

于是$\left(\int \Delta A dX\right)^c = 0$. 但是由定理7.1 $\Delta\int(\Delta A)dX = \Delta A \Delta X$，所以

$$\int_0^t \Delta A \mathrm{d}X = \sum_{s \leq t} \Delta A_s \Delta X_s = [X, A].$$

定理7.5 若 X, Y 是半鞅，Φ 可料局部有界，则

$$\left[\int \Phi \mathrm{d}X, Y\right] = \int \Phi \mathrm{d}[X, Y].$$

证明 任取 X 的一个分解：$X = X_0 + M + A$，其中 $M \in \mathscr{M}_2^{loc}$，并有分解 $M = M^c + M^d$（$M^c \in \mathscr{M}_2^{c,loc}$，$M^d \in {}_2^{d,loc}$），$A$ 是有限变差适应过程．不妨设 $X_0 = 0$．于是有

$$\left\langle \int \Phi \mathrm{d}M^c, \int \Phi \mathrm{d}M^d \right\rangle = \int \Phi^2 \mathrm{d}\langle M^c, M^d \rangle = 0.$$

因此

$$\left(\int \Phi \mathrm{d}X\right)^c = \int \Phi \mathrm{d}M^c.$$

于是由 $X^c = M^c$，我们有

$$\begin{aligned}
\left[\int \Phi \mathrm{d}X, Y\right]_t &= \left\langle \int \Phi \mathrm{d}X^c, Y^c \right\rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta\left(\int \Phi \mathrm{d}X\right)_s \Delta Y_s \\
&= \int \Phi \mathrm{d}\langle X^c, Y^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Phi_s \Delta X_s \Delta Y_s \\
&= \int_0^t \Phi \mathrm{d}[X, Y].
\end{aligned}$$

§7.2 正交鞅测度和对它的积分

设 $\mathscr{R}_0$ 为集合 U 的某些子集组成的一个环．

定义7.3 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ 上依赖于 $t(\geqslant 0)$，$A(\in \mathscr{R}_0)$ 的随机变量族 $\mu(t, A)$ 称为定义在可测空间 $(U, \sigma(\mathscr{R}_0))$ 上的 $(\mathscr{F}_t)$ 正交鞅测度，如果

1° 对固定的 $A \in \mathscr{R}_0$，$\mu(t, A) \in \mathscr{M}_2(\mathscr{F}_t)$（当然右连左极）；

2° 对固定的$t\geq 0$，$\mu(t,A)$对A是有限可加的；

3° 对ω,t固定，$\langle\mu(\cdot,A)\rangle_t$可以扩张成$\sigma(\mathscr{R}_0)$上的某个测度$\pi(t,A)$；

4° 对$A,B\in\mathscr{R}_0$且$A\cap B=\varnothing$，$\mu(t,A)\mu(t,B)$是$(\mathscr{F}_t)$鞅(即$\langle\mu(\cdot,A),\mu(\cdot,B)\rangle=0$)。

注 2°,4°合起来，我们有：对于$A,B\in\mathscr{R}_0$

$$\langle\mu(\cdot,A),\mu(\cdot B)\rangle=\langle\mu(\cdot,A\cap B)\rangle. \tag{7.17}$$

定义7.4 $[0,\infty)\times\mathscr{R}_0$上定义并取值于$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$的随机变量族$\mu(t,A)$称为$(U,\sigma(\mathscr{R}_0))$上的$(\mathscr{F}_t)$局部正交鞅测度，如果存在$(\mathscr{F}_t)$停时列$\tau_n\uparrow\infty$ (a.e.dP)，使$\mu(t\wedge\tau_n,A)$是$(\mathscr{F}_t)$正交鞅测度。

设μ为$(U,\sigma(\mathscr{R}_0))$上$(\mathscr{F}_t)$正交鞅测度，记

$$\mathscr{L}_0=\left\{\Phi(t,u):\ \Phi(t,u)=\sum_0^{n-1}\Phi_k I_{(t_k,t_{k+1}]\times A_k}(t,u),\right.$$

$$\left.A_k\in\mathscr{R}_0,\Phi_k\text{ 有界}\in\mathscr{F}_{t_k}\right\}. \tag{7.18}$$

对于$\mathscr{L}_0$函数，我们定义随机积分

$$\int_0^t\int_U\Phi(s,u)\mu(ds,du)=\sum_0^{n-1}\Phi_k[\mu(t\wedge t_{k+1},A_k)-\mu(t\wedge t_k,A_k)]. \tag{7.19}$$

对于$p\geq 1$，我们记

$$\mathscr{L}_p(\langle\mu\rangle)=\left\{\Phi(t,u):\ \text{对于}((t,w),u),\Phi(t,u)\in\overline{\mathscr{P}\times\sigma(\mathscr{R}_0)},\text{ 而且对于}\forall t\geq 0,\text{ 有}\right.$$
$$\left.E\int_0^t\int_U|\Phi(s,u)|^p\pi(ds,du)<\infty\right\},$$

其中$\mathscr{P}$是$(\mathscr{F}_t)$可料σ代数(见命题1.2)，$\overline{\mathscr{P}\times\sigma(\mathscr{R}_0)}$是指$P$完备化。

再定义$\mathscr{P}\times\sigma(\mathscr{R}_0)$上的测度$\hat{P}$：对于$A\in\sigma(\mathscr{R}_0)$，$\Lambda\in\mathscr{F}$，

$$\hat{P}((s,t]\times \Lambda\times A)=E\left(I_\Lambda\int_s^t\int_A \pi(dv,du)\right), \qquad (7.20)$$

$$\hat{P}(\Lambda_0\times A)=0 \qquad (\Lambda_0\in\mathscr{F}_0). \qquad (7.21)$$

显然我们有

$$\mathscr{L}_2(\langle\mu\rangle)=\bigcap_n L_2([0,n)\times U\times\Omega,\mathscr{P}\times\sigma(\mathscr{R}_0),\hat{P}), \qquad (7.22)$$

其中$\mathscr{P}\times\sigma(\mathscr{R}_0)$，$\hat{P}$ 应理解成在 $0\leqslant t<n$ 上的相应的限制．于是$\mathscr{L}_2(\langle\mu\rangle)$是 Frechet 空间．而且与命题 1.5 类似地可证

$$\overline{\mathscr{L}_0}=\mathscr{L}_2(\langle\mu\rangle). \qquad (7.23)$$

再记$\hat{\mathscr{L}}_p^{loc}(\langle\mu\rangle)=\{\Phi\in\overline{\mathscr{P}\times\sigma(\mathscr{R}_0)}$，且存在$(\mathscr{F}_t)$停时列$\tau_n\uparrow\infty$，使

$$\Phi(t\wedge\tau_n,u)\in\mathscr{L}_p(\langle\mu\rangle)\}.$$

如果$\pi(t,A)$都是连续过程，我们还可以定义 $\mathscr{L}_2^{loc}(\langle\mu\rangle)$：

$$\mathscr{L}_p^{loc}(\langle\mu\rangle)=\left\{\Phi\in\overline{\mathscr{P}\times\sigma(\mathscr{R}_0)}:\ \text{对于}\ \forall\, t\geqslant 0,\right.$$

$$\left.P\left(\int_0^t\int_U|\Phi(s,u)|^p ds du<\infty\right)=1\right\},$$

并且对于 $\Phi,\Psi\in\mathscr{L}_p^{loc}(\langle\mu\rangle)$，定义距离范数(不是 Banach 范 数)

$$\|\Phi-\Psi\|^p_{\mathscr{L}_p^{loc}(\langle\mu\rangle)}=\sum_n\frac{1}{2^n}E\left[\left(\int_0^n\int_U|\Phi-\Psi|^p\pi(ds,du)\right)\wedge 1\right]. \qquad (7.24)$$

于是$\mathscr{L}_p^{loc}(\langle\mu\rangle)$是距离空间，而且$\mathscr{L}_0$ 在$\mathscr{L}_p^{loc}(\langle\mu\rangle)$中稠，且

$$\mathscr{L}_p^{loc}(\langle\mu\rangle)=\hat{\mathscr{L}}_p^{loc}(\langle\mu\rangle). \qquad (7.25)$$

有了(7.23)与(7.25)，我们可以仿照第一章对于$\mathscr{L}_2(\langle\mu\rangle)$，$\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle\mu\rangle)$函数 Φ 定义随机积分 $\int_0^t\int_U\Phi(s,u)\mu(ds,du)$，它分别属于$\mathscr{M}_2$（当 $\Phi\in\mathscr{L}_2(\langle\mu\rangle)$时）与 $\mathscr{M}_2^{loc}$（当 $\Phi\in\hat{\mathscr{L}}_2^{loc}(\langle\mu\rangle)$时），而且恒有特征

$$\left\langle\int_0^{\cdot}\int_U \Phi(s,u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\right\rangle_t = \int_0^t\int_U \Phi^2(s,u)\pi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u). \quad (7.26)$$

类似地，如果 μ 为$(U,\sigma(\mathscr{R}_0))$上$(\mathscr{F}_t)$正交局部鞅测度，那么存在$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n\uparrow\infty$，使 $\mu^{\tau_n}(t,A)\equiv\mu(t\wedge\tau_n,A)(A\in\mathscr{R}_0)$为$(\mathscr{F}_t)$正交鞅测度，于是对于 Φ，只要

$$\Phi(s,u)I_{[0,\tau_n]}(s)\in\mathscr{L}_2(\langle\mu^{\tau_n}\rangle),$$

可定义

$$\int_0^t\int_U \Phi(s,u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

$$=\int_0^t\int_U \Phi(s,u)\mu^{\tau}\pi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) \quad (t\leqslant\tau_n). \quad (7.27)$$

它是特征为$\int_0^t\int_U|\Phi(s,u)|^2\pi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$的$(\mathscr{F}_t)$局部平方可积鞅。

如果两个$(\mathscr{F}_t)$正交局部鞅测度μ_1,μ_2的互特征为：

$$\langle\mu_1(\cdot,A),\mu_2(\cdot,B)\rangle_t\equiv\pi^*(t,A\times B) \quad (A,B\in\mathscr{R}_0), \quad (7.28)$$

而且设 $\pi^*(t,A\times B)$对于 ω,t 固定后是 $\sigma(\mathscr{R}_0)\times\sigma(\mathscr{R}_0)$上的测度，又在 $\mathscr{R}_0\times\mathscr{R}_0$ 上有限，那么，对于 $\Phi_i\in\hat{\mathscr{L}}_2^{\mathrm{loc}}(\langle\mu_i\rangle)(i=1,2)$有

$$\left\langle\int_0^{\cdot}\int_U \Phi_1(s,u)\mu_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),\int_0^{\cdot}\int_U \Phi_2(s,u)\mu_2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\right\rangle$$

$$=\int_0^t\int_{U\times U}\Phi_1(s,u_1)\Phi_2(s,u_2)\pi^*(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u_1\times\mathrm{d}u_2). \quad (7.29)$$

§7.3 取值于R^d的点过程·整值随机测度及其分解

由引理2.12可知，一个右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程的全部不连

续点恰在一串停时$\{\sigma_n\}$上．把这个事实作为背景，我们可以定义取值于R^1上的点过程．

记

$$\Pi=\{p:\ p\text{是在}(0,\infty)\text{中某可数个点上定义并取值于}R^d\backslash\{0\}\text{的函数}\}.$$

Π中的元素称为取值于$R^d\backslash\{0\}$的点函数．点函数可以形象地表示为

$$p=p_t=\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_n, & \cdots\\ u_1,\cdots,u_n, & \cdots\end{pmatrix}\quad (u_k=p(t_k)).$$

对此点函数，有一个计数测度$\nu_p(t,A)$与它对应．$\nu_p(t,A)$定义如下：对$t\geqslant 0$，$A\in\mathscr{B}(R^d\backslash\{0\})$

$$\nu(t,A)\equiv\nu_p(t,A)={}^{*}\{n:\ (t_n,u_n)\in(0,t]\times A\},$$

其中$^{*}\{\quad\}$表示集合$\{\quad\}$中的元素个数，所以$^{*}\{\quad\}\leqslant\infty$．

定义7.5 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上随机点函数$p(\omega)$（即$\Omega\to\Pi$）称为点过程，如果对于任意$t\geqslant 0$，$A\in\mathscr{B}(R^d\backslash\{0\})$，$p_t=p_t(\omega)$的计数测度$\nu(t,A)$（计数过程）是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上非负广义整值（即可取$+\infty$）随机变量．如果还有$\nu(t,A)$对$(\mathscr{F}_t)$适应，则称点过程为$(\mathscr{F}_t)$（适应）点过程．

$(\mathscr{F}_t)$点过程p_t或其计数过程（计数测度）$\{\nu(t,\cdot)\}$称为σ有限的，如果存在$U_n\in\mathscr{B}(R^d\backslash\{0\})$，使$U_n\uparrow R^d\backslash\{0\}$，而且$E\nu(t,U_n)<\infty$；称为局部$\sigma$有限的，如果存在$(\mathscr{F}_t)$停时$\tau_m\uparrow\infty$及$U_n\uparrow R^d\backslash\{0\}$，使$E\nu(t\wedge\tau_m,U_n)<\infty$．

$(\mathscr{F}_t)$点过程$p=p_t$称为是拟左连续的，如果对于

$$\mathscr{B}_0\equiv\{A:\ \forall t, E\nu(t,A)<\infty\}$$

及$(\mathscr{F}_t)$停时$\tau_n\uparrow\tau$，恒有$E\nu(t\wedge\tau_n,A)\to E\nu(t\wedge\tau,A)$．易验证这个极限关系对于任意$A\in\mathscr{B}(R^d\backslash\{0\})$仍然成立．并且如果这个极限关系对于$A$属于$R^d\backslash\{0\}$的某个生成$\mathscr{B}(R^d\backslash\{0\})$的环成立，就

能推出对于一切 $A\in\mathscr{B}(R^d\backslash\{0\})$ 成立。

例1 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ 上 $M\in\mathscr{M}_2$，则 M 的不连续点及它在这些点上的跃度是一个取值于 $R^d\backslash\{0\}$ 的 σ 有限点过程。这时 $U_n=\{x: |x|\geqslant 1/n\}$。在 (t,ω) 固定时，$\nu(t,A)$ 可以扩展为 $\mathscr{B}(R^d\backslash\{0\})$ 上广义整值测度。

对于 $M\in\mathscr{M}_2^{loc}$，我们也有类似结论。这时候，点过程是局部 σ 有限的。

证明 不妨只证 $M\in\mathscr{M}_2$ 的情形。由引理2.12证明的1°可知 M 的全体不连续点可以写成 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\cdots$，它们都是 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，M 在这些点上的跃度为 $\Delta M_{\sigma_k}=M_{\sigma_k}-M_{\sigma_k-}$。于是

$$p=\begin{pmatrix}\sigma_1,\cdots,\sigma_k,\cdots\\ \Delta M_{\sigma_1},\cdots,\Delta M_{\sigma_k},\cdots\end{pmatrix}$$

是取值于 $(R^d\backslash\{0\},\mathscr{B}R^d\backslash\{0\}))$ 的点过程。对于 R^d 上

$$A\in\mathscr{B}=\bigcup_n\left(\left\{|u|\geqslant\frac{1}{n}\right\}\cap\mathscr{B}[0,\infty)\right),$$

我们有

$$\nu(t,A)=\sum_s I_{\{\sigma_n\leqslant t\}\cap(M_s-M_{s-})|_{s=\sigma_n}\in A\}}(\omega).$$

因为 M_s 右连 $(\mathscr{F}_t)$ 适应，M_{s-} 左连 $(\mathscr{F}_t)$ 适应从而 $(\mathscr{F}_t)$ 可料，所以 M_s-M_{s-} 是 $(\mathscr{F}_t)$ 循序的。于是

$$(M_s-M_{s-})|_{s=\sigma_n}\in\mathscr{F}_{\sigma_n}.$$

由此

$$\nu(t,A)\in\mathscr{F}_t,$$

而且 $\nu(t,A)$ 是右连 $(\mathscr{F}_t)$ 适应增过程。

由命题7.4，我们有

$$E\nu\left(t,\left[\frac{1}{n},\infty\right)\right)\leqslant E\sum_{\substack{|\Delta M_s|\geqslant\frac{1}{n}\\ s\leqslant t}}1\leqslant E\left(n^2\sum_{\substack{|\Delta M_s|\geqslant\frac{1}{n}\\ s\leqslant t}}(\Delta M_s)^2\right)$$

$$\leqslant E(n^2[M]_t)<\infty.$$

因此点过程是 σ 有限的.

类似地，对于 $A\subset[1/n,\infty)$，停时 $\tau_n\uparrow\tau$，我们有

$$E[\nu(\tau\wedge a,A)-\nu(\tau_n\wedge a,A)]\leqslant n^2(E[M]_{\tau\wedge a}-E[M]_{\tau_n\wedge a})$$

$$=n^2(E\langle M\rangle_{\tau\wedge a}-E\langle M\rangle_{\tau_n\wedge a}).$$

所以在 $E\langle M\rangle$连续时，点过程是拟左连续的.

例 2 取值于 R^d 的右连左极适应过程X的不连续点及其上的跃度是一个局部 σ 有限的点过程.

证明 令$U_m=\{u:|u|\geqslant 1/m\}$, $\tau_m^n=\inf\{t: \nu(t,U_m)\geqslant n\}$, 其中$\nu(t,A)$为所涉及的计数过程. 那么$\nu(t\wedge\tau_n,U_m)\leqslant n+1$，取$\tau_n\equiv\tau_n^n$即满足要求.

引理7.4 若$X=(X_t)_{t\geqslant 0}$是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上的$(\mathscr{F}_t)$独立增量过程，其轨道无第二类间断点，则

1° X为随机连续(即按概率收敛连续)，当且仅当$\forall t, P(X_t=X_{t-})=1$(此时$X$有Levy修正，即随机连续的右连左极独立增量过程)；

2°(Levy 过程) X 的不连续点及X在这些点上的跃度是一个σ有限点过程. 对于$A\in\mathscr{R}=\bigcup\limits_n\mathscr{B}(|x|\geqslant 1/n)$及$t$固定，这个点过程的计数测度$\nu(t,A)$满足

$P(\nu(t,A)=\nu(t-,A))=1$，$E\nu(t,A)^m$有限，连续($\forall m$).

证明 1° 只需证明必要性. 当ε充分小时，我们有

$$P\left(|X_t-X_{t-}|\geqslant\frac{1}{k}\right)$$

$$\leqslant P\left(|X_t-X_{t-\varepsilon}|\geqslant\frac{1}{2k}\right)+P\left(|X_{t-}-X_{t-\varepsilon}|\geqslant\frac{1}{2k}\right)$$

$$\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

这就证明了1°的必要性. 此时我们还有

$$P(\nu(t,A)=\nu(t-,\ A))=P(X_t=X_{t-})=1.$$

所以为证2°，余下的只需证明$E\nu(t,|x|\geqslant 1/N)^m<\infty$。我们取

$$0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}=t\quad(\max_k(t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)})\xrightarrow{n\to\infty}0),$$

于是我们有

$$\nu(t,|x|\geqslant\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}I_{(|x|\geqslant\varepsilon)}(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}).$$

又因为$P(\nu(t,|x|\geqslant\varepsilon)<\infty)=1$，所以对于

$$S_n^{(n)}\equiv\sum_{k=1}^{n}I_{(|x|\geqslant\varepsilon)}(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}).$$

只要L充分大，就有$P(|S_n^{(n)}|>L)$一致小。但是$S_n^{(n)}$是通项为小于1的非负随机变量的独立和，我们来证明：对任意m，恒有$E|S_n^{(n)}|^m$对于n一致有界。即要证明下面的2°°：

2°° 如果$\{\xi_k^{(n)}\}$相互独立，

$$P(|\xi_k^{(n)}|\leqslant 1)=1,\ S_n^{(n)}=\xi_1^{(n)}+\cdots+\xi_n^{(n)},$$

那么只要选L，使$P(|S_n^{(n)}|>L)$充分小，就有

$$E|S_n^{(n)}|^m\leqslant C_L^{(m)}\ (\text{只与}L,m\text{有关的一个常数})。\quad(7.30)$$

我们分两步来证明2°°。为书写方便我们略去上标n。

第一步。设ξ_k都是对称分布，即$P(\xi_k>0)=P(\xi_k<0)$。由于ξ_k之间是独立的，而且它们都是对称的，对$n>k$我们有

$$\begin{aligned}P((S_n-S_k)\geqslant L)&\leqslant P((S_n-S_k)\geqslant L,S_k\geqslant 0)\\&\quad+P(S_n-S_k\geqslant L,S_k\leqslant 0)\\&=2P(S_n-S_k\geqslant L,S_k\geqslant 0)\leqslant 2P(S_n\geqslant L).\end{aligned}$$

从而 $$P(|S_n-S_k|\geqslant L)\leqslant 2P(|S_n|\geqslant L).$$

于是由$\{\xi_k\}$的独立性推出

$$P(|S_n|>2L+1)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,|S_k|\geqslant L,|S_n-S_k|\geqslant L)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,|S_k|\geqslant L)P(|S_n-S_k|\geqslant L)$$

$$\leqslant 2P(|S_n|\geqslant L)\sum_{k=1}^{n} P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,|S_k|\geqslant L).$$

再利用对称性得

$$P(\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant L)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,|S_k|\geqslant L)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,S_k\geqslant L)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P(S_n-S_k\geqslant 0)}P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,$$
$$S_k\geqslant L,S_n-S_k\geqslant 0)$$

$$\leqslant 4\sum_{k=1}^{n} P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,S_k\geqslant L,S_n-S_k\geqslant 0)$$

$$\leqslant 4\sum_{k=1}^{n} P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,|S_k|\geqslant L,S_n\geqslant L)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,|S_k|\geqslant L,|S_n|\geqslant L)$$

$$= 2P(|S_n|\geqslant L)\Big[\sum_{k=1}^{n-1} P(|S_1|<L,\cdots,|S_{k-1}|<L,|S_k|\geqslant L)$$
$$+P(|S_1|<L,\cdots,|S_{n-1}|<L)\Big]$$

$$\leqslant 2P(|S_n|\geqslant L).$$

注 这就是独立对称随机变量和的最大值的截尾不等式，它比Kolmogorov 不等式更为精确，因为它不必要假定S_n的矩的存在性。这是附加了对称性及$|\xi_k|\leqslant 1$要求才得到的。

于是我们有

$$P(|S_n|\geqslant 2L+1)\leqslant 4P(|S_n|\geqslant L)^2.$$

再用一次这个等式便有

$$P(|S_n|\geqslant 4L+3)=P(|S_n|\geqslant 2(2L+1)+1)$$
$$\leqslant 4P(|S_n|\geqslant 2L+1)^2$$
$$\leqslant 4\cdot(4P(|S_n|\geqslant L)^2)^2=4^3P(|S_n|\geqslant L)^4.$$

归纳地可得到

$$P(|S_n|\geqslant 2^mL+(2^m-1))\leqslant 4^{2^m-1}P(|S_n|\geqslant L)^{2^m}.$$

于是

$$Ee^{\varepsilon|S_n|}\leqslant E(e^{\varepsilon|S_n|}I_{|S_n|<L})$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}E(e^{\varepsilon|S_n|}I_{(2^{m-1}L+2^{m-1}-1<|S_n|<2^mL+2^m-1)})$$
$$\leqslant e^{\varepsilon L}+\sum_{m=1}^{\infty}e^{\varepsilon(2^mL+2^m-1)}\cdot 4^{2^{m-1}-1}P(|S_n|\geqslant L)^{2^{m-1}}.$$

因此只要L充分大，$\varepsilon=\varepsilon(L)$适当地小，就有仅依赖于$L$的常数$C_L$，使$Ee^{\varepsilon|S_n|}\leqslant C_L$。这样就推得(7.30)。

第二步在ξ_k并不对称时证明(7.30)。作ξ_k'，使$\{\xi_k,\xi_k'\}$独立，而且ξ_k'与ξ_k同分布。令$\hat{\xi}_k=(\xi_k-\xi_k')/2$，那么$\hat{\xi}_k$是对称的。记$\hat{S}_k=\hat{\xi}_1+\cdots+\hat{\xi}_k$，$S_k'=\xi_1'+\cdots+\xi_k'$。于是

$$Ee^{-\frac{\varepsilon}{2}|S_n|}\geqslant e^{-\frac{\varepsilon}{2}L}P(|S_n|\leqslant L).$$

因此当适当选取ε时，有常数A_L，使

$$(Ee^{-\frac{\varepsilon}{2}|S_n|})^{-1}\leqslant e^{\frac{\varepsilon}{2}L}\cdot\frac{1}{1-P(|S_n|\geqslant L)}\leqslant A_L.$$

这样我们就有

$$C_L\geqslant Ee^{\varepsilon|\hat{S}_n|}=Ee^{\varepsilon\left|\frac{1}{2}S_n-\frac{1}{2}S_n'\right|}$$
$$\geqslant Ee^{\frac{\varepsilon}{2}(|S_n|-|S_n'|)}=Ee^{\frac{\varepsilon}{2}|S_n|}Ee^{-\frac{\varepsilon}{2}|S_n|},$$

从而

$$Ee^{\frac{\varepsilon}{2}|S_n|}\leqslant C_L(Ee^{-\frac{\varepsilon}{2}|S_n|})^{-1}\leqslant C_LA_L. \qquad (7.31)$$

于是(7.30)得证。

推论 对于Levy过程的不连续点的计数测度$\nu(t,A)$，存在$\varepsilon>0$，使$Ee^{\varepsilon\nu(t,A)}<\infty$。

证明 这是(7.31)的推论。

定义7.6 记U为R^d中一个普遍可测集。概率空间$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上含参数$u\in U$的随机过程$\Phi(t,u)(=\Phi(t,\omega,u))$是指$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}\times\mathscr{B}(U)$可测函数，其中$\mathscr{B}(U)$是指$U$在$R^d$中的相对 Borel 代数。$\Phi$称为可料的(相应地：可选的)含参过程，如果$\Phi(t,\omega,u)$对$\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U)$(相应地：$\mathscr{O}\times\mathscr{B}(U)$)可测。含参过程$\Phi$称为不足道的，如果$P(\{\omega:\ \Phi(t,\omega,u)\neq 0(\exists(t,u))\})=0$。$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$上非负广义实值(即可取$+\infty$)随机变量族$\{\nu(\cdot)=\nu(\omega,\cdot):\ \cdot\in\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{B}(U)\}$称为随机测度，如果对于任意$\omega\in\Omega$固定，$\nu(\omega,\cdot)$是$\mathscr{B}[0,\infty)\times\mathscr{B}(U)$上$\sigma$有限测度。

定义7.7 设ν为随机测度。我们称$\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}\times\mathscr{B}(U)$上定义的测度$\bar\nu$：

$$\bar\nu(D)=E\left(\int I_D(t,\omega,u)\nu(dt,du)\right)$$

$$(\forall D\in\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}\times\mathscr{B}(U))$$

为由ν生成的乘积测度。

随机测度ν称为可积的，如果$\bar\nu$是有限测度；ν称为σ可积的，如果$\bar\nu$是σ有限测度；ν称为局部可积的，如果存在$(\mathscr{F}_t)$停时列$\tau_n\uparrow\infty$(a.e.dP)，使$E\bar\nu([[0,\tau_n]]\times U)<\infty$。显见，局部可积一定$\sigma$可积。

定义7.8 随机测度ν称为可料的(相应地：可选的)，如果对于任意集合$A\in\mathscr{B}(U)$，$\nu([0,t]\times A)$是可料的(相应地：适应的)增过程。

一个点过程的计数测度$\nu(t,A)$可以自然地扩张成一个随机测度$\nu(\cdot)$(定义$\nu([0,t]\times A)\equiv\nu(t,A)$)。它是非负广义整值随机测度。如果点过程是$(\mathscr{F}_t)$适应的，那么$\nu$还是可选的。

由定义可见，σ有限与局部σ有限的点过程的计数测度所生成的随机测度都是σ可积的。

定理7.6 设ν是σ可积的随机测度，则存在唯一可料随机测度，记成ν^p，使它与ν生成的乘积测度在$\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U)$。

$$\bar{\nu}(D)=\bar{\nu}^p(D), \forall D\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U).$$

这个ν^p称为ν的可料对偶投影。

证明 唯一性。设$D=H\times A\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U)$，那么

$$E\int I_H\nu(dt\times A)=\bar{\nu}(D)=\bar{\nu}^p(D)=E\int I_H\nu^p(dt\times A).$$

增过程$\nu([0,t]\times A)$的可料对偶投影是唯一的，由此可证ν^p是唯一的。

存在性。不妨设ν是可积的且$U\subset[0,n]^d$，而且不妨再假定$n=1, d=1$（在$d>1$时可以类似地作），即$U\subset[0,1]$。先设$U=[0,1]$。对于任意$A\in\mathscr{B}(U)$，增过程$\nu([0,t]\times A)$具有可料对偶投影，记为$\bar{\nu}_t(A)$。我们可以选择Ω的一个零测度子集Ω_0，使在Ω/Ω_0上对于有理数$r\leqslant 1$，$\bar{\nu}_t([0,r])$对于r递增且右连续。定义ν^p：

$$\nu^p([0,t]\times[0,u])\equiv\begin{cases}\lim\limits_{r\downarrow u}\bar{\nu}_t([0,r]), & \omega\in\Omega/\Omega_0,\\ 0, & \omega\in\Omega_0.\end{cases}$$

易见ν^p满足要求。一般情形下U是$[0,1]$中的普遍可测集。定义随机测度ν'（参数空间为$([0,1], \mathscr{B}[0,1])$）：

$$\nu'([0,t]\times A)\equiv\nu([0,t]\times(A\cap U)) \quad (\forall A\in\mathscr{B}[0,1]).$$

于是$E\nu'([0,\infty)\times A)$是$\mathscr{B}[0,1]$上有限测度。又由于$U$是普遍可测集，所以存在Borel集$B\subset U$，使$E\nu'([0,\infty)\times(U\backslash B))=0$。由$\nu'$的定义便有$E\nu'([0,\infty)\times B^c)=0$。现在我们定义

$$\nu^p=I_B(x)\nu'^p.$$

易验证ν^p满足要求。

这里我们最感兴趣的是点过程的计数过程扩张成的随机测度。这时常常有$U=R^d\backslash\{0\}$。记

$$\mathscr{R} = \bigcup_n \mathscr{R}(U_n) \qquad \left(U_n = \left\{u: \ |u| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right).$$

这时的点过程是在R^d中取值的。

引理7.5 设A是连续$(\mathscr{F}_t)$增过程，M是$(\mathscr{F}_t)$鞅，$X = M + A$。那么对于任意划分：$0 = t_0^{(n)} < \cdots < t_{N^{(n)}}^{(n)} = t$，有

$$A_t = (L_1)\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_0^{N^{(n)}-1} E[(X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}}) | \mathscr{F}_{t_k^{(n)}}].$$

其中$\lambda_n = \max\limits_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})$。

证明 为了符号方便，我们省记上标“(n)”，并简记

$$\Delta X_{t_k} = X_{t_{k+1}} - X_{t_k}, \quad \Delta A_{t_k} = A_{t_{k+1}} - A_{t_k}.$$

先设A_t有界。我们有

$$E\left[A_t - \sum_k E(\Delta X_{t_k} | \mathscr{F}_{t_k})\right]^2$$

$$= E\left(\sum_k [\Delta A_{t_k} - E(\Delta A_{t_k} | \mathscr{F}_{t_k})]\right)^2$$

$$= \sum_k E[\Delta A_{t_k} - E(\Delta A_{t_k} | \mathscr{F}_{t_k})]^2$$

$$= \sum_k (E(\Delta A_{t_k})^2 - E[E(\Delta A_{t_k} | \mathscr{F}_{t_k})]^2)$$

$$\leqslant \sum_k E(\Delta A_{t_k})^2$$

$$\leqslant E[(\sup_k \Delta A_{t_k}) A_t] \xrightarrow{(n \to \infty)} 0 \quad \text{（有界收敛）},$$

当然也是L_1收敛的。

对于一般的A_t，设它首达m的时刻为τ_m。由A_t的连续性，我们有$A_{t \wedge \tau_m} = A_t \wedge m$。因此

$$E\left|A_t - \sum_k E(\Delta X_{t_k} | \mathscr{F}_{t_k})\right|$$

$$\leqslant E|A_t - A_{t\wedge\tau_m}| + E\left|A_{t\wedge\tau_m} - \sum_k E(\Delta A_{t_k\wedge\tau_m}|\mathscr{F}_{t_k})\right|$$

$$+ E\left|\sum_k E[(\Delta A_{t_k} - \Delta A_{t_k\wedge\tau_m})|\mathscr{F}_{t_k}]\right|$$

$$\overset{\text{记}}{=} I_1 + I_2 + I_3.$$

因为$A_t - A_{t\wedge\tau_m}$是 t 的增过程，我们有

$$I_3 = I_1 = E|A_t - A_{t\wedge\tau_m}|.$$

取 m 使 I_1, I_3充分小，对此固定的 m，我们又有 $I_2 \to 0(n\to\infty)$. 所以当$n\to\infty$时

$$E\left|A_t - \sum_k E(\Delta X_{t_k}|\mathscr{F}_{t_k})\right| \to 0.$$

定理7.7 设R^d中取值的σ有限的$(\mathscr{F}_t)$点过程的计数测度为ν。记 $\mu(t,A)\equiv\mu([0,t]\times A)\equiv\nu([0,t]\times A)-\nu^p([0,t]\times A)$，其中 $A\in\mathscr{R}_0\equiv\{A:\ E\nu(t,A)<\infty(\forall t\geqslant 0)\}$。那么$\mu$满足

1° 对于固定的$A\in\mathscr{R}_0$，$\mu(t,A)$是$(\mathscr{F}_t)$鞅；

2° 对于固定的t，$\mu(t,A)$对A有限可加。

这样的μ称为$\mathscr{R}_0$上的鞅测度。ν^p称为ν的**补偿测度**.

若ν仅为局部σ有限的，那么1°中的$\mu(t,A)$仅为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅。此时μ称为$\mathscr{R}_0$上的局部鞅测度。

又若ν还是拟左连续的，那么对应地μ为正交鞅测度，局部正交鞅测度，而且此时$\langle\mu(\cdot,A)\rangle_t$是连续的且等于$\nu^p(t,A)$。

证明 前两个断言是定理7.6的推论，今证最后一个结论。设ν拟左连续。我们不妨设ν是σ有限的。此时$\nu^p(t,A)$是连续过程$(A\in\mathscr{R}_0)$。记

$$\sigma_n = \inf\{t:\ \nu(t,A)\vee\nu^p(t,A)\geqslant n\}.$$

由于 ν^p 的连续性，$\nu^p(t\wedge\sigma_n, A)=n$。又$\nu(t,A)-\nu(t-,A)\leqslant 1$ $(\forall t\geqslant 0)$，所以

$$|\mu(t\wedge\sigma_n,A)|\leqslant\nu(t\wedge\sigma_n,A)+\nu^p(t\wedge\sigma_n,A)\leqslant 2n+1.$$

由此得到$\mu(t,A)\in\mathscr{M}_2^{loc}$。另一方面，由假定$\nu$拟左连续(即$\nu$的正则性)和$\nu^p$的连续性，对于停时列$\tau_m\uparrow\tau$我们有

$$
\begin{aligned}
&|E\mu^2(\tau\wedge\sigma_n\wedge t,A)-E\mu^2(\tau_m\wedge\sigma_n\wedge t,A)|\\
&\quad\leqslant|E[(\mu(\tau\wedge\sigma_n\wedge t,A)+\mu(\tau_m\wedge\sigma_n\wedge t,A))\\
&\qquad\times(\mu(\tau\wedge\sigma_n\wedge t,A)-\mu(\tau_m\wedge\sigma_n\wedge t,A))]|\\
&\quad\leqslant 2(2n+1)|E(\nu(\tau\wedge\sigma_n\wedge t,A)-\nu(\tau_m\wedge\sigma_n\wedge t,A))\\
&\qquad+E(\nu^p(\tau\wedge\sigma_n\wedge t,A)-\nu^p(\tau_m\wedge\sigma_n\wedge t,A))|\\
&\quad\to 0\quad(m\to\infty),
\end{aligned}
$$

即 $\mu^2(t\wedge\sigma_n,A)$是正 则 的. 因 此$\langle\mu(\cdot\wedge\sigma_n,A)\rangle_t$ 连 续，从而$\langle\mu(\cdot,A)\rangle_t$连 续.

再则，在$[0,t]$上用引理7.5，我们得到(为了记号方便 下 面我们简记$\pi(t,A)=\nu^p(t,A)$)：

$$
\begin{aligned}
&E\left|\sum_k E(\Delta(\mu^2(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A))|\mathscr{F}_{t_k^{(m)}})-\pi(t\wedge\sigma_n,A)\right|\\
&\leqslant E\left|\sum_k E[(\Delta(\mu^2(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A))-\Delta\nu(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A))|\mathscr{F}_{t_k^{(m)}}]\right|\\
&\quad+E\left|\sum_k E(\Delta\nu(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A)|\mathscr{F}t_k^{(m)})-\pi(t\wedge\sigma_n,A)\right|\\
&\leqslant\sum_k E|(\Delta\mu(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A))^2-\Delta\nu(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A)|+o(1)\\
&\leqslant E\sum_k|(\Delta\nu(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A))^2-\Delta\nu(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A)\\
&\quad-2\Delta\nu(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A)\Delta\pi(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A)\\
&\quad+(\Delta\pi(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A))^2|+o(1)\leqslant E\sum_k((\Delta\nu(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A))^2\\
&\quad-\Delta\nu(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A))+2\max_k\Delta\pi(t_k^{(m)}\wedge\sigma_n,A)(\nu(t\wedge\sigma_n,A)\\
&\quad+\pi(t\wedge\sigma_n,A))+o(1),
\end{aligned}
$$

其中的被积函数对m一致地有界。由有界收敛定理得到上式当$m \to \infty$时的极限为0，再用一次引理7.5就推出

$$\langle\mu(\cdot\wedge\sigma_n,A)\rangle_t=\pi(t\wedge\sigma_n,A).$$

因此

$$\langle\mu(\cdot,A)\rangle_t=\pi(t,A).$$

另一方面，若$A,B\in\mathscr{R}_0$且$A\cap B=\varnothing$，则

$$\begin{aligned}\nu(t,A\cup B)&=\nu(t,A)+\nu(t,B)\\&=(\mu(t,A)+\mu(t,B))+(\pi(t,A)+\pi(t,B)).\end{aligned}$$

由可料对偶投影的唯一性，便得

$$\mu(t,A\cup B)=\mu(t,A)+\mu(t,B);$$

$$\begin{aligned}&\langle\mu(\cdot,A)\rangle_t+\langle\mu(\cdot,B)\rangle_t\\&=\pi(t,A)+\pi(t,B)=\pi(t,A\cup B)\\&=\langle\mu(\cdot,A\cup B)\rangle_t=\langle\mu(\cdot,A)+\mu(\cdot,B)\rangle_t.\end{aligned}$$

因此$\langle\mu(\cdot,A),\mu(\cdot,B)\rangle_t=0$。

注　因此，对于拟左连续的σ有限的$(\mathscr{F}_t)$点过程的计数测度有

$$E\nu=E\pi,E(\nu-\pi)^2=E\pi\quad(\pi\equiv\nu^p).$$

这个性质是 Poisson 随机变量的性质的直接推广。

§7.4　半鞅的局部特征和按随机测度的分解

引理7.6（Burkholder–Davis–Gundy 不等式）　设$M\in\mathscr{M}^{loc}$，$M_t^*=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|M_s|$，则

$$\|M_\infty^*\|_{L_q}\leqslant C_q\|[M]_\infty^{1/2}\|_{L_q}\leqslant C_q'\|M_\infty^*\|_{L_q}\quad(1\leqslant q<\infty).$$

这个不等式的建立，需要用鞅空间BMO的知识，在这里我们略去它的证明。

命题7.6　零初值可选过程X是某个局部鞅M的增量ΔM的充

要条件是它同时满足：

1° ${}^{p}X=0$；

2° $[S(X^2)]^{\frac{1}{2}}$为局部可积增过程，其中

$$S(Y)_t=\begin{cases}\sum\limits_{s<t}Y_s, & \sum\limits_{s<t}|Y_s|<\infty,\\ +\infty, & \text{其他}.\end{cases}$$

当条件满足时，M可以取成$\mathscr{M}^{d,loc}$中的元素，且这种取法是唯一的。

证明 必要性。$M\in\mathscr{M}^{loc}$，由定义2.27后面的注可知M^*局部可积。于是由引理7.6得到$[M]^{1/2}$局部可积。但是我们有$S((\Delta M)^2)\leqslant[M]$，所以$[S((\Delta M)^2)]^{\frac{1}{2}}$局部可积。此外，显然我们还有${}^{p}(\Delta M)=0$。

充分性。设条件满足。我们不妨假定$[S(X^2)]^{1/2}$一致可积，因为在一般情形只需用一次局部化。由引理2.12证明中之2°可知

$$\{X\neq 0\}=\left(\bigcup_k[[\tau_k]]\right)\cup\left(\bigcup_m[[\sigma_m]]\right),$$

其中$[[\tau_k]]$,$[[\sigma_m]]$彼此都不交，τ_k是可料时，σ_m是绝不可及时。按绝不可及时的定义可知可料对偶投影$(X_{\sigma_m}I_{[[\sigma_m,\infty[[})^p$连续。另一方面，由于$[S(X^2)]^{\frac{1}{2}}$一致可积，所以$X_{\tau_k}$，$X_{\sigma_m}\in L_1$。又由于${}^{p}X=0$，我们有：当$0<\tau_n<\infty$时，$E(X_{\tau_n}I_{[[\tau_n,\infty[[}|\mathscr{F}_{\tau_n-})=0$。从而$(X_{\tau_n}I_{[[\tau_n,\infty[[})^p=0$（注意对于任意停时$\tau$，下列断言彼此等价：$(X_\tau I_{[[\tau,\infty[[})^p=0$；$X_\tau I_{[[\tau,\infty[[}$是鞅；$X_\tau I_{[[\tau,\infty[[}$的Doleans测度为0；对于任意有界可料过程$Y$有

$$E(Y_\tau X_\tau I_{0<\tau<\infty})=E\left[\int Y\mathrm{d}(X_\tau I_{\tau\leq t})\right]=0;$$

$$E(X_\tau I_{[[\tau,\infty[[}|\mathscr{F}_{\tau-})I_{0<\tau<\infty}=0)。$$

于是

$$M^{(n)}\equiv\sum_{k\leq n}[X_{\tau_k}I_{[[\tau_k,\infty[[}+(X_{\sigma_k}I_{[[\sigma_k,\infty[[}-(X_{\sigma_k}I_{[[\sigma_k,\infty[[})^p)]$$

是一致可积鞅。当$n>m$时，我们有

$$E[M^{(n)}-M^{(m)}]_\infty^{\frac{1}{2}}=E\left\{S\left(\sum_{m<k\leq n}[X_{\tau_k}^2+X_{\sigma_k}^2]\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=E\left\{S\left(X^2\sum_{m<k\leq n}[I_{[[\tau_k]]}+I_{[[\sigma_k]]}]\right)\right\}_\infty^{\frac{1}{2}}\to 0\quad(n,m\to\infty).$$

由引理7.6及控制收敛性得到

$$\|M_\infty^{(n)*}-M_\infty^{(m)*}\|_{L_1}\leq C_1E[M^{(n)}-M^{(m)}]_\infty^{\frac{1}{2}}\to 0.$$

但是一致可积鞅全体按$\|M_\infty^*\|_{L_1}$模可作成一个 Banach 空间，因此$M^{(n)}$存在极限M：$\|M_\infty^{(n)*}-M_\infty^*\|_{L_1}\to 0$且$M$是一致可积鞅。又由于$M^{(n)}$是可积变差鞅，由引理7.1可知$M^{(n)}\in\mathscr{M}^{d,loc}$。易验证$M\in\mathscr{M}^{d,loc}$，并且可选取子列$M^{(n_k)}$，使

$$P(\sup_{0\leq t\leq\infty}|M_t^{(n_k)}-M|\to 0)=1.$$

所以我们有

$$\Delta M=\lim_{k\to\infty}\Delta M^{(n_k)}=X.$$

如果另有一个$N\in\mathscr{M}^{d,loc}$，使$\Delta N=X$，那么$\Delta(M-N)=0$，因此$M-N\in\mathscr{M}_2^{c,loc}\cap\mathscr{M}^{d,loc}$，从而$M=N$。这就证明了唯一性。**命题证毕。**

对于$\Phi(t,u)=\Phi(w,t,u)\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U)$，点过程的计数测度$\nu$和它的可料对偶投影$\nu^p$，记$\mu=\nu-\nu^p$。再记

$$\int_U\Phi(t,u)\mu(\{t\},du)$$

$$=\begin{cases}\int_U\Phi(t,u)\nu(\{t\}\times du)-\int_t\Phi(t,u)\nu^p(\{t\}\times du), \\ \qquad\text{如果有意义}, \\ +\infty,\qquad\text{不确定情形}.\end{cases}$$

$\widetilde{\mathscr{L}}_1^{loc}(\nu)$

$$=\left\{\Phi\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U):\ \left\{S\left[\left(\left(\int_U\Phi(t,u)\mu(\{t\},\mathrm{d}u)\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\in L_1^{\mathrm{loc}}\right\}.$$

对于$\Phi\in\widetilde{\mathscr{L}}^{\mathrm{loc}}(\nu)$，我们定义局部鞅测度积分

$$\int_0^t\int_U\Phi(s,u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

为方程

$$\Delta X=\int_U\Phi(t,u)\mu(\{t\},\mathrm{d}u)$$

在$\mathscr{M}^{d,\mathrm{loc}}$中的解(显然，由命题7.6，这样的$X$存在唯一)。

对于$A\in\mathscr{R}_0$，易见

$$\int_0^t\int_U I_{[0,t]\times A}(s,u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)=\mu(t,A).$$

定理7.8（半鞅的随机测度分解） 设半鞅X的不连续点上的跳跃值所决定的点过程的计数测度为ν,其可料对偶投影为ν^p，$\mu(t,A)=\nu(t,A)-\nu^p(t,A)$($A\in\mathscr{R}_0$如定理7.6)，则$X$可以写成

$$X=X_0+M^c+A+\int_0^t\int_U uI_{|u|>1}\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

$$+\int_0^t\int_U uI_{|u|\le1}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),$$

而且

$$\int_0^t\int_U uI_{|u|\le1}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

$$=S\left(\Delta\left[X-X_0-A-\int_0^t\int_U uI_{|u|\le1}\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\right]\right)$$

(这里$S(\Delta[\quad])$指[　]的跳跃部分)，其中M^c是X的连续局部鞅部分，A是可料有限变差适应过程。

证明 令

$$\bar{X}=X-X_0-S(\Delta XI_{[|\Delta X|>1]}),\quad \bar{X}_t^*=\sup_{0\le s\le t}|\bar{X}_s|,$$
$$\tau_n=\inf\{t:\ \bar{X}_t^*\geqslant n\}.$$

我们有$\tilde{X}^*_{\tau_n}\leqslant n+1$，所以$\tilde{X}$是特殊半鞅．设$\tilde{X}$的标准分解为$\tilde{X}=M+A$，其中$M\in\mathscr{M}^{loc}$，$A$是可料局部可积变差过程．按$\tilde{X}$的定义，我们应有

$$\Delta\tilde{X}_t=\int_U uI_{|u|\leqslant 1}\nu(\{t\},\mathrm{d}u).$$

于是由引理2.22得到

$$\begin{aligned}
&\int_U uI_{|u|\leqslant 1}\mu(\{t\},\mathrm{d}u)\\
&=\int_U uI_{|u|\leqslant 1}\nu(\{t\},\mathrm{d}u)-\int_U uI_{|u|\leqslant 1}\nu^p(\{t\},\mathrm{d}u)\\
&=\Delta\tilde{X}-(\Delta\tilde{X})^p=\Delta\tilde{X}-{}^p(\Delta\tilde{X})\\
&=\Delta\tilde{X}-({}^p(\Delta M)+{}^p(\Delta A))=\Delta\tilde{X}-\Delta A\\
&=\Delta M.
\end{aligned}$$

所以由命题7.6,积分

$$N=\int_0\int_U uI_{|u|\leqslant 1}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\left(=\int_U uI_{|u|\leqslant 1}\mu(t,\mathrm{d}u)\right)$$

按局部鞅测度(不是正交的!)意义下存在，而且它是$\mathscr{M}^{d,loc}$中满足条件$\Delta N=\Delta M$的元。于是$M-N\in\mathscr{M}^{c,loc}$．由命题7.1中分解的唯一性便得$N=M^d$。由此立得定理．

注 对于多维情形，定理的结论也成立，证明完全不变．

$$(\langle M^c\rangle,A,\nu^p)$$

称为半鞅X的局部特征．

推论1 若$M\in\mathscr{M}_2^{loc}$且拟左连续，则

$$M=M_0+M^c+\int_0^t\int_U u\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),$$

其中$\int_0^t\int_U u\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$还可以理解成局部正交鞅测度的积分．

证明 不妨设$M\in\mathscr{M}_2$。于是$\mu(t,A)=\nu(t,A)-\nu^p(t,A)(A\in\mathscr{R}_0)$是正交鞅测度，且以$\nu^p$为特征．这时候我们有

$$E\int_0^t\int_U u^2\nu^p(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)=E\int_0^t\int_U u^2\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

$$=E\sum_{s\leq t}(\Delta M_s)^2\leqslant E[M]_t<\infty.$$

所以正交鞅测度意义下的积分$\int_0^t\int_U u\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$存在，且属于$\mathscr{M}_2$，而且由定理7.1我们有

$$\Delta\int_0^t\int_U u\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)=\int_U u\mu(\{t\},\mathrm{d}u).$$

记

$$M'=\int_0^t\int_U u\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u).$$

另一方面，对于$\forall N\in\mathscr{M}_2^c$，利用引理7.1我们有

$$\langle N,M'\rangle=\int_0^t\int_U u\mathrm{d}\langle N,\mu(\cdot,\mathrm{d}u)\rangle_s=0.$$

所以

$$M'=\int_0^t\int_U u\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\in\mathscr{M}_2^d\subset\mathscr{M}^{d,\mathrm{loc}}.$$

于是$\int_0^t\int_U u\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$也是按本节意义下的积分。仿照定理7.8便得推论1.

推论2 若定理7.8中的半鞅X是拟左连续的，那么μ是局部正交鞅测度，且分解式中的积分$\int_0^t\int_U uI_{|u|\leq 1}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$也是按局部正交鞅测度意义下的积分.

§7.5 取值于可测空间的点过程及其积分

定义7.9 取值于可测空间$(U,\mathscr{B}(U))$的一个点函数p就是指如下的一个对应表

$$p:\ \begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n\cdots \\ u_1,\cdots,u_n\cdots\end{pmatrix}\quad (0<t_i<\infty,\ u_i\in U,\ t_i\neq t_j\ (i\neq j)).$$

这个对应也可以写成

$$p_t:\ t\in\mathscr{D}_p\equiv\{t_1,\cdots,t_n,\cdots\},\ \ p_{t_k}=u_k.$$

一个点函数 p 对应于一个计数测度：对于 $A\in\mathscr{B}(U)$

$$\nu(t,A)\equiv\nu([0,t]\times A)\equiv{}^{\#}\{i:\ 0<t_i\leqslant t,\ \ u_i\in A\}\quad(\leqslant+\infty).$$

它是 $([0,\infty)\times U,\ \mathscr{B}([0,\infty)\times U))$ 上广义整值测度.

点函数代表在一系列时刻发生的一系列"事". 由以上定义，我们只限制于考虑在同一时刻只发生一件"事"的简单情形.

定义7.10 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ 上以 $w\in\Omega$ 为参数，取值于 $(U,\mathscr{B}(U))$ 的"参变"点函数 $p(w)$ 称为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的点过程，如果它的计数测度是可测的，即 $\forall A\in\mathscr{B}(U)$, $\forall t,n$,

$$\{\nu(t,A)=n\}\in\mathscr{F}\ (n=0,1,\cdots,+\infty).$$

点过程称为 $(\mathscr{F}_t)$ 适应的，如果 $\nu(t,A)$ 都是 $(\mathscr{F}_t)$ 适应的. $p(w)$ 称为 σ 有限的，如果存在 $U_n(\in\mathscr{B}(U))\uparrow U$，使

$$E\nu(t,U_n)<\infty\quad(\forall t\geqslant 0).$$

令

$$\mathscr{R}_0=\{A:\ E\nu(t,A)<\infty\quad(\forall t\geqslant 0)\}.$$

定义7.11 σ 有限的 $(\mathscr{F}_t)$ 适应点过程称为拟左连续的，如果对于任意 $A\in\mathscr{R}_0$，计数测度 $\nu(t,A)$ 是拟左连续的.

与定理 7.7 类似地，我们有

定理7.7′ 取值于可分的距离可测空间 $(U,\mathscr{B}(U))$ 的 σ 有限适应点过程 $p_t=p_t(w)$ 的计数测度 $\{\nu(t,A):\ t\geqslant 0,\ \ A\in\mathscr{B}(U)\}$ 有可料对偶投影 ν^p. 当 ν 拟左连续时，$\mu(t,A)\equiv\nu(t,A)-\nu^p(t,A)$ $(A\in\mathscr{R}_0)$ 是正交鞅测度，而且 $\{\mu(t,A):\ A\in\mathscr{R}_0\}$ 是特征为 $\{\nu^p(t,A):\ A\in\mathscr{R}_0\}$ 的（正交）鞅测度，$\nu^p(t,A)$ 是连续的.

证明 同定理7.7.

引理7.7 记

$$\hat{\mathscr{P}}=\sigma\{g(t,u,w):\ g\text{ 对 }t\text{ 左连续},$$

对(u,w)属于$\mathscr{B}(U)\times\mathscr{F}_t\}$。

那么

$$\hat{\mathscr{P}}=\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U)。$$

证明 若$g(u)\in\mathscr{B}(U)$，$f(t,w)$左连$(\mathscr{F}_t)$适应，那么$f(t,w)g(u)\in\hat{\mathscr{P}}$。由典型逼近立得$\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U)\subset\hat{\mathscr{P}}$；反之，对于$g\in\hat{\mathscr{P}}$，我们先用

$$\sum_k I_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(t)g(t_k,u,w)+I_{\{0\}}(t)g(0,u,w)$$

近似，再用形如$f(u)h(w)$的$\mathscr{B}(U)\times\mathscr{F}_{t_k^{(n)}}$函数的和来近似$g(t_k^{(n)},u,w)$，便得$g\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U)$。

对于可测空间$(U,\mathscr{B}(U))$，我们显然可以按轨道地定义$\hat{\mathscr{P}}$中函数$\Phi(s,u)\equiv\Phi(s,u,w)$对于$\nu(t,\cdot)$的积分。当$(U,\mathscr{B}(U))$还是可分的距离可测空间时，还可以定义$\Phi$对于$\pi(t,\cdot)$及鞅测度$\mu(t,A)$的积分(当然，我们从今以后恒设点过程是$\sigma$有限的拟左连续的$(\mathscr{F}_t)$点过程)。这就有是否相容的问题，即是否成立下列等式($\nu=\mu+\pi$，其中$\pi=\nu^p$)：

$$\int_0^t\int_U\Phi(s,u)\nu(ds,du)=\int_0^t\int_U\Phi(s,u)\mu(ds,du)+\int_0^t\int_U\Phi(s,u)\pi(ds,du),\quad(7.32)$$

以及究竟对$\hat{\mathscr{P}}$中哪些函数它们分别有确切含义的问题。

对于$p\geqslant1$，记

$$\mathscr{L}_p(\nu)=\left\{\Phi\in\hat{\mathscr{P}}:\ E\int_0^t|\Phi|^p d\nu<\infty\ (\forall t)\right\};$$

$$\mathscr{L}_p^{loc}(\nu)=\left\{\Phi\in\hat{\mathscr{P}}:\ P\left(\forall t,\int_0^t|\Phi|^p d\nu<\infty\right)=1\right\};$$

$\hat{\mathscr{P}}_p^{loc}(\nu)=\{\Phi\in\hat{\mathscr{P}}$：$\exists(\mathscr{F}_t)$停时$\tau_n\uparrow\infty(a.e.dP)$，使$\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\in\mathscr{L}_p\}$。

同样有$\mathscr{L}_p(\pi)$，$\mathscr{L}_p^{loc}(\pi)$(而且它与$\widehat{\mathscr{L}}_p^{loc}(\pi)$相同)。同时

$$\mathscr{L}_p(\pi)=\bigcup_{n=1}^{\infty}L_p([0,n]\times U\times\Omega,\widehat{\mathscr{F}},\hat{P}_\pi),$$

其中$\hat{P}_\pi$相当于(7.22)中的$\hat{P}$，同样对$\mathscr{L}_p(\nu)$也有相应的$\hat{P}_\nu$。

定理7.9 设$\nu(t,A)$为拟左连续的σ有限的取值于可分距离空间的$(\mathscr{F}_t)$点过程的计数测度。对于$\Phi\in\mathscr{L}_1^{loc}(\pi)$，我们可以定义$\int_0^t\int_U\Phi\mu(ds,du)$，使它满足(7.32)。而且根据$\Phi$属于$\mathscr{L}_1(\pi)$，$\mathscr{L}_1^{loc}(\pi)$，$\mathscr{L}_2(\pi)$，$\mathscr{L}_2^{loc}(\pi)$的不同，$\int_0^t\int_U\Phi\mu(ds,du)$分别为$(\mathscr{F}_t)$鞅、局部鞅、平方可积鞅、局部平方可积鞅。

证明 由定理7.7′，$\mu(t,A)$是正交鞅测度，所以对于$\Phi\in\mathscr{L}_2^{loc}(\pi)$积分有定义。对于$\Phi\in\mathscr{L}_1^{loc}(\pi)\setminus\mathscr{L}_2^{loc}(\pi)$，我们扩充定义

$$\int_0^t\int_U\Phi\mu(ds,du)=\int_0^t\int_U\Phi\nu(ds,du)-\int_0^t\int_U\Phi\pi(ds,du).$$

因此(7.32)成立。显然对于$\forall A\in\mathscr{F}_s$我们有$EI_A\nu((s,t];A)=EI_A\pi((s,t],A)$，因此$\hat{P}_\pi=\hat{P}_\nu$，$\mathscr{L}_1(\pi)=\mathscr{L}_1(\nu)$，而且对于$\Phi\in\mathscr{L}_1(\pi)$有

$$E\left(\int_s^t\int_U\Phi d\pi\,|\,\mathscr{F}_s\right)=E\left(\int_s^t\int_U\Phi d\nu\,|\,\mathscr{F}_s\right).$$

也就是

$$\int_0^t\int_U\Phi\nu(ds,du)-\int_0^t\int_U\Phi\pi(ds,du)$$

是$(\mathscr{F}_t)$鞅。因此$\int_0^t\int_U\Phi\mu(ds,du)$在$\Phi\in\mathscr{L}_1(\pi)$，$\mathscr{L}_1^{loc}(\pi)$时分别是鞅、局部鞅。另一方面，如果$\Phi\in\mathscr{L}_0$，则(7.32)显然成立。而当$\Phi\in\mathscr{L}_1(\pi)\cap\mathscr{L}_2(\pi)$时。用典型方法可取$\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}$，使$\Phi^{(n)}\to\Phi(\mathscr{L}_1(\pi)$且$\mathscr{L}_2(\pi))$。因此(7.32)仍然成立。当$\Phi\in\mathscr{L}_1^{loc}(\pi)\cap\mathscr{L}_2^{loc}(\pi)$时只需运用局部化方法便得(7.32)。

§7.6 半鞅的Ito公式

引理7.8 设X是半鞅，$F(t)\in C^2$，则

$$Y_t \coloneqq F(X_t)-F(X_0)-\int_0^t F'(X_{s-})\mathrm{d}X \qquad (7.33)$$

是有限变差适应过程，因此$F(X)$也是半鞅。

证明 首先$F'(X_{s-})$左连续，所以局部有界，因而积分有定义。其次我们不妨假定X为有界的。因为在相反的情形，我们可以用预停过程X^{τ_n-}代替X，其中$\tau_n=\inf\{t: |X_t|\geqslant n\}$。这时候我们有

$$F(X_t^{\tau_n-})-F(X_0^{\tau_n-})-\int_0^t F'(X_{s-}^{\tau_n-})\mathrm{d}X_s^{\tau_n-}$$

$$\to F(X_t)-F(X_0)-(p)\lim_{n\to\infty}\int_0^t F'(X_{s-}^{\tau_n-})I_{[0,\tau_n)}(s)\mathrm{d}X_s$$

$$=F(X_t)-F(X_0)-\int_0^t F'(X_{s-})\mathrm{d}X_s.$$

因此只要引理对于X^{τ_n-}证明了，对于X就自然成立。

下面我们假设X有界。例如说$|X|\leqslant L$。在$[-L,L]$上$F'(x),F''(x)$有界，设这个界为K。那么

$$|F(y)-F(x)-(y-x)F'(x)|\leqslant K(y-x)^2.$$

于是对于$[v,u]$上的一个划分$v=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{N(n)}^{(n)}=u$，有

$$\left|F(X_u)-F(X_v)-\sum_k F'(X_{t_k^{(n)}})(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}})\right|$$

$$\leqslant K\sum_k (X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}})^2\to K([X]_u-[X]_v)$$

$$(\max_k(t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)})\to 0\ (n\to\infty)).$$

所以Y在任何区间上增量被$K[X]$的增量所控制。因为$[X]$是增

过程，所以 Y 有限变差。

定理7.10（半鞅的 Ito 公式） 设 X 为半鞅，$F(x)\in C^2$，则

$$F(X_t)=F(X_0)+\int_0^t F'(X_{s-})\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_{s-})\mathrm{d}\langle X^c\rangle_s$$

$$+\sum_{s\leq t}[\Delta F(X_s)-F'(X_{s-})\Delta X_s], \tag{7.34}$$

其中 X^c 是 X 的连续局部鞅部分。

证明 (7.34)等价于对于(7.33)中的 Y 有

$$Y_t-S(\Delta Y)_t=\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_{s-})\mathrm{d}\langle X^c\rangle_s,$$

其中 $S(\Delta Y)_t$ 是指 Y_t 跳跃的部分和。先设 $F(x)$ 是多项式。我们对次数进行归纳证明。假定 $F(x)$ 时定理已成立，现在要证明对于 $G(x)\equiv xF(x)$ 定理也成立。对于 $F(X)$ 我们已有

$$\mathrm{d}F(X_t)=F'(X_{t-})\mathrm{d}X_t+\mathrm{d}C_t+\mathrm{d}A_t,$$

其中

$$C_t=\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_{s-})\mathrm{d}\langle X^c\rangle_s;$$

$$A_t=\sum_{s\leq t}(\Delta F(X_s)-F'(X_{s-})\Delta X_s).$$

于是对于 $G(X)$，利用定理 7.4 及(7.15)我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}G(X_t)&=\mathrm{d}[X_tF(X_t)]\\
&=X_{t-}\mathrm{d}F(X_t)+F(X_{t-})\mathrm{d}X_t+\mathrm{d}[X,F(X)]_t\\
&=\{X_{t-}F'(X_{t-})+F(X_{t-})\}\mathrm{d}X_t+X_{t-}(\mathrm{d}A_t+\mathrm{d}C_t)\\
&\quad+\mathrm{d}\left\{\left[X,\int_0^{\cdot}F'(X_{s-})\mathrm{d}X_s\right]_t+[X,A]_t+[X,C]_t\right\}\\
&=\{X_{t-}F'(X_{t-})+F(X_{t-})\}\mathrm{d}X_t+X_{t-}\mathrm{d}C_t\\
&\quad+X_{t-}\Delta A_t+F'(X_{t-})\mathrm{d}[X]_t+\Delta X_t\Delta A_t
\end{aligned}$$

$$= G'(X_{t-})\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}X_{t-}F''(X_{t-})\mathrm{d}\langle X^c\rangle_t$$

$$+ F'(X_{t-})\mathrm{d}\langle X^c\rangle_t + X_t\Delta A_t + F'(X_{t-})(\Delta X_t)^2$$

$$= G'(X_{t-})\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}G''(X_{t-})\mathrm{d}\langle X^c\rangle_t$$

$$+ [X_{t-}\Delta F(X_t) - X_{t-}F'(X_{t-})\Delta X_t]$$

$$+ \Delta X_t \Delta F(X_t).$$

等式右边的后两项的和为

$$-[X_{t-}F'(X_{t-})\Delta X_t + F(X_{t-})\Delta X_t] + [F(X_{t-})\Delta X_t$$

$$+ X_{t-}\Delta F(X_t) + \Delta[X, F]_t]$$

$$= -G'(X_{t-})\Delta X_t + \Delta(XF(X))_t$$

$$= \Delta G(X)_t - G'(X_{t-})\Delta X_t,$$

因此便推出 $G(X_t)$满足定理要求。

在一般 $F(x)\in C^2$ 的情形，先仿照引理 7.8 中的“预停化”办法，可以先把X预停成有界过程。所以我们不妨设$|X|\leqslant L$。在$[-L, L]$上，我们可取多项式序列$F_m(x)$，使在$-L\leqslant X\leqslant L$上一致地有

$$|F_m(x) - F(x)| + |F'_m(x) - F'(x)| + |F''_m(x) - F''(x)|$$

$$\to 0 \quad (m\to\infty)^{(*)}.$$

于是从 $F_m(X)$满足定理立刻得到 $F(X)$满足定理。

注　关于$(*)$，我们可以利用：当$-1/2\leqslant\alpha_k<\beta_k\leqslant 1/2$ 时，

$$f_n(x) = \frac{\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_d}^{\beta_d}\prod_{k=1}^{d}[1-(x_k-y_k)^2]^n f(y)\mathrm{d}y}{\left[\int_{-1}^{1}(1-|y|^2)^n\mathrm{d}y\right]^d},$$

其中 $y=(y_1,\cdots,y_d)$，$x=(x_1,\cdots,x_d)$，在$[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]^d$ 上各阶偏微商(包括 0 阶)一致地近似$f(x)$的各阶相应偏微商(——直到f可能连续可微的最高阶)。为了得到$(*)$，只需把自变量从$[-1,1]^d$ 变换到$[-L-\delta, L+\delta]^d$ 上去。

下面是多维情形。需要注意的是：如果某个半鞅是一个有限变差的适应过程，那么F关于这个半鞅所对应位置的变元只需一阶连续偏导数(不必有二阶连续偏导数)。

定理7.10′(多维 Ito 公式) 若

$$F(x,y)\equiv F(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)$$

满足：$F''_{x_ix_j}$，F'_{y_k}连续($1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m$)，$X=(X^{(1)},\cdots,X^{(n)})$是半鞅，$G=(G^{(1)},\cdots,G^{(m)})$是有限变差适应过程，那么

$$\begin{aligned}
&F(X_t,G_t)-F(X_0,G_0)\\
&=\sum_i\int_0^t F'_{x_i}(X_{s-},G_{s-})\mathrm{d}X_s^{(i)}+\sum_k\int_0^t F'_{y_k}(X_{s-1},G_{s-})\mathrm{d}G_s^{(k)}\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t F''_{x_ix_j}(X_{s-1},G_{s-})\mathrm{d}\langle X^{(i)c},X^{(j)c}\rangle_s\\
&\quad+\sum_{0<s\leqslant t}\{\Delta F(X,G)_s-[\nabla_xF(X_{s-},G_{s-})]^T\Delta X_s\\
&\quad-[\nabla_yF(X_{s-},G_{s-})]^T\Delta G_s\}
\end{aligned}\tag{7.35}$$

(∇_x,∇_y分别指对x和y的梯度算子)。

证明 与定理7.10的证明类似。

注1 如果X_t与X_{t-}对于任意t都概率为1地取值于R^d中的某个开集G，$F(x)\in C^2(G)$，那么Ito公式仍成立。

注2 若$F(x)$是凸函数，X是半鞅，则(7.33)仍成立，其中F'理解成左导数。事实上，对于凸函数F恒有

$$F(y)-F(x)-(y-x)F'(x)\geqslant 0.$$

利用(7.10)便得到由(7.33)定义的Y是右连($\mathscr{F}_t$)增过程(例如$F(x)=|x-a|$时，$F'(x)=\mathrm{sgn}(x-a)$。增过程Y的连续部分称为X在a的局部时)。

定理7.11 设 p_t 是 σ 有限拟左连续的 $(\mathscr{F}_t)$ 适应点过程，$\nu(t,A)$ 是它的计数测度，$\pi(t,A)=\nu^p(t,A)$ 是 ν 的可料对偶投影，$\mu(t,A)=\nu(t,A)-\pi(t,A)$（$A\in\mathscr{R}_0$ 如定理7.7）是正交鞅测度。又设 $M\in\mathscr{M}_2^{c,loc}(\mathscr{F}_t)$，$A_t$ 是连续有限变差 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程，$f(s,u)=f(s,u,w)\in\mathscr{L}_1^{loc}(\pi)$，$g(s,u)=g(s,u,w)\in\mathscr{L}_2^{loc}(\pi)$，而且 $fg=0$。$F(t,x)$ 在 $[0,\infty)\times D$（开域）上满足 F'_t，F''_{xx} 连续。记

$$X_t=X_0+M_t+A_t+\int_0^t\int_U f(s,u)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

$$+\int_0^t\int_U g(s,u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u).$$

如果

$$P(\forall t,X_t\in D)=1,$$

那么

$$\begin{aligned}
&F(t,X_t)-F(0,X_0)\\
&=\int_0^t F'_x(s,X_s)\mathrm{d}(M_s+A_s)+\int_0^t F'_s(s,X_s)\mathrm{d}s\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t F''_{xx}(s,X_s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s\\
&+\int_0^t\int_U[F(s,X_{s-}+f(s,u))-F(s,X_{s-})]\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\\
&+\int_0^t\int_U[F(s,X_{s-}+g(s,u))-F(s,X_{s-})]\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\\
&+\int_0^t\int_U[F(s,X_{s-}+g(s,u))-F(s,X_{s-})\\
&-F'_x(s,X_{s-})g(s,u)]\pi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u).
\end{aligned}\tag{7.36}$$

证明 不妨设 $D=R^1$。先设 $f\in\mathscr{L}_1(\pi)$，$g\in\mathscr{L}_2(\pi)$，F'_t，F'_x，F''_{xx} 有界。由于点过程 p_t 是 σ 有限的，所以有 $U_n\uparrow U$ 使 $E\nu(t,U_n)<\infty$。于是 $\nu(s,U_n)$ 在 $[0,t]$ 只有有限个跳跃时刻，对一

切 n，所有 $\nu(t,U_n)$的跳跃时刻由引理2.12证明中的 1° 可知，它们可以记成停时列$\{\sigma_m\}$。令

$$X^{(n)} \equiv X_0 + M_t + A_t + \int_0^t \int_{U_n} f(s,u)\nu(ds,du)$$

$$+ \int_0^t \int_{U_n} g(s,u)\mu(ds,du)$$

$$\equiv X_0 + M_t + A_t + \sum_{\sigma_m \leq t} f(\sigma_m, p_{\sigma_m}) + \sum_{\sigma_m \leq t} (gI_{U_n})(\sigma_m, p_{\sigma_m})$$

$$- \int_0^t \int_{U_n} g(s,u) I_{U_n}(u) \pi(ds,du).$$

由于 $g \in \mathscr{L}(\pi)$，所以右边最后一项是 t 的连续过程。对 $X^{(n)}$用定理7.10，我们得到($F', F''(s, X_{s-}^{(n)})$可用 $F', F''(s, X_s^{(n)})$代)

$$F(t, X^{(n)}) - F(0, X_0^{(n)})$$

$$= \int_0^t F'_x(s, X_s^{(n)}) d\left(M_s + A_s - \int_0^s \int_U g_n(s,u)\pi(ds,du)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t F''_{xx}(s, X_s^{(n)}) d\langle M\rangle_s + \int_0^t F'_s(s, X_s^{(n)}) ds$$

$$+ \sum_{\sigma_m \leq t} F'_x(\sigma_m, X_{\sigma_m -}^{(n)})[g_n(\sigma_m, p_{\sigma_m}) + f(\sigma_m, p_{\sigma_m})]$$

$$+ \sum_{s \leq t} [\Delta F(s, X_s^{(n)}) - F'_x(s, X_{s-}^{(n)})\Delta X_s^{(n)}], \qquad (7.37)$$

其中 $g_n = gI_{U_n}$。利用 $fg = 0$，我们就得到

$$I_{\{f+g_n \neq 0\}} = I_{\{f \neq 0, g_n = 0\}} + I_{\{f = 0, g_n \neq 0\}}.$$

于是

$$\sum_{s \leq t} [\Delta F(s, X_s^{(n)}) - F'_x(s, X_{s-}^{(n)})\Delta X_s^{(n)}]$$

$$= \sum_{\sigma_m \leq t} [\Delta F(\sigma_m, X_{\sigma_m}^{(n)}) - F'_x(\sigma_m, X_{\sigma_m -}^{(n)})\Delta X_{\sigma_m}^{(n)}]$$

$$\times [I_{\{f(\sigma_m, p_{\sigma_m})\neq 0, g_n(\sigma_m, p_{\sigma_m})=0\}} + I_{\{f=0, g_n\neq 0\}}]$$

$$= \sum_{\sigma_m \leqslant t} [(F(\sigma_m, X^{(n)}_{\sigma_m -} + f(\sigma_m, p_{\sigma_m})) - F(\sigma_m, X^{(n)}_{\sigma_m -}))$$

$$+ (F(\sigma_m, X^{(n)}_{\sigma_m -} + g_n(\sigma_m, p_{\sigma_m})) - F(\sigma_m, X^{(n)}_{\sigma_m -}))$$

$$- F'_x(\sigma_m, X^{(n)}_{\sigma_m -})(f(\sigma_m, p_{\sigma_m}) + g_n(\sigma_m, p_{\sigma_m}))].$$

再应用(7.32)，于是(7.37)变成

$$F(t, X^{(n)}_t) - F(0, X^{(n)}_0)$$

$$= \int_0^t F'_x(s, X^{(n)}_s) \mathrm{d}(M_s + A_s) + \int_0^t F'_s(s, X^{(n)}_s) \mathrm{d}s$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t F''_{xx}(s, X^{(n)}_s) \mathrm{d}\langle M\rangle_s$$

$$+ \int_0^t \int_U [F(s, X^{(n)}_{s-} + f(s,u)) - F(s, X^{(n)}_{s-})] \nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u)$$

$$+ \int_0^t \int_U [F(s, X^{(n)}_{s-} + g_n(s,u)) - F(s, X^{(n)}_{s-})] \mu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u)$$

$$+ \int_0^t \int_U [F(s, X^{(n)}_{s-} + g_n(s,u)) - F(s, X^{(n)}_{s-})$$

$$- F'_x(s, X^{(n)}_{s-}) g_n(s,u)] \pi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u). \qquad (7.38)$$

由 $X^{(n)}$ 的定义及命题 7.5 可知在 $0 \leqslant s \leqslant t$ 上一致地有 $X^{(n)}_s \xrightarrow{P} X_s$，又由于 $|F'_t|, |F''_{xx}|, |F'_x|$ 有个统一的上界 C，因此

$$|F(s, X^{(n)}_{s-} + f(s,u)) - F(s, X^{(n)}_{s-})| \leqslant C|f(s,u)| \in \mathscr{L}_1(\pi);$$

$$|F(s, X^{(n)}_{s-} + g_n(s,u)) - F(s, X^{(n)}_{s-})| \leqslant C|g_n(s,u)|$$

$$\leqslant C|g(s,u)| \in \mathscr{L}_2(\pi);$$

$$|F(s, X^{(n)}_{s-} + g_n(s,u)) - F(s, X^{(n)}_{s-}) - F'_x(s, X^{(n)}_{s-}) g_n(s,u)|$$

$$\leqslant C g_n(s,u)^2 \leqslant C g(s,u)^2 \in \mathscr{L}_1(\pi).$$

在(7.38)中令 $n \to \infty$，应用控制收敛定理，便得(7.36)。

一般 $f\in\mathscr{L}_1^{\text{loc}}(\pi)$，$g\in\mathscr{L}_2^{\text{loc}}(\pi)$，并且 F'_t, F'_x, F''_{xx} 并不有界时可用典型的预局部化方法得到(7.36)。

例 $f=uI_{|u|>1}$，$g=uI_{|u|\leq 1}$ 的情形。

定理7.11的多维情况并未增加困难，所以就不必列出了。

推论 若

$$X_t=X_t^c+\int_0^t\int_U g_1(s,u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),$$

$$Y_t=Y_t^c+\int_0^t\int_U g_2(s,u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),$$

$X^c, Y^{(c)}$ 为连续半鞅，那么

$$\mathrm{d}(X_tY_t)=X_t\mathrm{d}Y_t+Y_t\mathrm{d}X_t+\mathrm{d}X_t^c\mathrm{d}Y_t^c$$
$$+\int_U g_1(t,u)g_2(t,u)\nu(\{t\},\mathrm{d}u), \tag{7.39}$$

而且

$$[X,Y]_t=\langle X^c,Y^c\rangle_t+\int_0^t\int_U g_1(s,u)g_2(s,u)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u).$$

§7.7 Poisson 点过程和独立增量过程的分解

定义7.12 我们称点函数

$$\begin{pmatrix} t_{k_1}-s,\cdots,t_{k_l}-s,\cdots \\ u_{k_1},\ \cdots,\ u_{k_l},\ \cdots \end{pmatrix}$$

为点函数 $p_t(\mathscr{D}_p=\{t_1,,t_2,\cdots\},\ p_{t_k}=u_k)$ 的 s 平移，如果有 $\{t_{k_1},\cdots,t_{k_l}\cdots\}=\{t_i>s;\ t_i\in\mathscr{D}_p\}$。$p_t$ 的 s 平移常记成 $\theta_s p_t$。

定义7.13 点过程 $p_t(w)$ 称为平稳的，如果它的任意 s 平移 $\theta_s p_t(w)$ 得到的点过程都与 $p_t(w)$ 有同分布的计数测度：对任意 s 及 n

$$k_1,\cdots,k_n,$$

$\forall s,n,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n$ 恒有

$$P(\nu_p(t_1,A_1)=k_1,\cdots,\nu_p(t_n,A_n)=k_n)$$
$$=P(\nu_{\theta_s p}(t,A_1)=k_1,\cdots,\nu_{\theta_s p}(t_n,A_n)=k_n).$$

定义7.14 点过程 $p_t(w)$ 称为 Poisson 点过程，如果它的计数测度是取值于 $((0,\infty)\times U,\ \mathscr{B}((0,\infty)\times U))$ 的 Poisson 随机测度，也就是它的计数测度 $\nu(t,A)$ 应满足：

(P_1) 由 $\nu((s,t]\times A)=\nu(t,A)-\nu(s,A)$ 扩张到 $D\in\mathscr{B}((0,\infty)\times U)$ 的测度 $\nu(D)$ 遵从参数为 $\lambda(D)$ 的 Poisson 分布，其中 $\lambda(\cdot)$ 为 σ 有限测度，称为强度测度（当 $\lambda(D)=\infty$ 时，理解成 $\nu(D)=\infty$）；

(P_2) 独立性：对于 $D_1,\cdots,D_k$ 互不相交而且属于 $\mathscr{B}([0,\infty)\times U)$，$\nu(D_1),\cdots,\nu(D_k)$ 独立.

定义7.15 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ 上 $(\mathscr{F}_t)$ 适应的 Poisson 点过程 $p_t(w)$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$ Poisson 点过程，如果对于任意 $t>s$，有

$$\{\nu((s,t]\times A):\ A\in\mathscr{B}(U)\}\text{ 与 }\mathscr{F}_s\text{ 独立.}$$

命题7.7 Poisson 点过程 p_t 是平稳的，当且仅当其强度测度 λ 为乘积测度，即有 $\mathscr{B}(U)$ 上 σ 有限测度 $n(A)$，使

$$\lambda((s,t]\times A)=(t-s)n(A).$$

这个 $n(\cdot)$ 称为平稳 Poisson 点过程的特征测度.

证明 由平稳性

$$\lambda((0,s+t]\times A)=E\nu((s,s+t]\times A)+\lambda((0,s]\times A)$$
$$=\lambda((0,t]\times A)+\lambda((0,s]\times A).$$

由这个函数方程求解得

$$\lambda((0,t]\times A)=\alpha t=\lambda((0,1]\times A)t.$$

于是 $n(A)$ 可取成 $\lambda((0,1]\times A)$.

注 平稳 Poisson 点过程的计数测度 $\nu(t,A)$ 是普通的 Poisson 过程.

引理7.9 设 $\nu(t,A)(A\in\mathscr{B}(R^d\setminus\{0\}))$ 是 d 维随机连续的

Levy过程X在不连续点及其上的跃度构成的点过程的计数测度，那么

1° 对于$A\in\mathscr{B}(|x|\geqslant 1/n)$，

$$\int_A u\nu(\cdot,\mathrm{d}u) \text{ 与 } X_\cdot-\int_A u\nu(\cdot,\mathrm{d}u)$$

独立；

2° 对于两两不交的$A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{B}(|x|\geqslant 1/n)$，$\nu(\cdot,A_1)$，$\cdots,\nu(\cdot,A_k)$，$X-\int_{|u|\geqslant\frac{1}{n}}u\nu(\cdot,\mathrm{d}u)$独立；

3° $\nu((s,t]\times A)$遵从Poisson分布。

证明 1° 任取$t_1,\cdots,t_k$，不妨设它们是递增的，且$d=1$。先设$E\nu(t_k+1,\partial A)=0$(∂A是集合A的边界点全体)。把$[t_1-1,t_k+1]m$等分：$t_1-1=t_0^{(m)}<\cdots<t_m^{(m)}=t_k+1$。那么当$m\to\infty$时我们有

$$\sum_{t_j^{(m)}<t}\Delta X_{t_j^{(m)}}I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})\xrightarrow{p}\int_A u\nu(t,\mathrm{d}u);$$

$$\sum_{t_j^{(m)}<t}\Delta X_{t_j^{(m)}}I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})\xrightarrow{p}X_t-\int_A u\nu(t,\mathrm{d}u),$$

其中$\Delta X_{t_j^{(m)}}=X_{t_j^{(m)}}-X_{t_{j-1}^{(m)}}$，$A^c$是$A$的余集。对于$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$，$\mu_1,\cdots,\mu_k$，我们有

$$\begin{aligned}
&E\exp\left(\mathrm{i}\sum_{l=1}^{k}\left[\lambda_l\int_A u\nu(t_l,\mathrm{d}u)+\mu_l\left(X_{t_l}-\int_A u\nu(t_l,\mathrm{d}u)\right)\right]\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}E\exp\left(\mathrm{i}\sum_{l=1}^{k}\left[\lambda_l\sum_{t_j^{(m)}<t_l}\Delta X_{t_j^{(m)}}I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\mu_l\sum_{t_j^{(m)}<t_l}\Delta X_{t_j^{(m)}}I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})\right]\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{m} E\exp(\mathrm{i}[\lambda_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})$$

$$+\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})]), \qquad (7.40)$$

其中

$$\lambda_j^{(m)} = \sum_{t_l > t_j^{(m)}} \lambda_l, \qquad \mu_j^{(m)} = \sum_{t_l > t_j^{(m)}} \mu_l$$

都对于 m 一致有界(记这界为C)。利用$\alpha\beta=0$时，$e^{\alpha+\beta}=e^{\alpha}+e^{\beta}-1$及级数展开得

$$\Big|\prod_{j=1}^{m} E\exp(\mathrm{i}[\lambda_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})+\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}}$$

$$\times I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})])$$

$$-\prod_{j=1}^{m} E\exp[\mathrm{i}\lambda_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})]$$

$$\times E\exp[\mathrm{i}\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})]\Big|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m}\Big| E\exp(\mathrm{i}[\lambda_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})$$

$$+\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(X_{t_j^{(m)}})])$$

$$-E\exp[\mathrm{i}\lambda_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})]$$

$$\times E\exp[\mathrm{i}\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})]$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big| E\exp[\mathrm{i}\lambda_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})]$$

$$+E\exp[\mathrm{i}\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})]-1$$

$$-E\exp[\mathrm{i}\lambda_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})]$$

$$\times E\exp[\mathrm{i}\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})]$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big| E\exp[\mathrm{i}\lambda_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})]-1\Big|$$

$$\times |E\exp[\mathrm{i}\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})]-1|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} 2EI_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})$$

$$\times [\sup_j \{E(|\exp[i\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})]-1|;$$

$$|\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})|>\delta)+E(|\mu_j^{(m)}\Delta X_{t_j^{(m)}}$$

$$\times I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})|;\quad |\Delta X_{t_j^{(m)}} I_{A^c}(\Delta X_{t_j^{(m)}})|\leqslant\delta)\}]$$

$$\leqslant 2(2\sup_j P(|\Delta X_{t_j^{(m)}}|>\delta)+C\delta)\sum_{j=1}^{m} EI_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})$$

$$\leqslant 2E\nu(t_k+1,\ A)(2\sup_j P(|\Delta X_{t_j^{(m)}}|>\delta)+C\delta).$$

由于X是随机连续的，所以在$[0,t_k+1]$上一致随机连续，因此由引理 7.4 当 $m\to\infty$时上式趋于 0，从而推出(7.40)应等于

$$E\exp\left(\mathrm{i}\sum_1^k\lambda_l\int_A u\nu(t_l,\mathrm{d}u)\right)$$

$$\times E\exp\left(\mathrm{i}\sum_1^k\mu_l\left(X_l-\int_A u\nu(t_l,\mathrm{d}u)\right)\right).$$

所以对于满足 $E\nu(t_k+1,\partial A)=0$ 的 A，1°已证明成立。特别A可取测度 $E\nu(t_k+1,\cdot)$下的连续集开球。于是对于这些开球 1°已成立。设

$$\mathscr{A}=\left\{A\in\mathscr{B}\left(|x|\geqslant\frac{1}{n}\right):\ \int_A u\nu(\cdot,\mathrm{d}u),\right.$$

$$\left.X-\int_A u\nu(\cdot,\mathrm{d}u)\ \text{独立}\right\},$$

那么$\mathscr{A}$对并、交、单调运算及余集运算封闭，因此它应该包含上述的开球全体的 σ 扩张，而后者就是$\mathscr{B}(|x|\geqslant 1/n)$。

2° 因为在 $A\in\mathscr{B}(|x|\geqslant 1/n)$ 时，$\nu(t,A)$也是过程

$$\int_{|u|\geqslant\frac{1}{n}} u\nu(t,\mathrm{d}u)$$

的计数测度，因而是$\int_{|u|>\frac{1}{n}} u\nu(\cdot,\mathrm{d}u)$ 的 Borel 函数。由 1° 它应与$X-\int_{|u|>\frac{1}{n}} u\nu(\cdot,\mathrm{d}u)$ 独立。所以$\{\nu(t,A_1),\cdots,\nu(t,A_k)\}$与后者独立。同样当 $j\neq i$ 时，$\nu(t,A_j)$ 也是 $X_t-\int_{A_i} u\nu(t,\mathrm{d}u)$ 的计数测度，由1°，它也应与$\int_{A_i} u\nu(\cdot,\mathrm{d}u)$ 独立，而 $\nu(t,A_i)$应是$\int_{A_i} u\nu(\cdot,\mathrm{d}u)$ 的 Borel 函数。因此$\{\nu(t,A_j):\ j\neq i\}$与 $\nu(t,A_i)$独立。把它们结合起来便得2°。

3° 令 A 满足 $E\nu(t,\partial A)=0$。那么对于$[s,t]$的 m 等分点 $s=t_0^{(m)}<\cdots<t_m^{(m)}=t$，我们有($\Delta X_{t_j^{(m)}}\equiv X_{t_j^{(m)}}-X_{t_{j-1}^{(m)}}$)：

$$\sum_{j=1}^{m} I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})\xrightarrow{p}\nu((s,t]\times A).$$

于是

$$P(\nu((s,t]\times A)=k)=\lim_{m\to\infty}P\left(\sum_{j=1}^{m}I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=k\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i_1<\cdots<i_k}P\Bigg(I_A(\Delta X_{t_{i_1}^{(m)}})=1,\cdots,I_A(\Delta X_{t_{i_k}^{(m)}})=1,$$

$$\bigcap_{j\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}\{I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=0\}\Bigg)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\prod_{l=1}^{k}\frac{P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=1)}{P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=0)}$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}P(I_A(\Delta X_{j}^{(m)})=0).\tag{7.41}$$

首先我们注意

$$\prod_{j=1}^{m}P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=0)\to\gamma>0.\tag{7.42}$$

事实上，由于X在$[0,t]$的一致随机连续性

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k}\prod_{l=1}^{k}\frac{P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=1)}{P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=0)}$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{i_1<\cdots<i_k}\prod\limits_{l=1}^{k}P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=1)}{(1-\sup\limits_{l}P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=1))^k}$$

$$\leqslant\frac{1}{k!}\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=1)\right)^k}{(1-\sup\limits_{|s_2-s_1|<\frac{1}{m}}P(|X_{s_2}-X_{s_1}|\geqslant 1/n))^k}$$

$$\stackrel{\text{记}}{=}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-\delta_m}E\left[\sum_{j=1}^{m}I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})\right]\right)^k.$$

由于引理 7.4 中2°的证明可知上式不大于$\frac{C_k}{k!(1-\delta_m)^k}$（$C_k$ 为常数），从而当 m 大时有上界。如果 $\gamma=0$，那么由(7.41)得到

$$P(\nu((s,t]\times A)=k)=0\quad(k=0,1,\cdots).$$

这与 X_t 在有限时间区间绝对值大于 $1/n$ 的跳跃的个数的有限性矛盾。因此只能有$\gamma>0$。

再则，由于 $0<a<1$ 时有

$$a+\ln(1-a)\leqslant\frac{a^2}{1-a},$$

于是

$$\sum_{j=1}^{m}P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1)$$

$$=-\sum_{j=1}^{m}\ln P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=0)+\sum_{j=1}^{m}[P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1)$$

$$+\ln(1-P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1))]\stackrel{\text{记}}{=}I_1+I_2,$$

而且 $I_1 \to -\ln\gamma (m\to\infty)$,

$$|I_2| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1)^2}{1-P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1)}$$

$$\leqslant \frac{\sup_j P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1)}{1-\sup_j P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1)} \sum_{j=1}^{m} P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1).$$

因此 $\sum_{j=1}^{m} P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1)$ 对于 m 有界，而且 $I_2\to 0(m\to\infty)$。所以

$$\sum_{j=1}^{m} P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1) \to -\ln\gamma \quad (m\to\infty). \tag{7.43}$$

另一方面，因为

$$\prod_{l=1}^{k} P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=0) \geqslant \prod_{l=1}^{k}(1-\sup_l P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=1))$$

$$\geqslant \left(1-\sup_{|s_2-s_1|<\frac{1}{m}} P\left(|X_{s_1}-X_{s_1}|\geqslant\frac{1}{n}\right)\right)^k \to 1 \quad (m\to\infty).$$

所以

$$\sum_{i_1<\cdots i_l} \sum_{l=1}^{k} \frac{P(I_A(\Delta X_{t_{i_j}^{(m)}})=1)}{P(I_A(\Delta X_{t_{i_j}^{(m)}})=0)} - \frac{(-\ln\gamma)^k}{k!}$$

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_l} \prod_{l=1}^{k} P(I_A(\Delta X_{t_{i_l}^{(m)}})=1)$$

$$-\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{m} P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1)\right)^k + o(1)$$

$$\xlongequal{\text{记}} I_3 + o(1). \tag{7.44}$$

简记 $a_j = P(I_A(\Delta X_{t_j^{(m)}})=1)$，于是

$$|I_3| = \left|\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1}\cdots a_{i_k} - \frac{1}{k!}(a_1+\cdots+a_m)^k\right|$$

$$= \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ (l_1,\cdots,l_m)\neq(1,\cdots,1)}} \frac{1}{l_1!\cdots l_m!} a_1^{l_1}\cdots a_m^{l_m}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ l_i>1}} \frac{1}{l_1!\cdots l_m!} a_1^{l_1}\cdots a_m^{l_m}$$

$$\leqslant \sum_{l_1+\cdots+l'_i+\cdots+l_m=k-1} \frac{\sup_j a_j}{l_1!\cdots l'_i!\cdots l_m!} a_1^{l_1}\cdots a_i^{l'_i}\cdots a_m^{l_m}$$

$$\leqslant \sup_j a_j \frac{1}{(k-1)!}(a_1+\cdots+a_m)^{k-1} \quad (l'_i = l_i - 1)$$

$$\leqslant \sup_{|s_2-s_1|\leqslant\frac{1}{m}} P\left(|X_{s_2}-X_{s_1}|\geqslant\frac{1}{n}\right)\left(\frac{(-\ln\gamma)^{k-1}}{(k-1)!}\right)+o(1)$$

$$\to 0 \quad (m\to\infty). \tag{7.45}$$

由(7.41)—(7.45)立得

$$P(\nu((s,t]\times A)=k)=\frac{(-\ln\gamma)^k}{k!}.$$

因此 $\nu((s,t]\times A)\sim$ 参数为 $-\ln\gamma$ 的 Poisson 分布。当然，由 Poisson 性，这个参数应为 $E\nu((s,t]\times A)$。

以上我们假定了 $E\nu(t,\partial A)=0$。由于概率收敛的 Poisson 随机变量列的极限仍是 Poisson 随机变量，用典型方法便得对于一切 $A\in\mathscr{B}(|x|\geqslant 1/n)$，$\nu((s,t]\times A)$是 Poisson随机变量，最后使得对于 $D\in\mathscr{B}([0,\infty)\times(R^d\setminus\{0\}))$，$\nu(D)$是 Poisson 随机变量。

定理7.12 d 维随机连续的 Levy 过程X的不连续点及其上的跃度构成一个 Poisson 点过程 $p_t(w)$，同时X有分解

$$X_t = X_t^c + \int_0^t\int_{R^d\setminus\{0\}} uI_{|u|\leqslant 1}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

$$+\int_0^t\int_{R^d\setminus\{0\}} uI_{|u|>1}\,\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),\qquad (7.46)$$

其中μ是X的计数测度ν的正交鞅测度部分(实际上是"独立"鞅测度)，X^c是一个连续的Levy过程。

如果X还是齐次的，那么这个Poisson点过程是平稳的，而且特征测度$n(\cdot)$(称为X的Levy测度)满足

$$\int_{R^d\setminus\{0\}}\frac{|u|^2}{1+|u|^2}n(\mathrm{d}u)<\infty.\qquad (7.47)$$

证明 引理7.9最后已证明了：当$D\in\mathscr{B}([0,\infty)\times(R^d\setminus\{0\}))$时，$\nu(D)$遵从Poisson分布，所以我们只需验证定义7.14的(P_2)。设$D_1,\cdots,D_k$两两不交且属于$\mathscr{B}([0,\infty)\times(R^d\setminus\{0\}))$。记

$$\mathscr{T}=\{(s,t]\times A:\ s<t,\ A\in\mathscr{B}(R^d\setminus\{0\})\},$$

$$\widetilde{\mathscr{T}}=\mathscr{T}\text{中不交集的有限并全体},\ \lambda(D)=E\nu(D).$$

易见$\lambda(D)$为σ有限测度。因此为了证明(P_2)，我们无妨假定$\lambda(D_1),\cdots,\lambda(D_k)<\infty$。于是存在$D_1^{(m)},\cdots,D_k^{(m)}\in\widetilde{\mathscr{T}}$，使

$$\lambda(D_i\Delta D_i^{(m)})<1/m.$$

令

$$\bar{D}_i^{(m)}=D_i^{(m)}-D_i^{(m)}\cap(D_1^{(m)}\cup\cdots\cup D_{i-1}^{(m)}).$$

于是$\lambda(D_i\Delta\bar{D}_i^{(m)})\to0(m\to\infty)$，而且$\bar{D}_1^{(m)},\cdots,\bar{D}_k^{(m)}$两两不交。由引理7.7推出$\nu(\bar{D}_1^{(m)}),\cdots,\nu(\bar{D}_k^{(m)})$独立，并且对$\varepsilon<1$有

$$P(|\nu(D_i)-\nu(\bar{D}_i^{(m)})|>\varepsilon)\leqslant P(\nu(D_i\Delta\bar{D}_i^{(m)})\geqslant1)$$

$$=1-\exp(-\lambda(D_i\Delta\bar{D}_i^{(m)}))\to0\quad(m\to\infty).$$

因此$\nu(D_1),\cdots,\nu(D_k)$独立，即(P_2)得证。因此$p_t(w)$是Poisson点过程。(7.46)便是定理7.8推论2的直接推论。

推论 如果B是$(\mathscr{F}_t)$Brown运动，p_t是拟左连续的$(\mathscr{F}_t)$Poisson点过程，而且X^ε为$(\mathscr{F}_t)$独立增量过程，其中$X_t^\varepsilon=B_t+\int_{R^d-\{0\}}uI_{|u|>\varepsilon}\nu(t,\mathrm{d}u)(\forall\varepsilon>0)$，那么$B$与$p_t$独立，意即对

于 p_t 的计数测度 $\nu(t,A)$，$\{B,\nu(\cdot,A_1),\cdots,\nu(\cdot,A_k)\}$独立，其中 k 为任意整数，$A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{B}(R^d\backslash\{0\})$两两不交。

证明 用引理 7.9 及定理7.12便得所证。

命题7.8 设 $n(\cdot)$是$(U,\mathscr{B}(U))$上 σ 有限测度。取值于$(U,\mathscr{B}(U))$的$(\mathscr{F}_t)$适应平稳点过程 $p_t(w)$是以 $n(\cdot)$为特征测度的$(\mathscr{F}_t)$Poisson 点过程的充要条件是：对于任意$s<t$，整数 k 及两两不交的 $A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{R}_0\equiv\{A: E\nu(t,A)<\infty(\forall t)\}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_k>0$，恒有

$$E\left(\exp\left[-(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)\begin{pmatrix}\nu((s,t]\times A_1)\\ \vdots\\ \nu((s,t]\times A_k)\end{pmatrix}\right]\middle|\mathscr{F}_s\right)$$

$$=\exp\left[((e^{-\lambda_1}-1),\cdots,(e^{-\lambda_k}-1))\begin{pmatrix}(t-s)n(A_1)\\ \vdots\\ (t-s)n(A_k)\end{pmatrix}\right] \tag{7.48}$$

($(\mathscr{F}_t)$也可以用$(\overline{\mathscr{F}}_t)$代替)。

证明 必要性。此时 $\nu((s,t]\times A_1),\cdots,\nu((s,t]\times A_k)$相互独立且还与 $\mathscr{F}_s$ 独立，同时

$$E\exp(-\lambda\nu((s,t]\times A))=\exp[(e^{-\lambda}-1)(t-s)n(A)],$$

由此便得(7.48)。

充分性。记 $d\lambda$ 为乘积测度 $dt\times n(du)$。令

$$\mathscr{T}=\{(s,t]\times A:\ s<t,\ A\in\mathscr{R}_0\}.$$

设对于两两不交的 $D_1,\cdots,D_k\in\mathscr{T}$，$D_i=(s_i,t_i]\times A_i$，不妨设$(s_i,t_i]$对于不同的 i 要么重合，要么不相交（可以把某个 D_i 分成多个来达到这个附加要求），并且设对于任意 i 有$(s_i,t_i]=(s_{i+1},t_{i+1}]$或者 $t_i\leqslant s_{i+1}$，而 $s=s_1$。反复应用(7.48)，对于 $A\in\mathscr{F}_s$，我们有

$$E\left[\exp\left(-\sum_1^k\lambda_i\nu(D_i)\right)I_A\right]$$

$$=E\left[E\left(\cdots E\left[\exp\left(-\sum_1^k\lambda_i\nu(D_i)\right)I_A\mid\mathscr{F}_{s_1}\right]\cdots\Big|\mathscr{F}_{s_k}\right)\right]$$

$$=\cdots=\exp\left(\sum_1^k(e^{-\lambda_i}-1)\lambda(D_i)\right)P(I_A).$$

设 $U_n\uparrow U$ 且 $n(U_n)<\infty$。对于一般两两不交的 $D_1,\cdots,D_k\subset(s,t]\times U_n$，取 $D_1^{(m)},\cdots,D_k^{(m)}\subset(s,t]\times U_n$，使它们都是有限个 $\mathscr{F}$ 中元的并，而且 $(\hat{\lambda}+\lambda)(D_i\Delta D_i^{(m)})\to0(m\to\infty)$，其中 $\hat{\lambda}(D)=E\nu(D)$，$1\leqslant i\leqslant k$，$D_i\Delta D_i^{(m)}$ 指对称差。记

$$\tilde{D}_i^{(m)}=D_i^{(m)}-D_i^{(m)}\cap(D_1^{(m)}\cup\cdots\cup D_{i-1}^{(m)}).$$

于是 $\tilde{D}_i^{(m)}$ 两两不交，而且它们仍是有限个 $\mathscr{F}$ 中元的并，同时 $(\hat{\lambda}+\lambda)(D_i\Delta\tilde{D}_i^{(m)})\to0$ $(m\to\infty)$。因此

$$\nu(\tilde{D}_i^{(m)})\xrightarrow{p}\nu(D_i).$$

这样，对于任意 $A\in\mathscr{F}_s$，利用控制收敛性就得到

$$E\left[\exp\left(-\sum_1^k\lambda_i\nu(D_i)\right)I_A\right]=\lim_{m\to\infty}E\left[\exp\left(-\sum_1^k\lambda_i\nu(\tilde{D}_i^{(m)})\right)I_A\right]$$

$$=\lim_{m\to\infty}\exp\left[\sum_1^k(e^{-\lambda_i}-1)\lambda(\tilde{D}_i^{(m)})\right]P(A)$$

$$=\exp\left[\sum_1^k(e^{-\lambda_i}-1)\lambda(D_i)\right]P(A).$$

这说明 $(\nu(D_1),\cdots,\nu(D_k))$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立。更一般地，对于 $D_1,\cdots,D_k$ 两两不交且 $\subset(s,\infty)\times U$，仍有 $(\nu(D_1),\cdots,\nu(D_k))$ 与 $\mathscr{F}_s$ 的独立性。因此对于任意两两不交的 $D_1,\cdots,D_k\in\mathscr{B}(U)$，就得到

$$z_t\equiv\sum_{j=1}^k j\nu(D_j\cap((0,t]\times U_n))$$

是$(\mathscr{F}_t)$独立增量过程．但是

$$0\leqslant E(z_t-z_s)=E\sum_{1}^{k}j\nu(D_j\cap((s,t]\times U_n))$$

$$\leqslant kE\nu((s,t]\times U_n)=k(t-s)n(U_n)\to\quad 0(t\downarrow s),$$

因此 z_t 是一维随机连续的 Levy 过程．设它的不连续点及其跃度构成的点过程为 $p_t^{(z)}(w)$，其计数过程为 $\nu_z(t,A)$．由定理 7.12 知道 $p_t^{(z)}(w)$是 Poisson 点过程．但是

$$\nu(D_j\cap([0,t]\times U_n))=z_t\text{ 在}[0,t]\text{中跃度为 }j\text{ 的不连续点数}$$
$$=\nu_z(t,(j-1,j]),$$

所以 $\nu(D_1\cap([0,t]\times U_n)),\cdots,\nu(D_k\cap([0,t]\times U_n))$是独立的，分别是参数 为$\lambda(D_i\cap([0,t]\times U_n))(i=1,\cdots,k)$的 Poisson 随机变量．又由于独立性和 Poisson 性在极限后保持，所以 $\nu(D_1),\cdots,\nu(D_k)$是参数为 $\lambda(D_1),\cdots,\lambda(D_k)$的独立 Poisson 随机变量．因此 $p_t(w)$是平稳$(\mathscr{F}_t)$Poisson 点过程．

注1 在(7.48)中$(\mathscr{F}_t)$可以不必要求右连续，而且(7.48)对$(\mathscr{F}_{t+})$成立，当且仅当(7.48)对$(\mathscr{F}_t)$成立．

注2 定理7.12中的 Poisson 点过程显然是$(\mathscr{F}_t^X)$Poisson 点过程，其中 $\mathscr{F}_t^X=\sigma(X_s,s\leqslant t)$．

注3 对一般非平稳的$(\mathscr{F}_t)$Poisson 点过程也有对应于命题 7.8 的结论，只需要用 $\lambda((s,t]\times A_i)$，$\lambda(\cdot)$分别代替(7.48)中的 $(t-s)n(A_i)$及命题叙述中的 $tn(\cdot)$．

命题7.9 $(\mathscr{F}_t)$Poisson 点过程为$(\mathscr{F}_t)$拟左连续，当且仅当对于$\forall A\in\mathscr{R}_0$，$E\nu(t,A)$连续．

证明显然．

定理7.13(S. Watanabe 关于 Poisson 点过程的特征描述) σ 有限的$(\mathscr{F}_t)$拟左连续适应点过程的补偿测度如果是非随机的，那么它是$(\mathscr{F}_t)$拟左连续的 Poisson 点过程(当然这条件也必要)．

证明 令

$$N_t=\begin{pmatrix}\nu(t,A_1)\\ \vdots\\ \nu(t,A_k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_0^t\int_U I_{A_1}(u)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\\ \vdots\\ \int_0^t\int_U I_{A_k}(u)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\end{pmatrix}$$

$$(A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{R}_0).$$

对于$D\equiv\{x\in R^k:\ x^T=(x_1,\cdots,x_k),x_i\geqslant 0(i=1,\cdots,k)\}$，置$F(x)=\exp(-x^T\lambda)(\lambda\in R^k)$。于是$F$的一、二阶偏微商在$D$上有界。对$F(N_t)$用Ito公式(定理7.11)，我们得到

$F(N_t)-F(N_s)$

$$=\int_s^t\int_U\left[F\left(N_{s-}+\begin{pmatrix}I_{A_1}(u)\\ \vdots\\ I_{A_k}(u)\end{pmatrix}\right)-F(N_{s-})\right]\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

$$=\int_s^t\int_U\exp(-\lambda^TN_{s-})\left[\exp\left(-\sum_1^k\lambda_iI_{A_i}(u)\right)-1\right]\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

$$(\lambda^T=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)).$$

任取$\Lambda\in\mathscr{F}_s$，在上式两边乘以$I_\Lambda F(N_s)^{-1}$，再取期望。由于定理假定，对于$A\in\mathscr{R}_0$，$\pi(t,A)$是连续函数，所以我们有

$$E[\exp(-\lambda^T(N_t-N_s))I_\Lambda]-P(\Lambda)$$
$$=\int_s^t\int_U E[\exp(-\lambda^T(N_{r-}-N_s))I_\Lambda]$$
$$\times\left[\exp\left(-\sum_1^k\lambda_iI_{A_i}(u)\right)-1\right]\pi(\mathrm{d}r,\mathrm{d}u).$$

用逐次逼近解这个方程，并利用上式右边对t的连续性，我们得到

$$E[\exp(-\lambda^T(N_t-N_s))I_\Lambda]$$
$$=E[\exp(-\lambda^T(N_{t-}-N_s))I_\Lambda]\quad\text{(拟左连续性)}$$

$$= P(A)\exp\left(\sum_1^k (e^{-\lambda_i} - 1)\pi((s,t],A_i)\right).$$

因此

$$E[\exp(-\lambda^T(N_t - N_s)) | \mathscr{F}_s]$$
$$= \exp\left(\sum_1^k (e^{-\lambda_i} - 1)\pi((s,t],A_i)\right).$$

应用命题 7.8 就得到本定理。

命题7.10（平稳 Poisson 点过程的强再生性）　设 p_t 是取值于 U 的平稳$(\mathscr{F}_t)$ Poisson点过程，σ 为有限$(\mathscr{F}_t)$停时，那么 $p_{t+\sigma} \equiv \theta_\sigma p_t$ 是$(\mathscr{F}_{t+\sigma})$Poisson 点过程，而且与 p_t 有 相同的补偿测度。

证明　先设 σ 有界，由 Doob 停止定理推出对于 $A \in \mathscr{R}_0$

$$[\nu(t+\sigma,A) - \nu(\sigma,A)] - [\pi(t+\sigma,A) - \pi(\sigma,A)]$$

是$(\mathscr{F}_{t+\sigma})$鞅，因此 $\nu(t+\sigma,A) - \nu(\sigma,A)$作为 $p_{t+\sigma}$的计数测度有补偿 测度 $\pi(t+\sigma,A) - \pi(\sigma,A) = (t+\sigma)n(A) - \sigma n(A) = tn(A)$。由定理7.13立得 $\theta_\sigma p_t$是$(\mathscr{F}_{t+\sigma})$Poisson 点过程。

一般的 σ 可用 $\sigma \wedge n$ 近似。命题证毕。

Poisson 点过程有许多性质与 Brown 运动 类 似。在本节的最后，我们来讨论它的累次积分。

Poisson 过程的最主要例子就是平稳 Poisson 点过程在某个固定的 $A \in \mathscr{R}_0$ 的计数测度 $\nu(t,A)$。较为一般些是积分

$$\int_0^t f(s)g(u)\nu(ds,du).$$

设 N_t 为 Poisson 过程，$EN_t = t$，那么 $\mu_t = N_t - t$ 是 平 方 可积鞅。定义

$$\int_0^t N_s dN_s \equiv \int_0^t N_{s-} dN_s.$$

于是对于 N_t 的第 k 次跳跃时刻 τ_k，我们有

$$\int_0^t N_s \mathrm{d}N_s = \sum_{k=1}^{N_t} N_{\tau_k -} = \sum_{k=1}^{N_t}(k-1) = \frac{(N_t - 1)N_t}{2},$$

所以 n 次累次积分有

$$\int_{0<t_1<\cdots<t_n<t}\cdots\int \mathrm{d}N_{t_1}\cdots\mathrm{d}N_{t_n}$$

$$= \frac{1}{n!}N_t(N_t-1)\cdots(N_t-n+1) = \binom{N_t}{n}.$$

对于鞅 μ_t 的累次积分，我们有

$$D_t^{(n)} \equiv \int_{0<t_1<\cdots<t_n<t}\cdots\int \mathrm{d}\mu_{t_1}\cdots\mathrm{d}\mu_{t_n} = K_n(N_t, t),$$

其中 $K_n(x,t)$ 是 n 阶 Poisson-Charlier 多项式：

$$K_n(x,t) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k x(x-1)\cdots(x-(n-k)+1).$$

它可由母函数 $\sum_0^\infty K_n(x,t)z^n = \mathrm{e}^{-tz}(1+z)^x$ 得到，并且有

$$E(D_t^{(n)}D_t^{(m)}) = \delta_{nm}\frac{t^n}{n!}.$$

引理 7.10 两个独立的 Poisson 过程 $N^{(1)}, N^{(2)}$ 以概率为 1 地不能有相同的跳跃：

$$E\left(\sum_{s>0}\Delta N_s^{(1)}\Delta N_s^{(2)}\right) = 0.$$

证明 令 $N^{(1)}$ 的跳跃时刻为 $\{\tau_n\}$，那么 $\{\tau_n\}$ 与 $N^{(2)}$ 是独立的，于是

$$左 = E\left(\sum_{n>0}\Delta N_{\tau_n}^{(2)}\right) = \sum_{n>0}E(\Delta N_{\tau_n}^{(2)}) = 0.$$

命题7.11 $N = (N^{(1)},\cdots,N^{(d)})$ 是 $(\mathscr{F}_t)$Poisson 过程(即分量独立的 $(\mathscr{F}_t)$Poisson 过程)当且仅当满足

(N_1) 分量 $N^{(i)}$ 都是$(\mathscr{F}_t)$Poisson 过程；

(N_2) N 是$(\mathscr{F}_t)$Levy 过程；

(N_3) $\forall i\neq j$，$N^{(i)}$ 与 $N^{(j)}$ 概率为 1 地不能有相同的跳跃。

证明 只需证充分性。为此也仅需证明分量的独立性。下面以两个分量为例，多个分量完全类似。令

$$X_t = e^{i(\lambda N^{(1)}+\mu N^{(2)})}.$$

由(N_3)我们有

$$X_t = 1+\sum_{0<s\leq t}\Delta X_s = 1+\sum_{0<s\leq t}X_{s-}(e^{i(\lambda\Delta N_s^{(1)}+\mu\Delta N_s^{(2)})}-1)$$

$$=1+\sum_{0<s\leq t}[(e^{i\lambda}-1)\Delta N_s^{(1)}+(e^{i\mu}-1)\Delta N_s^{(2)}].$$

利用 $N_t^{(i)}-c_it\quad\left(c_i\equiv\dfrac{EN_t^{(i)}}{t}\right)$的鞅性，我们有

$$EX_t = 1+E\int_0^t X_{s-}[(e^{i\lambda}-1)c_1+(e^{i\mu}-1)c_2]ds$$

$$=1+\int_0^t EX_s ds[(e^{i\lambda}-1)c_1+(e^{i\mu}-1)c_2].$$

解出 EX_t 得到

$$Ee^{i(\lambda N_t^{(1)}+\mu N_t^{(2)})} = EX_t$$

$$= e^{[(e^{i\lambda}-1)c_1+(e^{i\mu}-1)c_2]t}$$

$$= Ee^{i\lambda N_t^{(1)}}Ee^{i\mu N_t^{(2)}}.$$

证毕。

命题7.12 σ有限的$(\mathscr{F}_t)$点过程是$(\mathscr{F}_t)$Poisson 点过程的充要条件为：对 $\forall t>0, t_1<\cdots<t_n$，$\forall n$，$\forall A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{B}(u)$及任意有界可测函数 $f\in\mathscr{B}(R^n)$，有

$$E(f(\nu((t,t+t_1]\times A_1),\cdots,\nu((t,t+t_n]\times A_n))|\mathscr{F}_t)$$
$$=Ef(\nu(t_1,A_1),\cdots,\nu(t_n,A_n)).\qquad(7.49)$$

证明 只需证充分性．为此只需证明对于两两不交，且使 $\nu(t,A_1),\cdots,\nu(t,A_n)<\infty$(a.e.d$P$) 的 $A_1,\cdots,A_n$，$(\nu(\cdot,A_1),\cdots,\nu(\cdot,A_n))$是$(\mathscr{F}_t)$Poisson过程．这只需验证命题7.11的条件．由(7.49)条件(N_2)成立．又

$$\nu(\{t\}\times A_i)\nu(\{t\}\times A_j)=\nu(\{t\}\times(A_i\cap A_j))=0,$$

所以(N_3)成立．最后，$\nu(\cdot,A_1)$是跳跃量仅能是1的Levy过程，因此元是Poisson过程[I]．

§7.8 含Poisson点过程积分的随机微分方程

我们如果研究在 R^d 中由一个平稳$(\mathscr{F}_t)$Poisson点过程$p_t(w)$所驱动的"纯断"过程，就需要讨论下述类型的随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t=\int_0^t\int_{R^d\setminus\{0\}}f(s,X_{s-},u)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),$$

其中 $\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$是 $p_s(w)$的计数测度．

当 Levy 测度 $n(R^d\setminus\{0\})<\infty$时($\mathrm{d}tn(\mathrm{d}u)=E\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)$),记对应于 $p_t(w)$的点列的时刻全体是集合 $\mathscr{D}_{p(w)}$，于是在$[0,t]$的平均点数为

$$E^{\#}\{\mathscr{D}_{p(w)}\cap[0,t]\}=E\int_0^t\int_{R^d\setminus\{0\}}\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

$$=\int_0^t\int_{R^d\setminus\{0\}}\mathrm{d}sn(\mathrm{d}u)<\infty.$$

因此

$$^{\#}\{\mathscr{D}_{p(w)}\cap[0,t]\}<\infty\quad(\mathrm{a.e.\,d}P).$$

所以 $\mathscr{D}_{p(w)}$ 的点可以a.e. dP 地排成次序 $\sigma_1(w)<\sigma_2(w)<\cdots$(如果$\mathscr{D}_{p(w)}$ 只有 k 个点，则令 $\sigma_{k+1}(w)=\infty$，以后均为∞，这时相应的"$<$"要用"$\leqslant$"代替)，又因为对任意 k 有

$$\{\sigma_k>t\}=\{\nu(t,R^d\setminus\{0\})\leqslant k\}\in\mathscr{F}_t,$$

所以 σ_k 为$(\mathscr{F}_t)$停时。

但是，一般常有 $n(R^d\backslash\{0\})=\infty$$\left(\text{例如 } n(A)=\int_A \frac{\mathrm{d}u}{|u|^{d+1}}\text{就是}\right.$

一个典型的例子，它有 $\left.n(R^d\backslash\{0\})=\infty\right)$。这时候我们找一个$U_0$ $\in\mathscr{B}(R^d\backslash\{0\})$，使 $n(U_0)<\infty$，而且

$$f(t,x,u)I_{R^d\backslash U_0}(u)\in\mathscr{L}_2(n(\mathrm{d}u)).$$

再令

$$\bar{b}(t,x)=\int_{R^d\backslash U_0}f(t,x,u)n(\mathrm{d}u).$$

由于我们只考虑右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程X，于是

$$\int_0^t \bar{b}(s,X_{s-})\mathrm{d}s=\int_0^t \bar{b}(s,X_s)\mathrm{d}s.$$

因此当 f 充分好时就有

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{R^d} f(s,X_{s-},u)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\\
&\quad=\int_0^t\int_{U_0} f(s,X_{s-},u)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\\
&\qquad+\int_0^t\int_{R^d\backslash U_0} f(s,X_{s-},u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)+\int_0^t\bar{b}(s,X_s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

这样，我们就应该考虑下述方程：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t=\bar{b}(t,X_t)\mathrm{d}t&+\int_{U_0} f(t,X_{t-},u)\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)\\
&+\int_{R^d\backslash U_0} f(t,X_{t-},u)\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u).
\end{aligned}$$

这时把 $p_t(w)$限制到只取 U_0 中值的那些点(称为p_t 在 U_0 上的限制)，那么这个点过程的点列“到达”时刻就在一列$(\mathscr{F}_t)$停时 $\sigma_1(w)<\sigma_2(w)<\cdots$上(可以取$+\infty$，只有此时“$<$”应改为“$\leqslant$”)。

如果考虑“纯断”与“连续”相混合的情形，就要考虑：

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt + \int_{U_0} f(t, X_{t-}, u)\nu(dt, du)$$
$$+ \int_{R^d \setminus U_0} f(t, X_{t-}, u)\mu(dt, du). \qquad (7.50)$$

(7.50)称为Ito-Skorohod型方程。如果还有$f(t,x,u) \in \mathscr{L}_2(n(du))$，则可取$U_0 = \varnothing$。

此外，R^d 可以改成可测空间U。作为特例，我们常考虑系数σ, b, f 不显含 t 的情形。为了记号的方便，我们简记方程(7.50)为 SDE(U_0; σ, b; f)。

定理7.14 设$\sigma(x), b(x)$分别为$d \times r$，$d \times 1$ $\mathscr{B}(R^d)$函数，$f(x,u)$为$d \times 1$ $\mathscr{B}(R^d \times U)$函数，它们满足

$$\int_{U \setminus U_0} |f(0,u)|^2 n(du) < \infty \qquad (7.51)$$

及 Lip 条件：

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 + \int_{U \setminus U_0} |f(x,u) - f(y,u)|^2 n(du) \leqslant K^{(1)}|x - y|^2, \qquad (7.52)$$

其中$n(\ \ )$是平稳Poisson点过程p_t 的 Levy 测度。那么

SDE(U_0;σ, b; f)

存在唯一右连左极($\mathscr{F}_t$)适应过程解X，它具有预先给定的初值$X_0 \in \mathscr{F}_0$。

证明 如前，我们把 p_t 限制到 U_0 上，那么这限制的点过程的点列时刻为停时列 $\sigma_1(w) < \sigma_2(w) < \cdots$。显然不管对什么$X$，恒有

$$\int_0^t \int_{U_0} f(X_{s-}, u)\nu(ds, du) = 0 \quad (0 \leqslant t < \sigma_1 \text{时})。$$

因此我们在$[0, \sigma_1)$上考虑(7.50)的“等价”方程：

$$Y_t = X_0 + \int_0^t \sigma(Y_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t \int_{U \setminus U_0} f(X_{s-}, u)\mu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u). \tag{7.53}$$

对(7.53)用逐次逼近得到 $Y^{(n)}$。(7.51),(7.52)蕴含线性增长性：

$$|\sigma(x)|^2 + |b(x)|^2 + \int_{U \setminus U_0} |f(x,u)|^2 n(\mathrm{d}u) \leqslant K^{(2)}(1 + |x|^2). \tag{7.54}$$

与定理3.1类似地可以证明 $Y_t^{(n)} - X_0$(a.e. dP)在$0 \leqslant t \leqslant T$上一致收敛。由此得到 $Y \equiv \lim\limits_{n \to \infty} Y^{(n)}$ 是(7.45)的解，而且唯一。令

$$X_t^{(1)} = \begin{cases} Y_t, & 0 \leqslant t < \sigma_1, \\ Y_{\sigma_1 -} + f(Y_{\sigma_1 -}, p_{\sigma_1}), & t = \sigma_1. \end{cases}$$

它是(7.50)在 $0 \leqslant t \leqslant \sigma_1$ 的唯一解。为了继续在$(\sigma_1, \sigma_2]$上构造，记

$$\bar{X}_0 = X_{\sigma_1}^{(1)} I_{\sigma_1 < \infty}, \bar{\sigma}_2 = (\sigma_2 - \sigma_1) I_{\sigma_1 < \infty} + \infty I_{\sigma_1 = \infty},$$

$$\bar{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{\sigma_1 + t}, \bar{B}_t = (B_{\sigma_1 + t} - B_{\sigma_1}) I_{\sigma_1 < \infty},$$

$$\bar{p} = (\theta_{\sigma_1} p) I_{\sigma_1 < \infty} \quad (\text{对应地有 } \bar{p}, \bar{\mu}).$$

用$\{w: \sigma_1(w) < \infty\}$代替 Ω 后，易验证 $\bar{B}$ 是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动，$\bar{p}$ 仍是以 $n(\cdot)$ 为 Levy 测度的平稳$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$Poisson 点过程。于是仿上段可推出以$(\bar{X}_0, \bar{B}, \bar{\mu}, \bar{p})$ 为"资料"的SDE$(U_0; \sigma, b; f)$在$0 < t \leqslant \bar{\sigma}_2$上存在唯一解 $\bar{X}^{(2)}$。令

$$X_t^{(2)} = \begin{cases} X_t^{(1)}, & 0 \leqslant t \leqslant \sigma_1, \\ \bar{X}_{t - \sigma_1}^{(2)}, & \sigma_1 < t \leqslant \sigma_2. \end{cases}$$

它就是(7.50)在$[0, \sigma_2]$的唯一解。继续作下去，由于在$[0, t]$中只有有限个 σ_k，最后就得到(7.50)在$[0, t]$的唯一解。

推论 1 定理中的系数 σ,b,f 可以显含 t， 结论仍对(证明时只需令 $\tilde{X}=\begin{pmatrix}X\\t\end{pmatrix}$,再解 $\tilde{X}$ 的方程即可),只需 Lip 条件及(7.54)关于$0\leqslant t\leqslant T$ 一致地成立。

推论 2 系数可以是随机的：当 t,x,u 固定时 $\sigma(t,x)\in\mathscr{L}_2$, $b(t,x)\in\mathscr{L}_1$, $f(t,x,u)\in\mathscr{L}_2(\langle\mu\rangle)$,又 $\sigma,b\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(R^d)$, $f\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(R^d\times U)$，并且 Lip 条件与条件(7.54)如推论 1 那样地满足。那么结论仍然成立。

下面要减弱 Lip 性。

引理7.11 若 H_t 为右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程且系数 σ, b,f 满足$\int_{U\setminus U_0}|f(0,u)|^2n(\mathrm{d}u)<\infty$ 及 $\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$ 条件：对 $\forall N$ 有

$$|\sigma(x)-\sigma(y)|^2+|b(x)-b(y)|^2+\int_{U\setminus U_0}|f(x,u)-f(y,u)|^2n(\mathrm{d}u)$$

$$\leqslant K_N^{(1)}|x-y|^2\quad(\forall |x|,|y|\leqslant N),\tag{7.55}$$

那么存在$(\mathscr{F}_t)$停时$\zeta\leqslant\infty$，使方程

$$X_t=H_t+\int_0^t\sigma(X_s)\mathrm{d}B_s+\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t\int_{U\setminus U_0}f(X_{s-},u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\tag{7.56}$$

在$0\leqslant t<\zeta$ 存在唯一右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程解X，并在ζ附近无界。

如果系数还满足线性增长性(7.54),那么 $P(\zeta=\infty)=1$。

证明 若 $K_N^{(1)}$ 不依N且 H_t 有二阶矩，则只需用典型迭代就得到$[0,\infty)$上的唯一解。一般情形时我们令

$$\sigma^{(N)}=\sigma\left(\left(1\wedge\frac{N}{|x|}\right)x\right),\qquad b^{(N)}=b\left(\left(1\wedge\frac{N}{|x|}\right)x\right),$$

$$f^{(N)}=f\left(\left(1\wedge\frac{N}{|x|}\right)x,u\right),\qquad H_t^{(N)}=\left(1\wedge\frac{N}{|H_t|}\right)H_t.$$

那么以它们为“资料”的对应于(7.56)的方程在$[0,\infty)$有唯一解$X^{(N)}$，与定理3.1类似地有$X^{(l)}_{(t\wedge\tau_N\wedge\tau_l)-}=X^{(N)}_{(t\wedge\tau_N\wedge\tau_l)-}$，其中$\tau_N=\inf\{t:|X_t^{(N)}|\geqslant N\}$。令$\zeta=\lim\limits_{N\to\infty}\tau_N$，$X_t=X_t^{(n)}(\forall n$，当$t<\inf\limits_{N>n}\tau_N)$。于是$X$是(7.56)的唯一解。

设线性增长(7.54)满足。往证$P(\zeta=\infty)=1$。设相应于$H_t^{(N_0)},\sigma^{(N)},b^{(N)},f^{(N)}$的方程(7.56)的解为$\bar{X}^{(N)}$。那么

$$\begin{aligned}P(\zeta\leqslant t)&=P(\lim_N\tau_N\leqslant t)\leqslant\lim_N P(\tau_N\leqslant t)\\&=\lim_N P(\sup_{[0,t]}|X_s^{(N)}|\geqslant N)\\&\leqslant\lim_N(P(\sup_{[0,t]}|\bar{X}_s^{(N)}|\geqslant N)+P(\sup_{[0,t]}|H_t|\geqslant N_0)).\end{aligned}\tag{7.57}$$

利用 Schwarz 不等式及(7.54),(7.56),我们有

$$E|\bar{X}_{t-}^{(N)}|^2\leqslant 3d\left[N_0^2+(t+1)K^{(2)}\int_0^t(1+E|\bar{X}_{s-}^{(N)}|^2)\,\mathrm{d}s\right].$$

再用 Gronwall 不等式(引理3.3)便得

$$E|\bar{X}_{t-}^{(N)}|^2\leqslant C_t\equiv 3d[N_0^2+t(t+1)K^{(2)}]e^{3dK^{(2)}t}.\tag{7.58}$$

由它再运用类似的推理及 Doob 不等式，我们还有

$$\begin{aligned}&E(\sup_{[0,t]}|\bar{X}_s^{(N)}|^2)\\&\leqslant 3d\left[E\sup_{[0,t]}|H_s^{(N_0)}|^2+(t+4)tK^{(2)}+K^{(2)}\int_0^t E|\bar{X}_{s-}^{(N)}|\,\mathrm{d}s\right]\\&\leqslant 3d[E\sup_{[0,t]}|H_s^{(N_0)}|^2+(t+4)tK^{(2)}+C_t tK^{(2)}]\\&\leqslant C_t^*[1+E\sup_{[0,t]}|H_s^{(N_0)}|^2].\end{aligned}$$

由此，再由 Chebyshev 不等式推出$P(\sup\limits_{[0,t]}|\bar{X}_s^{(N)}|\geqslant N)\to 0$。应用(7.57)便得$P(\zeta\leqslant t)=0$。因此$P(\zeta=\infty)=1$。

推论 我们有解的估计式

$E(\sup\limits_{[0,t]}|\overline{X}_s^{(N)}|^2)\leqslant$常数$(1+E\sup\limits_{[0,t]}|H_s|^2)$（常数依 t 连续地变）。

注 系数 σ,b,f 也可显含 t 或也可随机，均有相应结论（当然条件的满足需要对$0\leqslant t\leqslant T$及"随机"的"w"一致地成立。但是对应的证明几乎不变）。

定理7.15 定理7.14中的 Lip 条件(7.52)可以改为$\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$条件(7.55)，这时方程(7.50)存在唯一解 $X_t(0\leqslant t<\zeta)$。又当线性增长(7.54)满足时，$P(\zeta=\infty)=1$。

证明 按 σ_k 分段进行，仿照定理7.14并利用引理 7.11.

注 由前面的注可知系数显含 t 及随机时，也有相应的条件和结论。证明类同。

定理7.16 定理7.15中的解X（设系数依赖 t）是强马氏过程，其转移函数为

$$P(s,x,t,A)=P(X_t^{(s,x)}\in A),$$

其中 $X^{(s,x)}$是方程

$$\begin{aligned}Y_t=x&+\int_s^t\sigma(r,Y_r)\mathrm{d}B_r+\int_s^t b(r,Y_r)\mathrm{d}r\\&+\int_s^t\int_{U\setminus U_0}f(r,Y_{r-},u)\mu(\mathrm{d}r,\mathrm{d}u)\\&+\int_s^t\int_{U_0}f(r,Y_{r-},u)\nu(\mathrm{d}r,\mathrm{d}u)\end{aligned}$$

的解。

若系数不显含 t，那么X是齐次强马氏过程（若系数 σ,b 是常数，f 只依赖于u，那么X是齐次 Levy 过程），其弱生成元 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 是 $A|_{C_b^2}$（A 限制定义域在 C_b^2 上）的扩张，其中

$$(A\varphi)(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i b^i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$+\int_{U\setminus U_0}[\varphi(x+f(x,u))-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)f(x,u)]n(\mathrm{d}u)$$

$$+\int_{U_0}[\varphi(x+f(x,u))-\varphi(x)]n(\mathrm{d}u)$$

$$(a=\sigma\sigma^T).$$

证明 令$\mathscr{F}_t=\sigma(X_0,B_s,\nu(s,A),s\leqslant t,A\in\mathscr{R}_0)$. 对于$(\mathscr{F}_t)$停时$\tau$，定义

$$\mathscr{G}^\tau=\sigma(B_{s+\tau}-B_\tau,\nu(s+\tau,A)-\nu(\tau,A),s\geqslant 0,A\in\mathscr{R}_0).$$

由B与ν的独立性及它们的强再生性推出$\mathscr{F}_\tau$与$\mathscr{G}^\tau$独立. 当$g(x,w)\in\mathscr{B}(R^d)\times\mathscr{G}^\tau$时，可用典型方法推得：对于$\eta\in\mathscr{F}_\tau$有

$$E(g(\eta,w)|\mathscr{F}_\tau)=[Eg(x,w)]_{x=\eta}. \tag{7.59}$$

对于有界且$\mathscr{B}(R^d)$可测的F令

$$\begin{cases} g(x,w)=F\Big(x+\int_\tau^{\tau+t}\sigma(s,X_s)\mathrm{d}B_s+\int_\tau^{\tau+t}b(s,X_s)\mathrm{d}s \\ \qquad +\int_\tau^{\tau+t}\int_{U\setminus U_0}f(s,X_{s-},u)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) \\ \qquad +\int_\tau^{\tau+t}\int_{U_0}f(s,X_{s-},u)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\Big), \\ \eta=X_\tau \end{cases}$$

于是$g(x,w)\in\mathscr{B}(R^d)\times\mathscr{G}^\tau$（不妨设$\mathscr{G}^\tau$完备）. 用(7.59)便得

$$E(F(X_{t+\tau})|\mathscr{F}_\tau)=E(g(X_\tau,w)|\mathscr{F}_\tau)$$
$$=[Eg(x,w)]_{x=X_\tau}=E(F(X_{t+\tau})|X_\tau).$$

这就证明了X的强马氏性. 特别取$\tau=s,F=I_A$便得

$$P(X_{t+s}\in A|\mathscr{F}_s)=P(X_{t+s}^{(s,x)}\in A)|_{x=X_s},$$

因此$P(s,x,t,A)=P(X_t^{(s,x)}\in A)$.

当系数不显含t时，$X_{t+\tau}^{(\tau,x)}$满足

$$Y_t = x + \int_0^t \sigma(Y_s)\mathrm{d}(B_{s+\tau} - B_\tau) + \int_0^t b(Y_s)\mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t \int_{U \setminus U_0} f(Y_{s-}, u)\tilde{\mu}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) + \int_0^t \int_{U_0} f(Y_{s-}, u)\nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u),$$

其中 $\nu, \tilde{\mu}$ 分别是 $\theta_\tau p_t$ 的计数测度及它的正交鞅测度部分。但是方程的唯一解是由逐次迭代及越过 p_t 的点列 σ_n 的跳跃 $f(Y_{\sigma_n -}, p_{\sigma_n})$ 所构成，利用 (B, p) 的强再生性及强解的唯一性，我们便得到马氏过程的齐次性：

$$E(F(Y_{t+\tau}) \mid \mathscr{F}_\tau) = E_{X_\tau}(F(X_t)).$$

关于 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 的结论只需用定理7.11。

对于 Ito-Skorohod 方程，如果把 Poisson 过程也作为"参"过程，则同样可定义弱解与鞅问题。Yamada-Watanabe 定理及弱解存在且有轨道唯一性蕴含分布唯一性，也同样成立(参见[LM])。

有时，我们需要与(7.50)稍为不同的方程：

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t + b(t, X_t)\mathrm{d}t + \int_U f(t, X_{t-}, u)\nu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)$$

$$+ \int_U g(t, X_{t-}, u)\mu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u). \tag{7.50'}$$

对这类方程，我们有

定理7.14′ 设 $\sigma(t,x), b(t,x)$ 分别为 $d \times r, d \times l$ Borel 函数，$f(t,x,u), g(t,x,u)$ 为 $d \times l$ Borel 函数，满足(对 $\forall T > 0$，当 $t \leqslant T$ 时）线性增长条件

$$|\sigma(t,x)| + |b(t,x)| + \int_U |f(t,x,u)| n(\mathrm{d}u)$$

$$+ \left(\int_U |g(t,x,u)|^2 n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_T^{(1)}(1 + |x|)$$

及局部 Lip 条件：当

$$t \leqslant T, |x|, |y| \leqslant n \tag{7.51'}$$

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)|$$

$$+\int_U |f(t,x,u)-f(t,y,u)|n(\mathrm{d}u)$$

$$+\int_U |g(t,x,u)-g(t,y,u)|^2 n(\mathrm{d}u)\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant K_{T,n}\ |x-y|,$$

(7.52′)

那么(7.50′)对任意初值 X_0存在唯一强解。

证明 不妨假定(7.52′)中 $K_{T,n}$ 不依 n，否则可用局部化达到。先假定 $EX_0^2<\infty$。记(7.50′)右方为 $F(X_t)$。令

$$\mathscr{K}(X)=X_0+\int_0^t F(X_s)\mathrm{d}s.$$

利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式及(7.52′)，我们有

$$E\,(\sup_{t\leqslant T_1}|\mathscr{K}(X)_t-\mathscr{K}(X)_t|)$$

$$\leqslant E\left(\sup_{t\leqslant T_1}\left|\int_0^t(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))\mathrm{d}B_s\right|\right)$$

$$+E\left(\sup_{t\leqslant T_1}\int_0^t|b(s,X_s)-b(s,Y_s)|\mathrm{d}s\right)$$

$$+E\left(\sup_{t\leqslant T_1}\int_0^t\int_U(f(s,X_{s-},u)-f(s,Y_{s-},u))\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\right)$$

$$+E\left(\sup_{t\leqslant T_1}\int_0^t\int_U(g(s,X_{s-},u)-g(s,Y_{s-},u))\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\right)$$

$$\leqslant\text{常数}\cdot E\left(\left(\int_0^{T_1}|\sigma(t,X_t)-\sigma(t,Y_t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\right)$$

$$+E\int_0^{T_1}|b(t,X_t)-b(t,Y_t)|\mathrm{d}t$$

$$+E\int_0^{T_1}\int_U|f(t,X_{t-},u)-f(t,Y_{t-},u)|n(\mathrm{d}u)\mathrm{d}t$$

$$+\text{常数}\cdot E\left(\int_0^{T_1}\int_U|g(t,X_{t-},u)-g(t,Y_{t-},u)|^2 n(\mathrm{d}u)\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\text{常数}\cdot E\left[\left(\int_0^{T_1}|X_t-Y_t|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\int_0^{T_1}|X_t-Y_t|\mathrm{d}t\right]$$

$$\leqslant C(\sqrt{T_1}+T_1)E(\sup_{t\leqslant T_1}|X_t-Y_t|).$$

取定 T_1，使 $C(\sqrt{T_1}+T_1)<1$， 便知 $\mathscr{K}(X)$是 Banach 空间 $\mathscr{S}^1[0,T_1]$的子集$\mathscr{S}^2[0,T]$自身的压缩算子，其中

$$\mathscr{S}^p[0,T_1]=\{[0,T_1]\text{上左连左极过程}X:\ \|X\|_{\mathscr{S}^p[0,T_1]}<\infty\},$$

$$\|X\|_{\mathscr{S}^p[0,T_1]}\equiv E(\sup_{t\leqslant T_1}|X_t|^p).$$

这个算子可以连续扩张为$\mathscr{S}^1[0,T_1]$的压缩算子$\widetilde{\mathscr{K}}$.由压缩映像原理，$\widetilde{\mathscr{K}}$在$\mathscr{S}^1[0,T_1]$存在唯一不动点X。这个不动点可以用逐次逼近求得。我们令

$$X^{(0)}\equiv X_0,\ X^{(n+1)}=\mathscr{K}(X^{(n)});$$

则 $X^{(n)}\xrightarrow{\mathscr{S}[0,T]}X$。我们要证明$X$在$\mathscr{K}$的定义域$\mathscr{S}^2[0,T_1]$中以便得到$X=\mathscr{K}(X)$(而不仅仅是$\widetilde{\mathscr{K}}(X)$).为此我们注意(7.51′),(7.52′)蕴含系数的线性增长性,由它及 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，与定理3.1证明类似，可得

$$E(\sup_{t\leqslant T_1}|X_t^{(n+1)}|^2)\leqslant C\cdot E\left[|X_0|^2+\int_0^{T_1}(1+|X_t^{(n)}|^2)\mathrm{d}t\right].$$

由此归纳地推出 $X^{(n)}$在$\mathscr{S}^2[0,T_1]$一致有界。再由 $X^{(n)}\xrightarrow{\mathscr{S}^1[0,T_1]}X$及 Fatou 引理便得 $X\in\mathscr{S}^2[0,T_1]$.于是 $X_t=\mathscr{K}(X)_t(t\leqslant T_1)$.同样可以证明对$\forall k$,$[kT_1,(k+1)T_1]$中强解的存在唯一性，从而在 $t\geqslant 0$ 强解存在唯一。再用局部化取消$EX_0^2<\infty$的限制。

下面我们粗略地介绍定理 7.14′在 Mckean-Vlasov 型随机微分方程中的应用。

X 称为初值为 X_0的Mckean-Vlasov Ito-Skorohod 方程的解，如果(当 $f\equiv g\equiv 0$时，则称为Mckean-Vlasov 方程)

$$\mathrm{d}X_t=\sigma(X_t,P_t)\mathrm{d}B_t+b(X_t,P_t)\mathrm{d}t$$
$$+\int_U f(X_{t-},P_t,u)\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)$$

$$+\int_U g(X_{t-},P_t,u)\mu(dt,du), \tag{7.60}$$

其中 P_t 是 X_t 的分布：

$$P_t = P\circ X_t^{-1}.$$

X 的分布称为 Mckean 测度，也称为 Mckean-Vlasov Ito-Skorohod 方程的弱解，它满足下列鞅问题：

(M_1) $P\circ X_0^{-1}$ 是初分布；

(M_2) $\forall \varphi\in C_b^2$,

$$M^\varphi \triangleq \varphi(X_\cdot)-\varphi(X_0)-\int_0^\cdot (A\varphi)(X_s,P_s)ds$$

是鞅，其中 $P_s = P\circ X_s^{-1}$,

$$(A\varphi)(x,p)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{ij}(x,p)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i b^i(x,p)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$+\int_U[\varphi(x+g(x,p,u))-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot g(x,p,u)]n(du)$$

$$+\int_U[\varphi(x+f(x,p,u))-\varphi(x)]n(du), \tag{7.61}$$

$$a=\sigma\sigma^T.$$

由此也可定义一般的弱解。

对于 Mckean-Vlasov Ito-Skorohod 方程强解的存在唯一性，我们给出相仿于定理7.14′的结论。令

$$\tilde{D}_T^d=\{W_t\in R^d:\ 0\leqslant t\leqslant T, W_\cdot \text{右连左极}\}.$$

在 $\tilde{D}_T^d$ 上定义一致距离后成为距离空间，它是完备的，但并不可分，所以不是 Polish 空间。在 $\mathscr{P}(\tilde{D}_T^d)$ 上引入 Kantorovich-Rubinstein-Vasserstein 距离：$P,P'\in\mathscr{P}(\tilde{D}_T^d)$，定义完备距离：

$$d(P,P')=\inf_Q\left\{\int_{\tilde{D}_T^d\times\tilde{D}_T^d}\sup_{t\leqslant T}|\omega_t-\omega'_t|Q(d\omega,d\omega'):\right.$$

$$\left. Q\text{以}P\text{及}P'\text{为边缘分布}\right\}$$

$$= \sup_{g} \left\{ \int g \mathrm{d}(P - P') : |g(\omega) - g(\omega')| \leqslant \sup_{t \leqslant T} |\omega_t - \omega'_t| \right\}.$$

于是有

定理 设对 $x, y \in R^d, p, q \in \mathscr{P}(R^d)$，有

$$\int_U |f(x,p,u)| n(\mathrm{d}u) + \left(\int_U |g(x,p,u)|^2 n(\mathrm{d}u) \right)^{1/2} + |\sigma(x,p)| + |b(x,p)| \leqslant C_1(1 + |x|), \tag{7.62}$$

$$\begin{aligned} &|\sigma(x,p) - \sigma(y,q)| + |b(x,p) - b(y,q)| \\ &\quad + \int_U |f(x,p,u) - f(y,q,u)| n(\mathrm{d}u) \\ &\quad + \left(\int_U |g(x,p,u) - g(y,q,u)|^2 n(\mathrm{d}u) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C_2(|x - y| + \rho(p,q)), \end{aligned} \tag{7.63}$$

其中

$$\begin{aligned} \rho(p,q) &= \inf_F \left\{ \int_{R^d \times R^d} |x - y| F(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) : F \text{ 以 } p, q \text{ 为边缘} \right\} \\ &= \sup_g \left\{ \int g d(p - q) : |g(x) - g(y)| \leqslant |x - y| \right\}, \end{aligned}$$

则 Mckean-Vlasov Ito-Skorohod 方程对于初值 X_0 给定，存在唯一强解。

证明 考虑分布的逐次逼近：$X^{(0)} = 0$，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t^{(n)} &= \sigma(X_t^{(n)}, P_t^{(n-1)}) \mathrm{d}B_t + b(X_t^{(n)}, P_t^{(n-1)}) \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_U f(X_{t-}^{(n)}, P_t^{(n-1)}, u) \nu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) \\ &\quad + \int_U g(X_{t-}^{(n)}, P_t^{(n-1)}, u) \mu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u), \end{aligned}$$

$$X_0^{(n)} = X_0.$$

注意到把 $P_t^{(n-1)}$($X_t^{(n-1)}$ 的分布)当作“参数”后，我们可以用定理7.14′，从而上述方程解 $X^{(n)}$ 存在唯一。由距离 d 的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
d(P^{(n)},P^{(n+1)}) &\\
&\leqslant E(\sup_{t\leqslant T}|X_t^{(n)}-X_t^{(n+1)}|)\\
&\leqslant 常数\cdot E\left(\left[\int_0^T(|X_t^{(n)}-X_t^{(n+1)}|+\rho(P_t^{(n-1)},P_t^{(n)}))^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\right.\\
&\quad\left.+\int_0^T(|X_t^{(n)}-X_t^{(n+1)}|+\rho(P_t^{(n-1)},P_t^{(n)}))\mathrm{d}t\right)\\
&\leqslant C(\sqrt{T}+T)(E(\sup_{t\leqslant T}|X_t^{(n)}-X_t^{(n+1)}|)+d(P^{(n-1)},P^{(n)})).
\end{aligned}
$$

选 T 充分小，可使

$$
d(P^{(n)},P^{(n+1)})\leqslant E(\sup_{t\leqslant T}|X_t^{(n)}-X^{n+1}|)\leqslant\frac{1}{2}d(P^{(n-1)},P^{(n)}).
$$

于是存在唯一 Mckean 测度 P，$P^{(n)}\to P$。再用一次定理7.14′，便得定理。

Mckean-Vlasov 方程出现于在弱的平均场作用下线性系统的粒子的极限运动中。最简单情形为 $f=g=0$，令粒子位置的经验分布为

$$
F^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_1^n\delta_{X^i},
$$

其中 X^i 满足(依 n)

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}X_t^i=\sigma(X_t^i,F^{(n)})\mathrm{d}B_t^i+b(X_t^i,F^{(n)})\mathrm{d}t & (i\leqslant n),\\
X_0^i\ 初值 & (依\ n)
\end{cases}
$$

(B^i 相互独立)。令 $P^{(n)}$ 为 $(X^1,\cdots,X^n)$ 的分布，那么只要 $\forall k$，$i_1,\cdots,i_k$，$n\to\infty$

$$
(X_0^{i_1},\cdots,X_0^{i_k})\xrightarrow{弱}分布\ p\ 的\ k\ 次乘积,
$$

就有 $F^{(n)}\xrightarrow{弱}$Mckean-Vlasov 方程（其中 $X_0\sim p$）的解的分布 P（Mckean 测度）。而且对 $\forall k,i_1,\cdots,i_k$ 有

$$
(X^{i_1},\cdots,X^{i_k})\xrightarrow{弱}P\ 的\ k\ 次乘积
$$

(称为 $P^{(n)}$是 P 混沌的)。

限于内容舍弃，本书中我们并不给出如上定理的证明。

§7.9 Brown 运动的弋巡律

考虑$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 B. 我们无妨假定 $B_0=0$。记

$$Z_\omega=\{t;\ B_t(\omega)=0\}.$$

用占位时公式立知

$$\int_{Z_\omega}\mathrm{d}t=0.$$

此外，由随机过程的知识(可参见[Q],[KS],[RY])以下性质 a.e.dP 地成立：

(1) Z_ω是无孤立点的无界闭集；

(2) 轨道 $B_t(\omega)$的局部极值点都是严格极值点，而且在$[0,\infty)$中是可列稠集；

(3) 轨道 $B_t(\omega)$没有递增或递减点。

定义7.16 设 t时刻连续半鞅X的轨道$X_t(\omega)\neq 0$,记$X_\cdot(\omega)$,在 t 左侧(或右侧)最近零点为 $g_t(\omega)$(或 $d_t(\omega)$)：

$$g_t(\omega)=\sup\{s<t;\ X_s(\omega)=0\},$$
$$d_t(\omega)=\inf\{s>t;\ X_s(\omega)=0\}$$

$(g_t(\omega),d_t(\omega))$称为轨道 $X_\cdot(\omega)$跨在 t 的弋巡(excursion)区间,

$$\{X_s(\omega);\ g_t(\omega)<s<d_t(\omega)\}$$

称为 $X_\cdot(\omega)$在该弋巡区间上的弋巡。

直观上看，轨道就是由它的零点与弋巡相接而成。如果知道哪些零点是弋巡的左端点，并且知道弋巡的具体样子，轨道的信息就完全清楚了。这样轨道就是把弋巡当作“点”的点函数。因而

过程就可以看成取弋巡值的点过程。本节的目的就是证明对于Brown运动B来说，这个对应的以弋巡值为点的点过程是平稳Poisson点过程，而且要具体找出这个点过程的特征测度$n(\cdot)$。

首先，我们从另一个角度来认识Brown运动的弋巡区间。由命题6.1的推论，我们知道在P_0下$B_t^* - B_t$是反射Brown运动，记为X_t。于是对于X的弋巡区间$(g_t(\omega), d_t(\omega))$有

$$g_t(\omega) = \sup\{s < t:\quad B_s^*(\omega) = B_s(\omega)\},$$
$$d_t(\omega) = \inf\{s > t:\quad B_s^*(\omega) = B_s(\omega)\}.$$

也就是$(g_t(\omega), d_t(\omega))$是$B_\cdot(\omega)$在$t$附近两次达到最大值之间的间隔。另一方面，反射Brown运动$|B|$与B的弋巡区间应该是一样的。这就得到对于Brown运动来说，在分布意义下，弋巡区间与达到最大值的间隔是一样的。

引理7.12 设Brown运动$B, B_0 = 0$。对固定

$$\sigma_0 = 0,$$

$\varepsilon > 0$，令

$$\tau_0 = \inf\{t:\ B_t = \varepsilon\},$$

$$\sigma_n = \inf\{t > \tau_{n-1}, B_t = 0\}, \tau_n = \inf\{t > \sigma_n, B_t = \varepsilon\}.$$

再记

$$d_\varepsilon(t) = \max\{n: \sigma_n < t\},$$

$d_\varepsilon(t)$即B在t时刻前从ε到0的"下交数"。那么

$$E(\sup_{t \le T} |\varepsilon d_\varepsilon(t) - l(t,0)|^p) \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0). \qquad (7.64)$$

证明 由Tanaka公式

$$\sum_n (B^+_{\tau_n \wedge t} - B^+_{\sigma_n \wedge t})$$

$$= \sum_n \int_{\sigma_n \wedge t}^{\tau_n \wedge t} I_{(0,\infty)}(B_s)\mathrm{d}B_s$$

$$+ \sum_n (l(\tau_n \wedge t, 0) - l(\sigma_n \wedge t, 0))$$

$$=\int_0^t \Phi^\varepsilon_s \mathrm{d}B_s + l(t,0),$$

其中

$$\Phi^\varepsilon_s = \sum_n I_{(\sigma_n,\tau_n]}(s) I_{(0,\varepsilon]}(B_s).$$

记

$$n(t)=\inf\{n:\ \tau_n>t\}.$$

注意到在$\{\tau_n<t\}$上$B^*_{\tau_n\wedge t}-B^*_{\sigma_n\wedge t}<\varepsilon$，等号左端为$\varepsilon d_\varepsilon(t)+(B^*_t-B^*_{\sigma_{n(t)}\wedge t})$，而且$0\leqslant B^*_t-B^*_{\sigma_{n(t)}\wedge t}\leqslant\varepsilon$。由定理2.13及$(\Phi^\varepsilon_s)^2=\Phi^\varepsilon_s$，我们有

$$E\left(\sup_{t<T}\left|\int_0^t \Phi^\varepsilon_s \mathrm{d}B_s\right|^p\right)\leqslant C\,E\left(\int_0^T \Phi^\varepsilon_s \mathrm{d}s\right)^{p/2}\xrightarrow{(\varepsilon\to 0)}0 \text{（有界收敛性）}.$$

于是

$$E(\sup_{t<T}|\varepsilon d_\varepsilon(t)-l(t,0)|^p)\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

下面我们引进一切弋巡为点所组成的可测空间。令

$$U=\{w\in W(=W^1):\ 0<\sigma_0(w)<\infty,$$
$$\text{且 } w_0=0,\ w_{\sigma_0(w)+t}=0(\forall t\geqslant 0)\},$$

其中

$$\sigma_0(w)=\inf\{t:\ t>0, w_t=0\}.$$

再记

$$\bar{U}=U\cup\{0\},$$

其中 0 = 恒零函数$(0\in W, 0_t=0(\forall t\geqslant 0))$。取

$$\mathscr{B}(\bar{U})=\mathscr{B}(W)\cap\bar{U}.$$

于是$(U,\mathscr{B}(U))$是由全体弋巡组成的可测空间，而$(\bar{U},\mathscr{B}(\bar{U}))$是加入虚构的弋巡 0 后所得的空间。在一致拓扑下它成为Polish空间。由于Brown轨道的零点集是无孤立点的，所以$\bar{U}$的Wiener测度为 0 。我们要找的Brown运动的弋巡所构成的平稳Poisson

点过程的特征测度 $n(\cdot)$ 将是 $(U, \mathscr{B}(U))$ 上的测度，因此 n 与 Wiener 测度 $P^w(=P_0)$ 是相互奇异的。

我们还需注意，Brown 运动作为连续半鞅的局部时 L_t^0 是 Levy 所定义的局部时 $l(t,0)$ 的两倍。记 L_t^0 的右连续逆为 τ_t：

$$\tau_t = \inf\{s: L_s^0 > t\}.$$

$2l(t,0)$ 与 B_t^* 同分布，故 τ_t 与 B^* 初达 t 的时刻同分布，后者是纯跳过程。

由于 L_t^0 即(6.4)中的 φ_t，它只在 $B_t(w)=0$ 的 t 上增长，L_t^0 在 $B_t(w)$ 的弋巡区间上保持同一个值，所以 $B_t(w)$ 的弋巡区间恰好是 $\tau_t(w)$ 的跳跃值。于是 Brown 运动的弋巡所组成的点过程可定义如下：

$$p_t(w) = \begin{cases} I_{[0,\tau_t(w)-\tau_{t-}(w))}(\cdot)B_{\tau_{t-}(w)+\cdot}(w), \\ \qquad \tau_{t-}(w) \neq \tau_t(w), \\ 0, \qquad \tau_{t-}(w) = \tau_t(w), \end{cases} \tag{7.65}$$

这里注意 $p_t(w) \in U$，即其值是属于 U 的一个函数。

为了突出这个特殊的点过程，我们也把 $p_t(w)$ 改记为 $e_t(w)$，以示它是弋巡值的点过程。

记 σ_1 为点过程的首跳时刻：

$$\sigma_1 = \inf\{t: \nu([0,t]\times U) > 0\}, \tag{7.66}$$

其中 ν 是 p_t 的计数过程。

引理7.13 若 p_t 是特征测度为有限的平稳 Poisson 点过程，则

(1) σ_1, p_{σ_1} 独立；

(2) $P(p_{\sigma_1} \in A) = n(A)/n(U)$. $\qquad$ (7.67)

证明 令

$$\sigma_1^A = \inf\{t: \nu([0,t]\times A) > 0\},$$

类似地定义 $\sigma_1^{A^C}$，由于 $\nu([0,t]\times A),\nu([0,t]\times A^c)$是相互独立的平稳 Poisson 过程，$\sigma_1^A,\sigma_1^{A^c}$就应是独立的参数为$n(A),n(A^c)$的指数分布随机变量。所以

$$\begin{aligned}P(\sigma_1>t,\ p_{\sigma_1}\in A)&=P(\sigma_1^{A^c}>\sigma_1^A>t)\\&=\int_t^\infty n(A)e^{-n(A)s}\left(\int_s^\infty n(A^c)e^{-n(A^c)u}\,du\right)ds\\&=n(A)e^{-n(u)t}.\end{aligned}$$

从而证得引理。

定理7.17 如果B是$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动且$B_0=0$，那么它的弋巡过程e_t是平稳$(\mathscr{F}_{\tau_t})$Poisson 点过程。

证明 因为由(7.65)

$$\nu(t,A)=\sum_{s\leqslant t}I_{(0,\infty)}(\tau_s-\tau_{s-})I_A(B_{\tau_{s-}+\cdot}),\quad(7.68)$$

而且τ_{s-}为$(\mathscr{F}_t)$停时(实际上是可料时)，$0\leqslant\cdot\leqslant\tau_s$，所以$\nu(t,A)\in\mathscr{F}_{\tau_t}$。

令

$$U_n=\left\{u:\ \sigma_0(u)>\frac{1}{n}\right\},$$

$$T_1=\inf\left\{t>0,\ \tau_t-\tau_{t-}>\frac{1}{n}\right\},$$

$$T_{k+1}=\inf\left\{t>T_k,\ \tau_t-\tau_{t-}>\frac{1}{n}\right\},$$

我们有

$$\begin{aligned}\nu(t,u_n)&=\sum_k I_{[0,t]}(T_k)\\&=\sum_{s<t}I_{(\frac{1}{n},\infty)}(\tau_s-\tau_{s-})<\infty,\end{aligned}$$

因此 e_t 是 σ 有限的。

往证 e_t 的平稳性。对于局部时我们有

$$L_{t+s}^a = L_t^a + L_s^a \circ \theta_t, \quad L_{\tau_t}^0 = t.$$

因而 τ_t 是严增的而且 $\tau_t < \infty$。所以

$$\begin{aligned}\tau_{t+s} &= \inf\{u>0: \ L_u^0 > t+s\} \\ &= \tau_t + \inf\{u>0: \ L_{\tau_t+u}^0 > t+s\} \\ &= \tau_t + \inf\{u>0: \ L_{\tau_t}^0 + L_u^0(\theta_{\tau_t}) > t+s\} \\ &= \tau_t + \inf\{u>0: \ L_u^0(\theta_{\tau_t}) > s\} \\ &= \tau_t + \tau_s \circ \theta_{\tau_t}.\end{aligned}$$

从而

$$\tau_{(t+s)-} = \tau_t + \tau_{s-} \circ \theta_{\tau_t}.$$

由此

$$\tau_{t+s} - \tau_{(t+s)-} = (\tau_s - \tau_{s-}) \circ \theta_{\tau_t}.$$

用(7.65),(7.68)我们得到

$$\theta_s e_t = e_t \circ \theta_{\tau_s}, \tag{7.69}$$

$$\nu((s,s+t]\times A) = \nu(t,A) \circ \theta_{\tau_s}. \tag{7.70}$$

最后我们证明 e_t 是 Poisson 点过程。为此只需用强马氏性及(7.70)来验证与(7.49)等价的如下关系式:

$$\begin{aligned}&P(\nu((t,t+t_1]\times A_1)\in\Gamma_1,\cdots,\nu((t,t+t_n]\times A_n)\in\Gamma_n\mid\mathscr{F}_{\tau_t}) \\ &= P(\nu(t_1;A_1)\circ\theta_{\tau_t}\in\Gamma_1,\cdots,\nu(t_n,A_n)\circ\theta_{\tau_t}\in\Gamma_n\mid\mathscr{F}_{\tau_t}) \\ &= P_{B_{\tau_t}}(\nu(t_1,A_1)\in\Gamma_1,\cdots,\nu(t_n,A_n)\in\Gamma_n) \\ &= P(\nu(t_1,A_1)\in\Gamma_1,\cdots,\nu(t_n,A_n)\in\Gamma_n).\end{aligned}$$

命题7.13 在样本点W上点过程 e_t 的值记成 $e_t(w)$，它是

$\bar{U}$ 中元，所以是一个函数，把这函数的变元记成u，那么 $e_t(w)=e_t(u,w)$。于是

$$\tau_t(w)=\sum_{s\leqslant t}\sigma_0(e_s(w)),\quad \tau_{t-}(w)=\sum_{s<t}\sigma_0(e_s(w)),$$

$$B_t(w)=\sum_{s\leqslant L_t^0(w)} e_s(t-\tau_{s-}(w),w) \tag{7.71}$$

$$=\sum_s e_s(t-\tau_{s-}(w),w)I_{[\tau_{s-}(w),\tau_s(w))}(t).$$

证明 由 $\tau_t=\sum_{s\leqslant t}(\tau_s-\tau_{s-})$ 得前两个公式。又如果 $t\in(\tau_{s-},\tau_s)$，则 $L_t^0=s$。于是对 $\forall v<L_t^0$ 有

$$e_v(t-\tau_{v-})=0.$$

定义7.17 Brown 运动的弋巡过程 e_t 的特征测度 $n(\mathrm{d}u)$称为Ito 测度或 Brown 弋巡律。

下面致力于找Ito 测度的具体形式。记

$$G_w=\{\tau_{s-}(w):\ \tau_{s-}(w)\neq\tau_s(w)\}.$$

引理7.14 若 $F(s,w,u)\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(\bar{U})$，且

$$F(s,w,\varrho)=0,\quad F\geqslant 0,$$

则对 $s\leqslant t$，

$$F(\tau_{s-}(w),w,u)\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(\bar{U}),$$

且

$$E\Big(\sum_{s\in G_w}F(s,w,(\theta_s w)^{\sigma_0})\Big)=E\Big(\int_0^\infty\!\!\int F(\tau_s,w,u)n(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s\Big)$$

$$=E\Big(\int_0^\infty\!\!\int F(t,w,u)n(\mathrm{d}u)\mathrm{d}L_t^0\Big). \tag{7.72}$$

证明 可测性是直接的。又

$$\text{左}=E\Big(\iint F(\tau_{s-}(w),w,u)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\Big)$$

$$= E\left(\int_0 \int F(\tau_{s-}(w), w, u) n(\mathrm{d}u) \mathrm{d}s\right),$$

其中最后一式中 τ_{s-} 可改为 τ_s，从而得公式。

引理7.15

$$Ee^{-\lambda\tau_t} = e^{t\int(e^{-\lambda\sigma_0(u)}-1)n(\mathrm{d}u)}. \tag{7.73}$$

证明 由于

$$\tau_t = \sum_{s<t}(\tau_s - \tau_{s-}) = \sum_{s<t}\sigma_0 \circ \theta_{\tau_{s-}}(w)$$

$$= \int \sigma_0(u)\nu(t, \mathrm{d}u),$$

由(7.36)我们得到

$$e^{-\lambda\tau_t} - 1 = \int_0^t (e^{-\lambda(\tau_{s-}+\sigma_0(u))} - e^{-\lambda\tau_{s-}})\nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u).$$

所以

$$Ee^{-\lambda\tau_t} - 1 = \int_0^t Ee^{-\lambda\tau_{s-}} \int (e^{-\lambda\sigma_0(u)} - 1) n(\mathrm{d}u) \mathrm{d}s.$$

于是 $Ee^{-\lambda\tau_t}$ 可微，$Ee^{-\lambda\tau_{s-}}$ 可用 $Ee^{-\lambda\tau_s}$ 代。由此可解出

$$Ee^{-\lambda\tau_t} = e^{t\int(e^{-\lambda\sigma_0(u)}-1)n(\mathrm{d}u)}.$$

下面的命题给出了 σ_0 在测度 $n(\mathrm{d}u)$ 下的"分布"。

命题7.13

$$n(\sigma_0 > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \quad (t > 0). \tag{7.74}$$

证明 由于 τ_t 可以看成 $B_t^* = \max\limits_{s<t} B_s$ 的右连续逆，τ_t 为 B 击中 t 的时刻，因此它是 $\frac{1}{2}$ 阶稳定过程(参见[Q])。即

$$Ee^{-\lambda\tau_t} = e^{-t\sqrt{2\lambda}}.$$

与(7.73)比较，我们有

$$\sqrt{2\lambda} = \int (1 - e^{-\lambda\sigma_0(u)}) n(\mathrm{d}u)$$

$$= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) m(dt),$$

其中 $m(a,b] = n(a < \sigma_0 \leqslant b)$。由此可知上式右边积分有限。从而

$$\lim_{t \to \infty} m(t, \infty), \quad \lim_{t \to 0} (1 - e^{-\lambda t}) m(0, t) = 0.$$

利用分部积分，上式右边为

$$\lambda \int_0^\infty m(t, \infty) e^{-\lambda t} dt.$$

但是

$$\sqrt{2\lambda} = \lambda \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\lambda t} dt,$$

再比较此两式，便得

$$m(t, \infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}.$$

我们先用引理 7.14 推导 Brown 弋巡的泛函的期望基本公式。

引理7.16 $(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 跨越 t 的弋巡区间的左端点 g_t 是右连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程。

证明 由于

$$\{g_t < a\} = \bigcup_n \left\{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant a} |B_s| > \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_t,$$

所以 g_t 是$(\mathscr{F}_t)$适应的。

又若 $t_n \downarrow t$，如果 $\exists\, n$ 使 $g_{t_n} < t$，则

$$g_{t_m} = g_t \qquad (\forall\, m \geqslant n).$$

如果 $\forall\, n$ 都有 $g_{t_n} \geqslant t$，则由 $g_{t_n} \leqslant t_n$ 得到 $g_{t_n} \to t$。于是$B_t(w) = 0$。从而

$$g_t = t = \lim_n g_{t_n}.$$

引理证毕。

定义7.17 设$(\mathscr{F}_t) =$ Brown 参考族$(\overline{\mathscr{F}}_t^0)$。对于非负 $\mathscr{F}_\infty$ 随机变量 ξ，我们定义(参见命题 2.13′ 推论 2)

$$\mathscr{F}_\xi \equiv \sigma\{X_\xi:\ X\in\mathscr{O}\}\quad \text{（还可假定}X\text{有界）}$$
$$=\sigma\{X_\xi:\ X\in\mathscr{P}\}.$$

我们有

(ξ.1) 若ξ为($\mathscr{F}_t$)停时τ，则$\mathscr{F}_\xi$就是τ前σ代数$\mathscr{F}_\sigma$;（用[Q]定理 2.9）;

(ξ.2) $\xi\in\mathscr{F}_\xi$（取$X_t=t$，则$X_\xi=\xi$）;

(ξ.3) 当ξ=停时τ,σ，且$\tau\leqslant\sigma$，则$\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_\sigma$，但一般$\xi$时有病态，$\xi\leqslant\eta$并不能推出

$$\mathscr{F}_\xi\subset\mathscr{F}_\eta;$$

(ξ.4) $\mathscr{F}_{g_t}\subset\mathscr{F}_t$.

证明 生成$\mathscr{P}$最简单的过程为$X_t=X_{s_1}I_{(s_1,s_2]}(t)$。由于$g_t\leqslant t$，对此$X$我们有

$$X_{g_t}=X_{s_1}I_{s_1<g_t\leqslant s_2\wedge t}$$
$$=\begin{cases} X_{s_1}\ I_{s_1<g_t\leqslant t}, & t\leqslant s_2,\\ X_{s_1}\ I_{s_1<g_t\leqslant s_2}, & s_2<t.\end{cases}$$

由引理7.17立得$X_{g_t}\in\mathscr{F}_t$。由典型逼近对$\forall X\in\mathscr{P}$，仍有$X_{g_t}\in\mathscr{F}_t$，从而(ξ.4)成立。

(ξ.5) $\mathscr{F}_{g_t}$对t递增（这是(ξ.3)不足处的补充）。

证明 $\forall X\in\mathscr{O}$，则$X_{g_t\wedge s}$是右连($\mathscr{F}_t$)适应。所以$X_{g_\cdot\wedge s}\in\mathscr{O}$，取$t>s$。如果$g_t\leqslant s$，那么$g_s=g_t$，于是

$$X_{g_s}=X_{g_t}\in\mathscr{F}_{g_t};$$

如果$g_t>s$，那么

$$X_{g_s}=X_{g_{g_t\wedge s}}=X_{g_\cdot\wedge s}\big|_{g_t}\in\mathscr{F}_{g_t}.$$

(ξ.6) 记$\widetilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{g_t}$(由($\xi$.5))它也是参考族)。设$\tau$为($\widetilde{\mathscr{F}}_t$)停时，则$\mathscr{F}_{g_\tau}\subset\widetilde{\mathscr{F}}_\tau\subset\mathscr{F}_\tau$.

证明 $\forall X\in\mathscr{O}$，$X_{g_\cdot}$为($\widetilde{\mathscr{F}}_t$)适应的右连过程，因此

$X_{g_\tau} \in \widetilde{\mathscr{F}}_\tau$. 从而 $\mathscr{F}_{g_\tau} \subset \widetilde{\mathscr{F}}_\tau$. 另一方面，由 $\widetilde{\mathscr{F}}_t \subset \mathscr{F}_t$，$\tau$ 也是 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，所以 $\widetilde{\mathscr{F}}_\tau \subset \mathscr{F}_\tau$.

定义7.18 $(\mathscr{F}_t^0)$停时 τ 称为尾时，如果 $\forall t$ 在$\{\tau>t\}$上恒有

$$\tau = t + \tau \circ \theta_t.$$

击中闭集的时刻就是尾时.

对于尾时 τ 有

$$\tau = g_\tau + \tau \circ \theta_{g_\tau} \quad (\text{在}\{g_\tau < \tau\}\text{上}).$$

注意 τ 也可以看成定义在 U 上：对于 $u = w^{\sigma_0}$（设 $w_0 = 0$）

$$\tau(u) = \begin{cases} \tau(w), & \text{若 } \tau(w) \leqslant \sigma_0(w), \\ +\infty, & \text{其他}. \end{cases}$$

命题7.14 设 τ 是$(\mathscr{F}_t^0)$尾时，$(\mathscr{F}_t)$是 Brown 参考族，$\mathscr{F}_{g_\tau}$ 如定义 7.17 的含义. 那么对 $\forall f \in \mathscr{B}^+(U)$，在$\{0<g_\tau<\tau\}$上

$$E(f((\theta_{g_\tau} w)^{\sigma_0}) \mid \mathscr{F}_{g_\tau}) = n(f \mid \tau < \sigma_0)\left(\equiv \int f I_{\tau<\sigma_0} \mathrm{d}n \Big/ \int I_{\tau<\sigma_0} \mathrm{d}n\right), \tag{7.75}$$

$$E[f((\theta_{g_\tau} w)^{\sigma_0}) \mid \mathscr{F}_{g_\tau}, \Lambda_\tau] = n(f I_{\tau \wedge \sigma_0} \mid \sigma_0)\mid_{\sigma_0 = \Lambda_\tau}, \tag{7.76}$$

其中 Λ_t 为弋巡区间长度：$\Lambda_t = d_t - g_t$，$n(h/\sigma_0) \equiv$ Radon-Nikodym 导数$\dfrac{\mathrm{d}n_0^h}{\mathrm{d}n_0}$，$n_0^h, n_0$ 分别是测度 $\int_\cdot h \mathrm{d}n$ 及 n 在 σ_0 在 $\mathscr{B}(U)$ 中生成的 σ 代数上的限制（由命题 7.13 知 n_0 是 σ 有限的，所以该导数有意义）.

证明 首先注意 $I_{(0,\tau)}(t) \in \mathscr{O}$，所以

$$I_{0<g_\tau<\tau} = I_{(0,\tau)}(g_\tau) \in \mathscr{F}_{g_\tau}. \tag{7.77}$$

其次，$s<\tau$ 满足 $g(\tau) = s$ 当且仅当 $s + \sigma_0 \circ \theta_s > \tau$. 由于 τ 是尾时，上式等价于

$$\sigma_0\circ\theta_s > \tau - s = \tau\circ\theta_s,$$

也等价于

$$\sigma_0((\theta_s w)^{\sigma_0}) > \tau((\theta_s w)^{\sigma_0}). \tag{7.78}$$

我们不妨设 f 有界。

对于有界的 $X\in\mathscr{O}$，由(7.77)，(7.78)及引理 7.14，我们有

$$\begin{aligned}
&E(X_{g_\tau} I_{(0,\tau)}(g_\tau) f((\theta_{g_\tau} w)^{\sigma_0}) \\
&= E\Big(\sum_{s\in G_w} X_s I_{s<\tau} f((\theta_s w)^{\sigma_0}) I_{\tau((\theta_s w)^{\sigma_0})<\sigma_0((\theta_s w)^{\sigma_0})}\Big) \\
&= E\Big(\int_0^\infty X_{\tau_{s-}} I_{\tau_{s-}<\tau} \int f(u) I_{\tau(u)<\sigma_0(u)} n(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s\Big) \\
&= E\Big[\Big(\int_0^\infty X_{\tau_s} I_{\tau_s<\tau} \int I_{\tau(u)<\sigma_0(u)} n(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s\Big) n(f\,|\,\tau<\sigma_0)\Big] \\
&= E[(X_{g_\tau} I_{(0,\tau)}(g_\tau)) n(f\,|\,\tau<\sigma_0)].
\end{aligned}$$

这说明

$$\begin{aligned}
&E(I_{(0,\tau)}(g_\tau) f((\theta_{g_\tau} w)^{\sigma_0})\,|\,\mathscr{F}_{g_\tau}) \\
&= I_{(0,\tau)}(g_\tau) n(f\,|\,\tau<\sigma_0).
\end{aligned}$$

由(7.77)，上式立刻导致(7.75)。

往证(7.76)。我们有 $\Lambda_\tau = \sigma_0((\theta_{g_\tau} w)^{\sigma_0})$。对于 $\forall$ 有界的 $X\in\mathscr{O}$，$\varphi\in\mathscr{B}^+([0,\infty))$，利用前段证明推得

$$\begin{aligned}
&E(X_{g_\tau} I_{(0,\tau)}(g_\tau)\varphi(\Lambda_\tau) f((\theta_{g_\tau} w)^{\sigma_0}) \\
&= E[(X_{g_\tau} I_{(0,\tau)}(g_\tau)) n(\varphi(\sigma_0) f\,|\,\tau<\sigma_0)].
\end{aligned} \tag{7.79}$$

因为 n 在 $\{\tau\geqslant\sigma_0\}=\{\tau=\infty\}$ 上不负荷，所以

$$\begin{aligned}
n(\varphi(\sigma_0) f\,|\,\tau<\sigma_0) &= \frac{n(\varphi(\sigma_0) n(f I_{\tau<\sigma_0}\,|\,\sigma_0))}{n(\tau<\sigma_0)} \\
&= \frac{n(\varphi(\sigma_0) I_{\tau<\sigma_0} n(f I_{\tau<\sigma_0}\,|\,\sigma_0))}{n(\tau<\sigma_0)} \\
&= n(\varphi(\sigma_0) n(f I_{\tau<\sigma_0}\,|\,\sigma_0)\,|\,\tau<\sigma_0).
\end{aligned}$$

把这式子代入(7.79)右方，然后在原来的(7.79)中用 $\varphi n(fI_{\tau<\sigma_0}|\cdot)$及1代替原来的$\varphi$与$f$便得

$$E(X_{g_\tau}I_{(0,\tau)}(g_\tau)\varphi(A_\tau)f(\theta_{g_\tau}w)^{\sigma_0})$$

$$=E(X_{g_\tau}I_{(0,\tau)}(g_\tau)\varphi(A_\tau)n(fI_{\tau<\sigma_0}|\cdot)|_{\cdot=A_\tau}).$$

这就是说，在$\{0<g_\tau<\tau\}$上有

$$E(f((\theta_{g_\tau}w)^{\sigma_0})|\mathscr{F}_{g_\tau},A_\tau)=n(fI_{\tau<\sigma_0}|\cdot)|_{\cdot=A_\tau}.$$

推论 在命题条件下，我们有

(i) $(\theta_{g_\tau}w)^{\sigma_0}$与$\mathscr{F}_{g_\tau}$独立；

(ii) 在A_τ给定下，$(\theta_{g_\tau}w)^{\sigma_0}$也与$\mathscr{F}_{g_\tau}$独立。

注 本命题中对τ的要求最强，即要求为尾时，这样对应的结论最精确，即条件期望中的σ代数$\mathscr{F}_{g_\tau}$由(ξ.6)看出是最小的。如果再粗放一点，τ是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$停时，对应地用较大一些的$\sigma$代数$\widetilde{\mathscr{F}}_\tau$，则我们有

命题7.14′ 设$(\mathscr{F}_t)$是Brown参考族，τ是$(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$停时，$\widetilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{g_t}$。那么在$\{0<g_\tau<\tau\}$上有：

$$E(f((\theta_{g_\tau}w)^{\sigma_0})|\widetilde{\mathscr{F}}_\tau)=n(f\,|\sigma_0>t)|_{t=A_\tau}\quad(\text{a.e.}dP),\ (7.75')$$

$$E(f((\theta_{g_\tau}w)^{\sigma_0})|\widetilde{\mathscr{F}}_\tau,A_\tau)=n(f|\sigma_0)|_{\sigma_0=A_\tau}\quad(\text{a.e.}dP),\qquad(7.76')$$

其中$f\in\mathscr{B}^+(U)$，A_t是弋巡年龄：$A_t=t-g_t$。

特别，当$\tau=t$时，$B_t\neq0$, a.e.dP，因此$0<g_t<t$, a.e.dP。此时以上两公式自然成立。

证明 先证$\tau=t$的情形。此时g_t是唯一的$s\in G_w$使$s<t$且$s+\sigma_0\circ\theta_s>t$。对$\forall X\in\mathscr{V}$，$X\geqslant0$我们有

$$E[X_{g_t}f((\theta_{g_t}w)^{\sigma_0})]$$

$$=E\left(\sum_{s\in G_w}X_sf((\theta_sw)^{\sigma_0})I_{\sigma_0\circ\theta_s>t-s>0}\right).$$

由于 $\sigma_0\circ\theta_s=\sigma_0((\theta_s w)^{\sigma_0})$，用引理 7.14，上式等于

$$E\int_0^\infty\int X_{\tau_{s-}}f(u)I_{\{\sigma_0(u)>t-\tau_{s-}>0\}}n(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s$$

$$=E\int_0^\infty X_{\tau_s}n(f|\sigma_0>t-\tau_s)n(\sigma_0>t-\tau_s)\mathrm{d}s$$

$$=E\left(\sum_{s\in G_w}X_s n(f|\sigma_0>t-s)I_{\{\sigma_0\circ\theta_s>t-s>0\}}\right)$$

$$=E(X_{g_t}n(f|\sigma_0>s)|_{s=t-g_t}).$$

这就证明了 $\tau=t$ 时的(7.75′)。对 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 停时 τ，取可列值 $(\widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 停时 $\tau_n\downarrow\tau$。于是(7.75′)对 τ_n 成立。在 $\{0<g_\tau<\tau\}$ 上，由 $\tau_n\downarrow\tau$ 必然存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 后有 $g_{\tau_n}=g_\tau$。又显见此时 $g_{\tau_n}<\tau_n$。我们不妨设 f 有界，于是在 $\{0<g_\tau<\tau\}$ 上

$$E(f((\theta_{g_\tau}w)^{\sigma_0})|\widetilde{\mathscr{F}}_\tau)$$

$$=\lim_{n\to\infty}E(E(f((\theta_{g_{\tau_n}}w)^{\sigma_0})I_{g_{\tau_n}<\tau_n}|\widetilde{\mathscr{F}}_{\tau_n})|\widetilde{\mathscr{F}}_\tau)$$

$$=\lim_{n\to\infty}E(n(f|\sigma_0>s)|_{s=A_{\tau_n}}I_{g_{\tau_n}<\tau_n}|\widetilde{\mathscr{F}}_\tau)$$

$$=E(n(f|\sigma_0>s)|_{s=A_\tau}|\widetilde{\mathscr{F}}_\tau)$$

$$=n(f|\sigma_0>s)|_{s=A_\tau}\quad(A_\tau=\tau-g_\tau\in\widetilde{\mathscr{F}}_\tau).$$

一般 f 可用有界近似，这就得(7.75′)。

(7.76′)可得自(7.75′)，作法与(7.76)得自(7.75)相仿。

类似地也有独立性的推论。

记 T_x 为击中 (x,∞) 时刻：

$$T_x=\inf\{t;\ w_t>x\}.$$

命题7.15 $n(T_\varepsilon<\infty)=\dfrac{1}{2\varepsilon}$.

证明 设 $0<x<y$。因为 T_x 是尾时，在命题7.14 中可取 $\tau=T_x$。令

$$f(u)=I_{\{T_y(u)<\sigma_0(u)\}}.$$

由(7.75)我们有

$$Ef((\theta_{g_{T_x}}w)^{\sigma_0})=n(f\,|\,T_x<\sigma_0)=\frac{n(T_y<\sigma_0)}{n(T_x<\sigma_0)}.$$

但是上式左方等于

$$\begin{aligned}&P(T_y((\theta_{g_{T_x}}w)^{\sigma_0})<\sigma_0((\theta_{g_{T_x}}w)^{\sigma_0}))\\&=P(T_y(\theta_{T_x}w)<\sigma_0\ (\theta_{T_x}w))\\&=P_x(T_y<\sigma_0)=\frac{x}{y},\end{aligned}$$

这里利用了 Brown 运动的强马氏性及越出概率分配(见(5.29))。注意在 U 上 $\{T_x<\infty\}=\{T_x<\sigma_0\}$，把上面等式连起来就得到

$$n(T_x<\infty)=\frac{c}{x}\qquad(c\text{ 为常数}).$$

下面要确定 c。为此对于

$$\Phi(s,\cdot,u)\equiv I_{T_\varepsilon<\infty}(u)I_{[0,t]}(s)$$

用引理7.14得到

$$\begin{aligned}&E\Big(\sum_{\substack{s\in G_w\\ s<t}}I_{T_\varepsilon<\infty}((\theta_s w)^{\sigma_0})\Big)\\&=E\int_0^\infty\int I_{T_\varepsilon<\infty}(u)I_{[0,t]}(\tau_s)n(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s\\&=n(\tau_\varepsilon<\infty)EL_t^0\\&=\frac{c}{\varepsilon}EL_t^0.\end{aligned}$$

另一方面，由定义，上式左方应落在$(d_\varepsilon(t)-1,d_\varepsilon(t)+1)$之中。于是我们有

$$|cEL_t^0-\varepsilon Ed_\varepsilon(t)|<\varepsilon.$$

但是由(7.64)

$$E\left| \varepsilon d_{\varepsilon}(t) - \frac{1}{2} L_t^0 \right| \to 0,$$

所以 $c = \frac{1}{2}$. 命题得证.

下面约定 f 对 n 的积分也记成$n(f)$.

定义7.18 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中P是σ有限但不是有限的测度空间，我们定义$0<t<\infty$上的马氏过程X_t，它的有限维分布族被两个对象所唯一确定：

(1) 转移函数族$\{P(t,x,\cdot): t>0\}$;

(2) 在t的绝对分布族(代替初测度)λ_t，它们必须满足相容条件：

$$\lambda_{s+t}(\cdot) = \int P(s,x,\cdot)\lambda_t(dx),$$

简记$\lambda_{s+t} = \lambda_t \cdot T_s$. 这样的分布族$\{\lambda_t\}$称为流入律.

设$(U, \mathscr{B}(U), n)$为Brown运动的弋巡测度空间，其中n为弋巡律(Ito测度)，$U = U^+ \cup U^-$，其中U^+, U^-分别表示全体非负，非正弋巡. 令$n^{\pm}$为n在$U^{\pm}$上的限制，再假定

$$n(W \backslash U) = 0.$$

于是n可以看成Wiener空间$(W, \mathscr{B}(W))$上的测度，它是σ有限而不是有限的.

下面的定理具体确定了Ito测度.

定理7.17 $(W, \mathscr{B}(W), n)$上坐标过程w_t $0<t<\infty$对测度n是齐次强马氏过程，其转移函数为在0点中止的中止Brown运动BM°的转移函数，其密度为：

$$p^\circ(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{1}{2t}(y-x)^2} - e^{-\frac{1}{2t}(y+x)^2}\right) I_{x,y>0},$$

其进入律$\lambda_t(dy)$对y的密度为Brown运动自零点出发击中y的时刻T_y的分布对t的密度：

$$\frac{d\lambda_t}{dy}=\frac{|y|}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{y^2}{2t}}=\lim_{x\to 0}\frac{p^\circ(t,x,y)}{2x}.$$

证明 只需考虑n^+。$(\bar{U},\mathscr{B}(\bar{U}))$可考虑为$BM^\circ$的样本空间，它生成的测度族记为$\{P_x^0\}$。由于$n^+(W\setminus U)=0$，我们下面不分$u.$与$w.$，只是按习惯在$n^+$时用$u.$，而在$P_x^0$时用$w.$。

首先，由于BM°是马氏过程，故对它的半群算子T_t^0有：对$0<t_1<\cdots<t_k<t$，$f_1,\cdots,f_n,f\in\mathscr{B}^+(R)$，

$$E_x^0(f_1(w_{t_1})\cdots f_k(w_{t_k})f(w_t))$$

$$=E_x^0(f_1(w_{t_1})\cdots f_k(w_{t_k})(T_{t-t_k}^0f)(w_{t_k})). \quad (7.80)$$

其次，我们来证明对$\forall A\in\mathscr{B}(u)$，$\Gamma\in\mathscr{B}(0,\infty)$，$s>0$有

$$n^+(u_s\in\Gamma,\theta_s^+A)=n^+(u_s\in\Gamma,P_{u_s}^0(A)). \quad (7.81)$$

为此只需考察$n^+(u_s\in\Gamma)>0$的情形。又由于$\{u_s\in\Gamma\}\subset\{s<\sigma_0\}$，由命题7.13可知$n(u_s\in\Gamma)<\infty$。记Brown 弋巡点过程$e_t$在$\{u_s\in\Gamma\}$上的限制为$\tilde{e}_t$。$\tilde{e}_t$仍然是Poisson点过程，其计数过程记为$\tilde{v}(\ )$，令

$$\sigma_1=\inf\{s:\ \tilde{v}(t,\{u_s\in\Gamma\})>0\}.$$

那么σ_1为$\mathscr{F}_{\tau_t}^0$停时(其中τ_t为L_t^0的右连续逆)。事实上，$\sigma_1>s\Longrightarrow L_s^0=0$，因此由$\tau_t$的右连续性

$$\{\sigma_1>s\}\cap\{\tau_s\leqslant t\}$$

$$=\{\sigma_1>s\}\cap\{L_t^0>s\}\begin{cases}\in\mathscr{F}_t^0, & s<t,\\ =\varnothing\in\mathscr{F}_t^0, & s\geqslant t.\end{cases}$$

再则，也由τ_t的右连性及已证的σ_1为$(\mathscr{F}_{\tau_t}^0)$停时可知

$$\{\tau_{\sigma_1-}>t\}=\{\sigma_1>L_t^0\}\in\mathscr{F}_{\tau_{L_t^0}}^0\subset\mathscr{F}_t^0;$$

$$\{\tau_{\sigma_1}\leqslant t\}=\{\sigma_1\leqslant L_t^0\}\in\mathscr{F}_{\tau_{L_t^0}}^0\subset\mathscr{F}_t^0.$$

所以τ_{σ_1-},τ_{σ_1}都是$(\mathscr{F}_t^0)$停时。

利用引理7.13，对Wiener测度P^W我们有

$$P^W(\tilde{e}_{\sigma_1}\in\theta_s^{-1}A)=\frac{n^+(u_s\in\Gamma,\theta_s^{-1}A)}{n^+(u_s\in\Gamma)}. \tag{7.82}$$

记Brown 运动B在0中止后的中止BM°为B°，令$\sigma=\tau_{\sigma_1-}+s$。由强马氏性，(7.82)左边为

$$\begin{aligned}&P^W(B_{\tau_{\sigma_1-}+s}\in\Gamma,\ B^\circ\circ\theta_{\tau_{\sigma_1-}+s}\in A)\\&\quad=E^W(I_{B_\sigma\in\Gamma}\ P^0_{B_\sigma}(A)).\end{aligned} \tag{7.83}$$

这样(7.82)变成

$$n^+(u_s\in\Gamma,\theta_s^{-1}A)=n^+(u_s\in\Gamma)E^W(I_{B_\sigma\in\Gamma}\ P^0_{B_\sigma}(A)).$$

取$A=\{u_0\in\Lambda\}$，我们得到

$$n^+(u_s\in\Gamma\cap\Lambda)=n^+(u_s\in\Gamma)P^W(B_\sigma\in\Gamma\cap\Lambda).$$

于是

$$\gamma(\Lambda)\equiv P^W(B_\sigma\in\Gamma\cap\Lambda)=\frac{n^+(u_s\in\Gamma\cap\Lambda)}{n^+(u_s\in\Gamma)}.$$

从而

$$\begin{aligned}E^W(I_{B_\sigma\in\Gamma}\ P^0_{B_\sigma}(A))&=\int P^0_x(A)\gamma(dx)\\&=\frac{n^+(u_s\in\Gamma,P_{u_s}(A))}{n^+(u_s\in\Gamma)}.\end{aligned}$$

把它与(7.83),(7.82)结合起来，便得到(7.81)。

现在证马氏性。对于$\forall\,0<t_1<\cdots<t_k<t$及$f_1,\cdots,f_k,f\in\mathscr{B}^+(R)$，重复运用(7.81)及(7.80)得到

$$\begin{aligned}&n^+(f_1(w_{t_1})\cdots f_k(w_{t_k})f(w_t))\\&\quad=n^+(f_1(w_{t_1})\ P^0_{w_{t_1}}(f_2(w_{t_2-t_1})\cdots f_k(w_{t_k-t_1})f(w_{t-t_1})))\\&\quad=n^+(f_1(w_{t_1})P^0_{w_{t_1}}(f_2(w_{t_2-t_1})\cdots\\&\qquad\times f_k(w_{t_k-t_1})(T^0_{t-t_k}f)(w_{t_k})))=\cdots\\&\quad=n^+(f_1(w_{t_1})f_2(w_{t_2})\cdots f_k(w_{t_k})(T^0_{t-t_k}f)\ (w_{t_k})).\end{aligned}$$

这就得到了坐标过程关于 n 的马氏性。再利用马氏性到强马氏性的一般程式，便得强马氏性。

最后我们来推导进入律。

在命题7.14中取

$$f(u)=I_{T_\varepsilon<t}P^0(t-T_\varepsilon(u),\varepsilon,[y,\infty)),$$

并利用强马氏性，我们有，对 $y>\varepsilon>0$，

$$\begin{aligned}\lambda_t[y,\infty)&=n(u_t\geqslant y)=n(u_t\geqslant y,T_\varepsilon<t)\\&=n(T_\varepsilon<t,\ P^0_{u_{T_\varepsilon}}(u_{t-T_\varepsilon}\geqslant y))\\&=n(T_\varepsilon<t,P^0(t-T_\varepsilon,\varepsilon,[y,\infty)))\\&=n(T_\varepsilon<\sigma_0)E(I_{\tilde{T}_\varepsilon<t}P^0(t-\tilde{T}_\varepsilon,\varepsilon,[y,\infty)))\end{aligned}$$

$(\tilde{T}_\varepsilon=T_\varepsilon((\theta_{g_{T_\varepsilon}}w)^{\sigma_0}))$。由于命题7.15

$$n(T_\varepsilon<\sigma_0)=n(T_\varepsilon<\infty)=\frac{1}{2\varepsilon},$$

因此当 $\varepsilon\to0$，利用 $\tilde{T}_\varepsilon\to0$ 得到

$$\begin{aligned}\lambda_t[y,\infty)&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}P^0(t,\varepsilon,[y,\infty))\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_y^\infty\lim_{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}(e^{-\frac{1}{2t}(y-\varepsilon)^2}-e^{-\frac{1}{2t}(y+\varepsilon)^2})dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_y^\infty-ye^{-\frac{1}{2t}y^2}dy,\end{aligned}$$

从而

$$d\lambda_t=\frac{y}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy.$$

由对称性，定理7.17得证。

附　　录

（一）　测度扩张与鞅

Ω的子集类$\mathscr{C}$称为π系，如果$A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{C}$；称为$d$系（或$\lambda$系），如果满足：(i) 全集$\Omega\in\mathscr{C}$，(ii) $A,B\in\mathscr{C}$，$A\subset B\Rightarrow$真差$B\backslash A\in\mathscr{C}$，(iii) $A_n\in\mathscr{C}$，$A_n\uparrow\Rightarrow$单调并$\bigcup_1^{\infty}A_n\in\mathscr{C}$。

定理1　如果$\mathscr{F}$是包含某个π系的最小d系，那么$\mathscr{F}$就是这个π系生成的σ代数。

（证明可参见，例如，[YWL]）。

设$\mathscr{F}_n$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上$\mathscr{F}$的递增子σ代数族。$(\Omega,\mathscr{F},P)$的$(\mathscr{F}_n)$适应可积随机变量列X_n，分别称为$(\mathscr{F}_n)$鞅、下鞅、上鞅（或称$(X_n,\mathscr{F}_n)$为P鞅、下鞅、上鞅），如果对任意n分别地有$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=,\geqslant,\leqslant X_n$ (a.e.dP) （Neveu称这里的鞅为可积鞅，因为他在研究正鞅（非负鞅）时并不需要通常的$EX_n<\infty$这一条件）。

下列关于离散时间鞅的定理的证明可参见，例如，[Y]或Neveu的《离散时间鞅》。

定理2（Doob上穿不等式）　设X_n为$(\mathscr{F}_n)$下鞅，令$U_a^b(X_0,\cdots,X_N)$为$X_0,X_1,\cdots,X_N$上穿$[a,b]$的次数，则有

$$EU_a^b(X_0,\cdots,X_N)\leqslant\frac{1}{b-a}E(X_N-a)^+. \qquad (0.1)$$

定理3（Doob不等式）　1° 若X_n是$(\mathscr{F}_n)$非负下鞅，则

$$E(\sup_n|X_n|)\leqslant\frac{e}{e-1}[1+\sup E(|X_n|\log^+|X_n|)]; \qquad (0.2)$$

$$(E\sup_n|X_n|^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant p'\sup_n(E|X_n|^p)^{\frac{1}{p}}\quad\left(p>1,\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1\right);$$

(0.3)

$$P(\sup_{n\leqslant N}|X_n|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{E|X_N|^p}{\lambda^p}\quad(p\geqslant1);\qquad(0.4)$$

2° 若 X_n是$(\mathscr{F}_n)$下鞅，则

$$P(\sup_{n\leqslant N}|X_n|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{E|X_0|+E|X_N|}{\lambda}.\qquad(0.5)$$

定理4(收敛定理) 对于$(\mathscr{F}_n)$下鞅 X_n有

1° 若 EX_n^+有界，则 $X_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}X_n$ (a.e.dP) 存在且 X_∞可积，而且对于 $\mathbf{N}=\mathbf{N}\cup\{+\infty\}$ ($\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$)，$(X_n)_{n\in\mathbf{N}_c}$是$(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbf{N}^c}$下鞅，当且仅当$\{X_n^+\}_{n\in\mathbf{N}}$是一致可积的。即对 n 一致地有 $E(X_n^+I_{X_n^+\geqslant C})\to0$ $(C\to\infty)$。此时 X_∞称为 $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 的右闭元，或称(X_n)为闭下鞅。而且 $X_n\xrightarrow{L_1}X_\infty$，当且仅当

$$EX_n\to EX_\infty;$$

2° 若 $E|X_n|^p$对 n 一致有界，$p>1$，X_n为$(\mathscr{F}_n)$下鞅，那么$X_n\xrightarrow{\text{a.e 且 }L_p}X$。

定理5(Doob 停止定理) 若 X_n是$(\mathscr{F}_n)$闭下鞅，τ,σ 为$(\mathscr{F}_n)$停时(即$\{\tau\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n$)，而且 $\tau\leqslant\sigma$，那么

$$E(X_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\geqslant X_\tau.$$

若X_n是$(\mathscr{F}_n)$下鞅，τ,σ 为有界$(\mathscr{F}_n)$停时，而且 $\tau\leqslant\sigma$，那么$E(X_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\geqslant X_\tau$。

这里 σ 代数

$$\mathscr{F}_\tau=\left\{\Lambda:\ \Lambda\in\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mathscr{F}_n,\Lambda\cap\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n\right\}.$$

定义 记 $-\mathbf{N}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1\}$。设$\mathscr{F}_{n^*}$ $(n^*\in-\mathbf{N})$

是递增 σ 代数族，可积随机变量列 X_{n^*} 称为 $(\mathscr{F}_{n^*})$ 逆时下鞅，如果 X_{n^*} 是 $(\mathscr{F}_{n^*})$ 适应的，而且

$$E(X_{n^*+1}|\mathscr{F}_{n^*})\geqslant X_{n^*}.$$

定理6 如果逆时下鞅 X_{n^*} 的均值 EX_{n^*} 有下界，那么 (X_{n^*}) 一致可积，而且当 $n^*\to-\infty$ 时，X_{n^*} a.e.dP 收敛且 L_1 收敛极限 $X_{-\infty}$。

下面讨论连续时间鞅。

$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$ 下鞅（相应地：鞅、上鞅），如果对于任意 t 有 $E|X_t|<\infty$，且对 $s<t$ 有

$$E(X_t|\mathscr{F}_s)\geqslant X_s \quad \text{a.e.d}P \quad (\text{相应地：}=X_s,\leqslant X_s).$$

定理7 对于 $(\mathscr{F}_t)$ 下鞅 X，存在一个右连(续)左极(限)的 $(\mathscr{F}_{t+})$ 下鞅 $\hat{X}$，使

$$P(\forall t,\hat{X}_t=\lim_{s\text{有理}\downarrow t}X_s,\hat{X}_{t-}=\lim_{s\text{有理}\uparrow t}X_s)=1,$$

$$X_t\leqslant E(\hat{X}_t|\mathscr{F}_t).$$

如果 $\mathscr{F}_{t-}=\mathscr{F}_t(\forall t)$，那么 $\hat{X}$ 控制 X：$X_t\leqslant\hat{X}_t$，而且此时 $P(\hat{X}_t=X_t)=1$ $(\forall t)$，当且仅当 EX_t 右连续。在此条件成立时，我们称 $\hat{X}$ 为 X 的右连左极修正。

特别地，$(\mathscr{F}_{t+})$ 鞅 X 必有右连左极修正(因此对于参考族 $(\mathscr{F}_t)$(即它为右连续)的鞅可以不妨假定是右连左极的)。这里

$$\mathscr{F}_{t+}\equiv\bigcap_n\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}.$$

证明 设 $[0,\infty)$ 上全体有理数为 Q^+。我们首先来证明

$$P\{\omega:\{X_t(\omega):t\in[0,T]\cap Q^+\}\text{是有界集}\}=1,$$

而且对于任意 $t\geqslant 0$，$\lim\limits_{s\in Q^+,s\uparrow t}X_s$ 及 $\lim\limits_{s\in Q^+,s\downarrow t}X_s$ 分别 a.e.dP 存在。

事实上，设 $Q^+\cap[0,T]=\{r_1,r_2,\cdots\}$。又 $\{r_1,\cdots,r_n\}$ 按大小

可改记为$s_1,\cdots,s_n$。于是 $X_0,X_{s_1},\cdots,X_{s_n},X_T$是下鞅列。对它用(0.1)及(0.5)，并让 $n\to\infty$，我们有

$$EU_a^b(X_{Q^+\cap[0,T]})\leqslant\frac{1}{b-a}E(X_T-a)^+,\tag{0.6}$$

$$P(\sup_{t\in Q^+\cap[0,T]}|X_t|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}(E|X_0|+E|X_T|),\tag{0.7}$$

其中 $U_a^b(X_{Q^+\cap[0,T]})\equiv\lim\limits_{n\to\infty}U_a^b(X_0,X_{s_1},\cdots,X_{s_n},X_T)$。记

$$\Lambda_T=\{\omega:\sup_{s\in Q^+\cap[0,T]}|X_s(\omega)|=\infty\}$$

$$\cup\Big(\bigcup_{a,b\in Q^+}\{U_a^b(X_{Q^+\cap[0,T]})=\infty\}\Big).$$

那么$P(\Lambda_t)=0$。由(0.6)可知，当$\omega\overline{\in}\Lambda_{t+\varepsilon}(\varepsilon>0)$时，两个极限均存在，令$\Lambda_{t+}=\bigcap\limits_{s>t}\Lambda_s$。我们定义

$$\hat{X}_t(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{s\to Q^+\\ s\downarrow t}}X_s(\omega), & \omega\overline{\in}\Lambda_{t+},\\ 0, & \omega\in\Lambda_{t+}.\end{cases}$$

那么$\Lambda_{t+}\in\mathscr{F}_{t+}$，从而 $\hat{X}_t\in\mathscr{F}_{t+}$。

其次，证明$\hat{X}$是右连左极的。事实上，当$\omega\in\Lambda_{t+}$时显然。而$\omega\overline{\in}\Lambda_{t+}$时，$\omega$必然$\overline{\in}$某个$\Lambda_{t_1}(t_1>t)$，因此$\omega\overline{\in}\Lambda_{u+}(t<u<t_1)$。于是对于$\varepsilon>0$，只要$u$与$t$充分近，我们就有

$$|\hat{X}_u(\omega)-\hat{X}_t(\omega)|=\lim_{s\in Q^+,s\downarrow t}|X_s(\omega)-\hat{X}_u(\omega)|<\varepsilon.$$

所以$\hat{X}$右连续，而且

$$P(\forall t,\hat{X}_t\neq\lim_{s\in Q^+,s\downarrow t}X_s)\leqslant P\Big(\bigcup_n\Lambda_n\Big)=0.$$

类似的方法可推出$\hat{X}_{t-}$存在，而且$P(\hat{X}_{t-}=\lim\limits_{s\in Q^+,s\uparrow t}X_s,\forall t)=1$。

再则我们证明$\hat{X}$是$(\mathscr{F}_{t+})$下鞅，同时$X_t\leqslant E(\hat{X}_t|\mathscr{F}_t)$。

事实上，对于任意 s,t，我们取 $s_n \leqslant t_n \in Q^+$，使 $s_n \downarrow s, t_n \downarrow t$. 于是 X_{s_n}, X_{t_n} 均为逆时下鞅列，而且其均值分别有下界 EX_s，EX_t. 由定理6 $X_{s_n} \xrightarrow{L_1} \hat{X}_s$, $X_{t_n} \xrightarrow{L_1} \hat{X}_t$. 对于任意 $\Lambda \in \mathscr{F}_{s+}$，我们在不等式 $E(X_{s_n} I_\Lambda) \leqslant E(X_{t_n} I_\Lambda)$ 中，令 $n \to \infty$，便得

$$E(\hat{X}_s I_\Lambda) \leqslant E(\hat{X}_t I_\Lambda),$$

即 $\hat{X}$ 是 $(\mathscr{F}_{t+})$ 下鞅. 另一方面，对于任意 $\Lambda \in \mathscr{F}_t$，在不等式 $E(X_t I_\Lambda) \leqslant E(X_{t_n} I_\Lambda)$ 中，令 $n \to \infty$，便得 $E(X_t I_\Lambda) \leqslant E(\hat{X}_t I_\Lambda)$. 此即 $X_t \leqslant E(\hat{X}_t | \mathscr{F}_t)$.

最后，我们证明当 $\mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$ 时，$P(X_t = \hat{X}_t) = 1 (\forall t)$，当且仅当 EX_t 右连续. 事实上此时 $\hat{X}$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 下鞅，且当 $t_n \in Q^+$，$t_n \downarrow t$ 时，有 $X_{t_n} \xrightarrow{L_1} \hat{X}_t$. 因此 $E\hat{X}_t = \lim\limits_{n \to \infty} EX_{t_n}$. 但是 $X_t \leqslant \hat{X}_t$，所以 $P(X_t = \hat{X}_t) = 1 \ (\forall t) \Longleftrightarrow EX_t = E\hat{X}_t \ (\forall t) \Longleftrightarrow E(X_t) = \lim\limits_{n \to \infty} EX_{t_n} (\forall t, \forall t_n \in Q^+, t_n \downarrow t) \Longleftrightarrow EX_t$ 右连续.

定理8(Doob 不等式)　设 X 是右连(左极)$(\mathscr{F}_t)$鞅，且存在 p 阶矩($p \geqslant 1$)，则

$$E(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |X_t|) \leqslant \frac{e}{e-1}[1 + \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} E(|X_t| \log^+ |X_t|)] \quad (p = 1 \text{时}), \tag{0.8}$$

$$E(\sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |X_t|^p) \leqslant (p')^p E|X_T|^p \quad \left(p > 1, \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1\right); \tag{0.9}$$

$$E(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |X_t| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E|X_T|^p}{\lambda^p} \quad (p \geqslant 1) \tag{0.10}$$

(由离散时间鞅直接推出).

定理9(Doob 停止定理(加强形式))　设 $\mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$，$X$ 为"闭区间" $0 \leqslant t \leqslant \infty$ 上的右连(左极)$(\mathscr{F}_t)_{t \leqslant \infty}$ 下鞅(或相应地：鞅)，那么

1° X在递增$(\mathscr{F}_t)$停时列σ_n(可取$+\infty$)上的"选样值"X_{σ_n}是$(\mathscr{F}_{\sigma_n})$下鞅(相应地：鞅)；

2° 对于任意两个$(\mathscr{F}_t)$停时σ和τ有

$$E(X_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\geqslant(=)X_{\sigma\wedge\tau}.$$

特别地，对于$0\leqslant t<\infty$上的右连$(\mathscr{F}_t)$下鞅(或鞅)X在递增有界停时σ_n上的选样值X_{σ_n}是$(\mathscr{F}_{\sigma_n})$下鞅(或鞅)，这里

$$\mathscr{F}_\sigma\equiv\left\{\Lambda\in\mathscr{F}_\infty\left(=\bigvee_n\mathscr{F}_n\right):\ \forall s,\Lambda\cap\{\sigma\leqslant s\}\in\mathscr{F}_s\right\}.$$

证明 1°是2°的特款，所以只需证2°。先设$\tau\leqslant\sigma$。记

$$\bar{\Omega}_n=\left\{0,\frac{1}{2^n},\cdots,\frac{k}{2^n},\cdots,+\infty\right\},$$

$$\sigma^{(n)}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)}(\sigma)+(+\infty)I_{\{\sigma=+\infty\}}.$$

类似地定义$\tau^{(n)}$。于是$\sigma^{(n)}\downarrow\sigma,\tau^{(n)}\downarrow\tau,\tau^{(n)}\leqslant\sigma^{(n)}$，它们可以看成是离散$(\mathscr{F}_t)_{t\in\bar{\Omega}_n}$闭下鞅$(X)_{t\in\bar{\Omega}_n}$的随机选样时刻：根据定理5 $E(X_{\sigma^{(n)}}|\mathscr{F}_{\tau^{(n)}})\geqslant X_{\tau^{(n)}},E(X_{\tau^{(n)}}|\mathscr{F}_{\tau^{(n-1)}})\geqslant X_{\tau^{(n-1)}}$(a.e.d$P$)。但是$\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_{\tau^{(n)}}$，所以上式对$\mathscr{F}_\tau$取条件期望后就有

$$E(X_{\sigma^{(n)}}|\mathscr{F}_\tau)\geqslant E(X_{\tau^{(n)}}|\mathscr{F}_\tau)\quad(\text{a.e.d}P).\qquad(0.11)$$

由于$(X_{\tau^{(n)}},\mathscr{F}_{\tau^{(n)}})$是逆时下鞅，并且$EX_{\tau^{(n)}}\geqslant EX_0$，利用定理6推出$X_{\tau^{(n)}}\xrightarrow{L_1}X_\tau$。同理$X_{\sigma^{(n)}}\xrightarrow{L_1}X_\sigma$。在(0.11)中令$n\to\infty$，两边取$L_1$极限，便得

$$E(X_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\geqslant E(X_\tau|\mathscr{F}_\tau)\quad(\text{a.e.d}P).\qquad(0.12)$$

我们还需验证$X_\tau\in\mathscr{F}_\tau$ (a.e.dP)。事实上，由$\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$，对于任意$\Lambda\in\mathscr{F}_\infty$我们有

$$\Lambda\cap\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t\Longleftrightarrow\Lambda\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t+}$$
$$\Longleftrightarrow\Lambda\cap\{\tau\leqslant t\}=\mathscr{F}_t.$$

因此$\mathscr{F}_\tau=\{\Lambda\in\mathscr{F}_\infty:\ \Lambda\cap\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t(\forall t)\}$。于是对于$\Lambda\in$

$\bigcap_n \mathscr{F}_{\tau^{(n)}}$恒有

$$\Lambda\cap\{\tau<t\}=\bigcup_n(\Lambda\cap\{\tau^{(n)}<t\})\in\mathscr{F}_t,$$

即 $\Lambda\in\mathscr{F}_\tau$。因此 $\bigcap_n\mathscr{F}_{\tau^{(n)}}\subset\mathscr{F}_\tau$，从而 $\mathscr{F}_\tau=\bigcap_n\mathscr{F}_{\tau^{(n)}}$。另一方面，对于实数 λ 有

$$\{X_{\tau^{(n)}}\leqslant\lambda\}\cap\left\{\tau^{(n)}=\frac{k}{2^n}\right\}$$

$$=\{X_{\frac{k}{2^n}}\leqslant\lambda\}\cap\left\{\frac{k-1}{2^n}\leqslant\tau<\frac{k}{2^n}\right\}\in\mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}.$$

因此$\{X_{\tau^{(n)}}\leqslant\lambda\}\in\mathscr{F}_{\tau^{(n)}}$。从而 $X_{\tau^{(n)}}\in\mathscr{F}_{\tau^{(n)}}$。于是由$X_t$的右连续性得到 $X_\tau=\lim\limits_{n\to\infty}X_{\tau^{(n)}}\in\bigcap_n\mathscr{F}_{\tau^{(n)}}=\mathscr{F}_\tau$。这说明了：当 $\tau<\sigma$时 2°正确。

一般情形，我们有

$$E(X_\sigma|\mathscr{F}_\tau)=E(X_\sigma I_{\sigma\leqslant\tau}|\mathscr{F}_\tau)+E(X_{\sigma\vee\tau}I_{\sigma>\tau}|\mathscr{F}_\tau). \tag{0.13}$$

但是 $X_\sigma I_{\sigma\leqslant\tau}, I_{\sigma>\tau}\in\mathscr{F}_\tau$，于是(0.13)变成

$$E(X_\sigma|\mathscr{F}_\tau)=X_\sigma I_{\sigma\leqslant\tau}+I_{\sigma>\tau}E(X_{\sigma\vee\tau}|\mathscr{F}_\tau)$$

$$=X_\sigma I_{\sigma\leqslant\tau}+I_{\sigma>\tau}X_\tau=X_{\sigma\wedge\tau}\quad(\text{a.e.}dP).$$

推论 $[E(\eta|\mathscr{F}_t)]_{t=\sigma}=E(\eta|\mathscr{F}_\sigma)$。

证明 令 $X_t=E(\eta|\mathscr{F}_t)$(它是 $0\leqslant t\leqslant\infty$ 上 $(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant\infty}$鞅)。于是对于任意 $\Lambda\in\mathscr{F}_\sigma$用 Doob 停止定理推出

$$E(X_\sigma I_{\Lambda\cap(\sigma\leqslant t)})=E(X_{\sigma\wedge t}I_{\Lambda\cap(\sigma\leqslant t)})$$

$$=E(X_t I_{\Lambda\cap(\sigma\leqslant t)})=E(I_{\Lambda\cap(\sigma\leqslant t)}E(\eta|\mathscr{F}_t))$$

$$=E(\eta I_{\Lambda\cap(\sigma\leqslant t)}).$$

取 $t=\infty$，得到 $E(X_\sigma I_\Lambda)=E(\eta I_\Lambda)$。因此 $X_\sigma=E(\eta|\mathscr{F}_\sigma)$。

（二） Brown 运动存在性的一个构造性证明（纲要）

1° 令 D 为 $[0,1]$ 上全体二分点集。记 R^D 上柱集生成的 σ 代数为 $\mathscr{B}^D$。由 Kolmogorov 定理推出在 $(R^D,\mathscr{B}^D)$ 上存在测度 P^D，使对于任意 $t_1<\cdots<t_n$，$(t_i\in D)$，$w^D\equiv w^D(t)\in R^D$ $(t\in D)$ 有

$$P^D(w^D(t_1)<a_1,\cdots,w^D(t_n)<a_n)$$

$$=\int_{-\infty}^{a_1}\cdots\int_{-\infty}^{a_n}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)\right]dx_1\cdots dx_n. \tag{0.14}$$

2° 令 $D_n=\left\{\frac{k}{2^n};\ 0\leqslant k\ \text{整数}\leqslant 2^n\right\}\subset D$。对于任意的 $w^D\in R^D$，记

$T_n w^D=$ 以 w^D 在 R^{D_n} 上的限制所得点作为顶点的折线。那么 $T_n w^D\in W^{(1)}=C[0,1]$，而且 T_n 是

$$(R^D,\mathscr{B}^D)\to(W^{(1)},\mathscr{B}(W^{(1)}))$$

的可测变换。

3° 定义

$$\mathscr{D}(T^D)=\{w\equiv w(t)\ \text{在}\ D\ \text{上的限制}:\ w\in W^{(1)}\}.$$

易证

$$\mathscr{D}(T^D)=\{w^D;w^D\in R^D,\rho(T_k w^D,T_l w^D)\to 0\quad(k,l\to\infty)\}$$

（这里 ρ 是 $W^{(1)}$ 上的距离）。因此 $\mathscr{D}(T^D)\in\mathscr{B}^D$。

在 $\mathscr{D}(T^D)$ 上定义

$$T^D w^D=(\rho)\lim_{n\to\infty}T_n w^D\in W^{(1)}.$$

另一方面，利用 $T_k w^D$ 的表达式及(0.14)可得估计：

$$P^D\left\{\rho(T_k w^D,T_{k+1}w^D)\geqslant\frac{1}{k^2}\right\}\leqslant C\,\frac{k^8}{2^k}.$$

再用 Borel-Cantelli 引理可推出

$$P^D(\mathscr{D}(T^D))=1.$$

即变换 T^D是a.e.dP^D地有定义的，因此它可以扩张到 R^D上，并在 $R^D\setminus\mathscr{D}(T^D)$ 上定义 T^D为 0：易证扩张后的 T^D仍是

$$(R^D,\mathscr{B}^D)\to(W^{(1)},\mathscr{B}(W^{(1)}))$$

可测的。

4° 在 $(W^{(1)},\mathscr{B}(W^{(1)}))$上定义测度$P^{W^{(1)}}=P^D(T^D)^{-1}$。于是对于 $t_1,\cdots,t_n\in D$, $t_1<\cdots<t_n$, $P^{W^{(1)}}(w(t_1)<a_1,\cdots,w(t_n)<a_n)$的表达式就是(0.14)。对于一般的 $t_1,\cdots,t_n$，可用 D中的 $t_1^{(m)},\cdots,t_n^{(m)}$近似。由控制收敛定理可得这个分布仍由(0.14)表达。

5° 对于区间 $[0,m]$，用类似的记号与办法可得到$(W^{(m)},\mathscr{B}(W^{(m)}))$上的测度$P^{W^{(m)}}$ (记 $W^{(m)}=C[0,m]$)，其分布的形式仍如(0.14)。易见$\{P^{W^{(m)}}\}$是彼此相容的测度族，也就是有

$P^{W^{(m)}}U_{n,m}^{-1}=P^{W^{(n)}}$ ($U_{n,m}(m\geqslant n)$是 $W^{(m)}$到 $W^{(n)}$的投影)。

此外，如果 $A_n\in\mathscr{B}(W^{(n)})$，$A_m\in\mathscr{B}(W^{(m)})$，而且

$$U_m^{-1}A_m=U_n^{-1}A_n,$$

那么

$$P^{W^{(n)}}(A)=P^{W^{(m)}}(A_m),$$

这里 U_n 是$W\equiv C[0,\infty)$到 $W^{(n)}$的投影。

在 $U_n^{-1}\mathscr{B}(W^{(n)})$上定义

$$P^W=P^{W^{(n)}}U_n^{-1}.$$

利用 Polish(完备可分距离可测)空间上的 Kolmogorov 定理，可知P^W可以扩张为$\mathscr{B}(W)$上的概率测度，且其有限维分布有(0.14)的形式。我们称$(W,\mathscr{B}(W))$为 Wiener 空间，称 P^W 为 Wiener 测度。$(W,\mathscr{B}(W))$上的坐标过程

$$X_t(w)\equiv w(t)$$

在 P^W 下成为 Brown 运动，也称 Wiener 过程。

(三) 凸函数

开区间 I 上定义的函数 f 称为凸函数，如果

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y) \quad (\forall t\in[0,1]).$$

凸函数具有以下性质：

1° $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ 是 y 的增函数；

2° 存在右(左)导数 $f'_+(f'_-)$；

3° 对 $y>x$ 有

$$f'_+(x)\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant f'_-(y);$$

4° f'_+,f'_- 均为增函数；

5° f'_+ 右连续(f'_- 左连续)，在 f'_+ 的连续点上有 $f'_-=f'_+$，因此$\{x: f'_-(x)\neq f'_+(x)\}$可列。

命题 凸函数 f 在 Schwarz 意义下的二阶广义导数 D^2f 为正 Radon 测度 $D^2f=d(f'_-)$。反之，给定正 Radon 测度 μ 必存在凸函数 f 使 $D^2f=\mu$。

在 $\forall a<b$，$a<x<b$ 上 f 有表达式：$\exists\alpha,\beta$(依 a,b)

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{[a,b]}|x-s|\mu(ds)+\alpha x+\beta, \\ f'_-(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{[a,b]}\operatorname{sgn}(x-s)\mu(ds)+\alpha. \end{cases}$$

证明 必要性：令 Df,D^2f 分别为 f 在 Schwarz 意义下的一阶、二阶广义导数，那么对 $\forall\varphi\in C_0^\infty$ 有

$$\begin{aligned}(Df,\varphi)&=-\int f\varphi'=-\int\lim_{h\to0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}f(x)dx\\ &=-\lim_{h\to0}\int\varphi(x)\frac{f(x-h)-f(x)}{h}dx=\int\varphi f'_-.\end{aligned}$$

所以 $Df=f'_-$（也等于 f'_+）。其次

$$(D^2f,\varphi)=-\int(Df)\varphi'=-\int f'_-\varphi'=\int\varphi d(f'_-),$$

也就是

$$D^2 f = d(f'_-)(= d(f'_+)).$$

充分性：任给 a，$|x-a|$ 是凸函数其广义导数为

$$D|x-a| = \mathrm{sgn}(x-a),\quad D^2|x-a| = 2\delta_{\{a\}}(dx).$$

如果 $|x-a| \in L^1(\mu(da))$，则

$$D^2\left(\frac{1}{2}\int |x-a|\mu(da)\right) = \mu.$$

一般地，如果 $a'<a<b<b'$，那么

$$\frac{1}{2}\int_{[a,b]} |x-s|\mu(ds),\quad \frac{1}{2}\int_{[a',b']} |x-s|\mu(ds)$$

都在 (a,b) 上凸且具有相同的 Schwarz 二阶广义导数，所以它们只能差一个线性函数。于是存在一个 f 定义在 R 上，使 $D^2 f=\mu$ 且满足命题。

设 $s(x)$ 连续、严格递增。函数 f 称为 s-凸函数，如果 $\forall x_1<x<x_2$ 有

$$f(x) \leqslant \frac{s(x_2)-s(x)}{s(x_2)-s(x_1)} f(x_1) + \frac{s(x)-s(x_1)}{s(x_2)-s(x_1)} f(x_2).$$

类似地定义 f 相对于 s 的左、右导数，并得到测度 $\mu = d\left(\frac{df}{ds}\right)$。那么我们有

f 在 (a,b) 为 s-凸函数且 $f(a)=f(b)=0$ 的充要条件为存在正 Radon 测度 μ，使

$$f(x) = -\int_a^b G(x,y)\mu(dy),$$

其中当 $x \geqslant y$ 时

$$G(x,y) = G(y,x) = \frac{(s(x)-s(a))(s(b)-s(y))}{s(b)-s(a)}.$$

注　命题说明了凸函数在局部可表成一个线性函数及“基本”凸函数 $|x-a|$ 的线性组合的和。

一 般 记 号

a^+, a^-　数 a 的正部，负部。

$a \wedge b$　$\min(a, b)$。

$a \vee b$　$\max(a, b)$。

$\bar{A}$　集 A 的闭包。

A^c　集 A 的余集。

$A^\delta, A^{\frac{1}{n}}$　集 A 的 $\delta, \frac{1}{n}$ 邻域

a.e.dP　对于 dP 几乎处处成立。

b^T; σ^T　向量 b；矩阵 σ 的转置。

BM°　零点中止的 Brown 运动

$\mathscr{B}(U)$　U 的全体 Borel 子集。

$\mathscr{B}_b(U), \mathscr{B}^+(U)$　$\mathscr{B}(U)$ 可测的有界，非负函数

$C(D)$　D 上全体连续函数（D 可以为开集或闭集）。

$C^m(D)$　D 上全体 m 阶连续可导函数（在边界点上指“单侧”导数）。

$C_b(D)$; $C_K(D)$　$C(D)$ 中有界函数全体；紧支集函数全体。

$C_b^m(D)$; $C_K(D)$　$C^m(D)$ 中有界函数全体；紧支集函数全体。

$C^0(D)$; $\hat{C}(D)$　D 上一致连续函数全体；D 边界上为 0 的连续函数全体。

$C_0^\infty(D)(C_K^\infty(D))$　D 上无穷可微紧支集函数全体。

∂　死点。

∂D	D的边界。
$\nabla, \nabla_x, \partial_x$	(关于x变量的)梯度算子。
$\mathscr{D}(\mathfrak{A})$	算子$\mathfrak{A}$的定义域。
$\delta(x)$	δ函数。
E_x; P_x	初值为x的期望；概率。
$\eta \in \mathscr{F}$	随机变量η为$\mathscr{F}$可测。
$\mathscr{F} \wedge \mathscr{G}$, $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$	含于σ代数$\mathscr{F}, \mathscr{G}$中的最大σ代数。
$\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$	含σ代数$\mathscr{F}, \mathscr{G}$的最小代数。
$\mathscr{F} \vee \mathscr{G}$	含σ代数$\mathscr{F}, \mathscr{G}$的最小σ代数。
$\mathscr{F}_t^X$; $\overline{\mathscr{F}}_t^X$	$\{X_{t'}: t' \leqslant t\}$生成的$\sigma$代数(有时指其右连续化)；其完备化。
$\overline{\mathscr{F}}_t^P$	σ代数$\mathscr{F}_t$在概率P下的完备化.
$\mathscr{F}_{t+}$; $\mathscr{F}_{t-}$	$\mathscr{F}_t$的右连续化$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$;左连续化$\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s$。
$\mathscr{F}_\infty$	$\bigcup_t \mathscr{F}_t$。
$\mathscr{F}_\tau$	τ事前σ代数，即$\{A \in \mathscr{F}_\infty: A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t\}$。
$\mathscr{F}_{\tau+}$	$\{A \in \mathscr{F}_\infty: A \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t\}$。
$\mathscr{F}_{\tau-}$	严格τ事前σ代数。
I_A	集A的示性函数。
L^{loc}	局部 Lebesgue 可积函数。
$L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$	p次可积函数空间。
$\mathfrak{S}(R^d)$	Schwarz 空间。
X^τ	过程X在停时τ上的停止，即$X_{\cdot\wedge\tau}$。
$X^{\tau-}$	过程X在停时τ前的预停。
P^W	Wiener 测度(§1.1)。
θ_t, θ_τ	推移算子。

$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$	(带参考族($\mathscr{F}_t$)的)概率空间。
$\#\{\quad\}$	集$\{\quad\}$中的元素个数。
$\sigma(\quad)$	(　)中元素生成的σ代数。
$\equiv$	定义为(在等式中),无区别(随机过程,见p.20)

特殊记号首次出现的章节

名词索引

（按字母——汉语拼音及英语——次序）

P(π)

Q

R(ρ)

S(σ)

T

W

X

Y

Z

参考文献

[B] P. Billingsley, Convergence of probability measures, John Wiley and Sons, 1968.

[BG] R.M. Blumenthal and R.K. Getoor, Markov Processes and Potential Theorey, Academic Press, 1968.

[Br] L. Breiman, Probability, Addison Wesley, Reading, 1968.

[CW] K.L. Chung, R.J. Williams, Introduction to Stochastic Integration, Birkhäuser, 1983.

[DM] C. Dellacherie and P. A. Meyer, Probabilités et Potentiel, Hermann, 1980.

[D] E.B. Dynkin, Markov Processes, I, II. Springer-Verlag, 1965.

[F] A. Friedman, Stochastic differential equations and applications, Vol. 1 and Vol. 2, Academic Press, 1975(有中译本，吴让泉译)。

[Gr] C. Graham, Mckean-Vlasov Ito-Skorohod equations, and nonlinear diffusions with discrete jumps, Stochastic processes and their applications. v. 40, No.1 (1992), 69—82.

[GS1] I. I. Gihman and A. V. Skorohod, Stochastic differential equations, Springer-Verlag, 1972.

[GS2] I. I. Gihman and A. V. Skorohod, The theory of stochastic processes III, Springer-Verlag, 1979.

[H] 黄志远，随机分析学基础，武汉大学出版社，1988.

[HWY] Sheng-wu He, Jia-gang Wang, Jia-an Yan, Semimartingale Theory and Stochastic Calculus, Manuscript.

[I] 伊藤清，概率过程，岩波书店（中译本，刘璋温译）。

[IW] N. Ikeda and S. Watanabe Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland Mathematical Library, 1981.

[J] J. Jacod, Calcul stochastique et problèmes des martingales, Lecture Notes in Math, 714, Springer-Verlag, 1979.

[K] K. Kuratowski, Topology I, Academic Press, 1966.

[KS] I. Karatzas, S.E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springor-Verlag, 1987.

[KW] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, *Nagoya Math. J.*, 30 (1967), 209—245.

[LM] J. P. Lepeltier and B. Marchal, Problème des martingales et equation differentialles stochastiques associèes à un opérateur intégro-differentiell, Ann. Inst. H. Poincaré Probab, Statist. XII 1 (1976), 43—103.

[LS1] R. S. Lipter and A. N. Shiryaev, Statistics of random processes, Springer-Verlag, 1977.

[LS2] R. Sh. Liptser and A. N. Shiryaev, Theory of martingales, Klauwer Academic Publishers, 1989.

[M] P.A. Meyer, Un cours sur les intergrales stochastiques. Lecture notes in Math. 511, 245—400, 1976.

[N] S. Nakao, On the existence of solutions of stochastic differential equations with boundary conditions. *J.Math. Kyoto. Univ.* 12—1 (1972) 151—178.

[Ni] K. Nishioka, The degenerate Neumann problem and degenerate diffusions with Venttsel's boundary conditions. *Ann. Prob.* 1981. V. 9. No. 1 103—118.

[I] K. P. Parthasarathy, Probability measures on metric spaces, Academic Press, 1967.

[Q] 钱敏平，随机过程引论，北京大学出版社，1990.

[RY] D. Revuz, M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer-Verlag, 1991.

[S] A. V. Skorohod, Studies in the theory of random pro-

cesses, Addison-Wesley, Reading, 1965.

[SV] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, Multidimentional diffusion processes, Springer-Verlag, 1979.

[Y] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社，1981.

[YWL] 严士健，王隽骧，刘秀芳，概率论基础，科学出版社，1982.

[W] 王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.

[FC] И. И. Гихман, А. Б. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения и ихприложения, киев «Нлукова думка», 1982.